HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2主箱桁の荷重分配の解析と計算
Author(s)	佐伯, 昇; 藤田, 嘉夫
Citation	北海道大學工學部研究報告, 68(1), 105-119
Issue Date	1973-09-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/41143
Type	bulletin (article)
File Information	68(1)_105-120.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

2主箱桁の荷重分配の解析と計算

佐伯　昇*　藤田嘉夫*

(昭和48年3月23日受理)

Analysis and Calculation of Load Distribution of Two-Box Girders

Noboru SAEKI　Yoshio FUJITA

Abstract

In this paper the load distribution of the two-box girders is discussed and compared with the results in Bieger's report. In Bieger's paper the distributing force and moment are analyzed by using Fourier's series. But in this paper it is assumed that the moment of distribution to each beam is negligible or it is assumed that two-box beams are connected with a longitudinal hinge, therefore only the shearing force acts and thus can be represented by one differential equation.

Load distributions of simple beam, fixed beam and cantilever are analyzed by the equation and denoted by a variable Cp and a parameter Ct. The results are shown in the figures and by the proposed analysis it was found that the value was somewhat smaller than Bieger's.

Load distributions of the beam with variable cross section are analyzed by difference equations and those of simple, beam, fixed beam and cantilever are discussed. It was clarified that the load distribution varies from certain values up to 0.5 by the situation of line load, influeneces of thickness of the floor slab and that intervals of two beams are sensitive and the difference between beams with a variable cross section and a equivalent cross section is small but an assumed cross section ($I_t=\infty$, I_X) is large with regard to load distribution.

1. まえがき

2主箱桁は2つの箱桁が床版によって連結している構造で，この床版によってたがいに力を伝達しあって変形している。この分担力を2主箱桁の断面の床版の中央でせん断力とモーメントを挿入して解析しているのがBieger[1]，Kappei[2]らの論文でフーリェ級数によって解析している。本論文はこの床版の中央で分担される力をせん断力のみを考えて解析する。すなわち2主箱桁の上床版の中央が軸方向のヒンジ連結されているとみなされる構造かまたは2主箱桁の横断面に逆対称の荷重が載荷した場合に相当するものである。この床版の分担力の微分方程式はMehmel[3]らによって誘導され，その解は片持ばりのみについて扱っている。ここではこれを発展させてねじり剛度を考慮した単純桁，固定桁および片持ばりについて解析を行なっている。これを基にし

* 交通構造工学講座

て等分布荷重が載荷した場合の荷重分配性状について変数 C_P, パラメーター C_T を用いて図に表わしている。この図を用いて主桁の割増係数の計算例を行なっている。変断面桁については差分方程式によって定断面桁と同様に単純桁，固定桁および片持ばりについて解析を行なっている。これを用いて固定桁について横方向に荷重が移動する場合の荷重分配の状態，床版厚，張出部の長さの荷重分配におよぼす影響および変断面桁の断面値の平均値を用いた定断面とした場合，ねじり剛度を無限大すなわちねじりによる変形が無視しえる場合について数値計算を行なって荷重分配性状を調べている。

2. 記　　号

a = 2主桁の中心から一主桁の中心までの距離
$\bar{a}$ = 張出部の長さ
E = ヤング率
$f_{P,X}$ = P, X による床版の単位幅の変形
G = せん断弾性係数
I_X = 一主桁の断面2次モーメント
I_T = 一主桁のねじり剛度
I_{XC} = 一主桁の標準断面2次モーメント
I_{TC} = 一主桁の標準ねじり剛度
I_P = 床版の単位幅当りの断面2次モーメント
l = スパン長
n = 分 割 数
P = 荷　　重
$W_{P,X}$ = P, X による曲げによる変形
X = 荷重分担力
$\delta_{P,X}$ = P, X による全体の変形
ηa = 一主桁の中心から荷重点までの距離
$\theta_{P,X}$ = P, X によるねじり角

3. 2主箱桁の荷重分担力の微分方程式

桁に偏心荷重が載荷されると Fig. 1 に示すように2つの桁が同じ変形をなす対称荷重 P_B と逆対称荷重 P_T とに分けられる。

$$P = P_B + P_T \qquad (1)$$

P_B はおのおのの主桁に曲げ変形を生じしめ，荷重の分担力に関係しない。P_T の荷重状態では2主桁の間にたがいに分担力が働いて，荷重を軽減しあうように作用している。近似的にはこの P_T の荷重状態を解析することによって荷重分配性状を解くことができるが，一般的には P の荷重状態の分担作用ではせん断力とモーメントが関係するので厳密には床版の中央が橋軸方向にヒンジ構造になっている構造物を対象としていることになる。

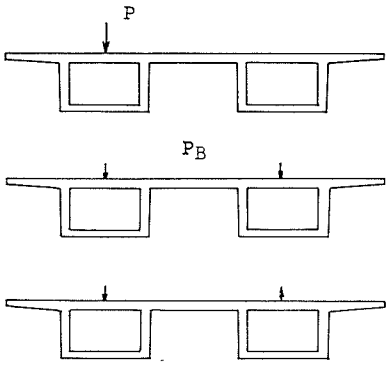

Fig. 1. Condition of loading

外力 P と分担力 X が作用すると P による曲げ変形 W_P，ねじり角による変形 $a\theta$ および単位幅当りの床版の曲げ変形 f_P が生ずる。同様に分担力 X によっても W_X, $a\theta$ および f_X が生ずる。床版中央点における P および X による全変形をそれぞれ δ_P, δ_X とすると

$$\delta_P = W_P + a\theta_P + f_P \tag{2}$$

$$\delta_X = W_X + a\theta_X + f_X \tag{3}$$

で表わされる。橋軸方向の任意の点 x における荷重 P と曲げ変形 W との関係は

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_X \frac{d^2 W_P}{dx^2}\right) = P(x) \tag{4}$$

であり，P による分布ねじりモーメントを m_{TP} とすると

$$m_{TP} = \eta a p(x) \tag{5}$$

であり

$$\frac{d}{dx}\left(GI_T \frac{d\theta_P}{dx}\right) = -m_{TP} \tag{6}$$

が成り立っている。床版の変形 f_P は

$$f_P = \frac{\alpha_P}{EI_P} P(x) \tag{7}$$

で表わされる。同様に $X(x)$ と変形との関係は

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_X \frac{d^2 W_X}{dx^2}\right) = X(x) \tag{8}$$

$$\frac{d}{dx}\left(GI_T \frac{d\theta_X}{dx}\right) = -a\,X(x) \tag{9}$$

$$f_X = \frac{\alpha_X}{EI_P} X(x) \tag{10}$$

で表わされる。床版の中央の切断点での荷重 P と分担力 X とによる変形の連続条件から

$$\delta_X + \delta_P = 0 \tag{11}$$

が成り立っているから

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_X \frac{d^2}{dx^2}\delta_X\right) = -\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_X \frac{d^2}{dx^2}\delta_P\right)$$

であり (2)～(10) 式を用いて上式を整理すると

$$\begin{aligned} X(x) - a^2 \frac{d^2}{dx^2}\left\{EI_X \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{GI_T}\int X\,dx\right)\right\} + \frac{d^2}{dx^2}\left\{EI_X \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\alpha_X}{EI_P} X\right)\right\} \\ = -P + a^2 \frac{d^2}{dx^2}\left\{EI_X \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{GI_T}\int \eta P\,dx\right)\right\} - \frac{d^2}{dx^2}\left\{EI_X \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\alpha_P}{EI_P}\right)\right\} \end{aligned} \tag{12}$$

であり，これが分担力 X を表わす微分方程式である。

4. 定断面，等分布荷重の場合の解析

定断面で橋軸方向に線荷重 P が分布する場合について解くと (12) 式より

$$X''''(\lambda) - 2t\,X''(\lambda) + s^2\,X(\lambda) = -s^2 P \tag{13}$$

ここで $\lambda = x/l$, $2t = a^2 l^2 EI_P/(\alpha_X GI_T)$, $s^2 = l^4 I_P/(\alpha_X I_X)$

一般の構造物では $s > t$ であるから，この場合の解は

$$X(\lambda) = -P(1+C_1\cosh\alpha\lambda\sin\beta\lambda+C_2\cosh\alpha\lambda\cos\beta\lambda$$
$$+C_3\sinh\alpha\lambda\cos\beta\lambda+C_4\sinh\alpha\lambda\sin\beta\lambda) \tag{14}$$

ここで $\alpha=\sqrt{(s+t)/2}$, $\beta=\sqrt{(s-t)/2}$

C_1, C_2, C_3, C_4 は境界条件より求まる

(1) 単純桁の場合

$\delta_P(0)+\delta_X(0)=0$ から

$$X(0) = -\gamma P \tag{15}$$

$\delta_P(1)+\delta_X(1)=0$ から

$$X(1) = -\gamma P \tag{16}$$

$\delta''_P(0)+\delta''_X(0)=0$ から

$$X''(0)-2tX(0) = 2t\eta P \tag{17}$$

$\delta''_P(1)+\delta''_X(1)=0$ から

$$X''(1)-2tX(1) = 2t\eta P \tag{18}$$

(15)〜(18) 式を解くと

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= A_1\left\{u(\gamma-1)\sin\beta-\xi\sinh\alpha\right\} \\ C_2 &= \gamma-1 \\ C_3 &= -A_1\left\{u(\gamma-1)\sinh\alpha+\xi\sin\beta\right\} \\ C_4 &= \xi/u \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} &u = \sqrt{s^2-t^2}, \qquad A_1 = (\cosh\alpha-\cos\beta)\Big/\left\{u(\sinh^2\alpha+\sin^2\beta)\right\} \\ &\xi = (1+\gamma-2\eta)t \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

(2) 固定桁の場合

$\delta_P(0)+\delta_X(0)=0$ から

$$X(0) = -\gamma P \tag{21}$$

$\delta_P(1)+\delta_X(1)=0$ から

$$X(1) = -\gamma P \tag{22}$$

$\delta'_P(0)+\delta'_X(0)=0$ から

$$X'(0)-t\left[P-1/s^2\left\{X'''(0)-2tX'(0)-X'''(1)+2tX'(1)\right\}\right] = -t\eta P \tag{23}$$

$\delta'_P(1)+\delta'_X(1)=0$ から

$$X'(1)+t\left[P-1/s^2\left\{X'''(0)-2tX'(0)-X'''(1)+2tX'(1)\right\}\right] = t\eta P \tag{24}$$

(21)〜(24) 式を解くと

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \left\{t(\eta-1)\sinh\alpha+\gamma_1\alpha(1-2t/s)\right\}\Big/A_2 \\ C_2 &= \gamma-1 \\ C_3 &= \left\{t(\eta-1)\sin\beta-\gamma_1\beta(1+2t/s)\right\}\Big/A_2 \\ C_4 &= (\gamma-1)(\mathrm{cosech}\,\alpha\,\mathrm{cosec}\,\beta-\coth\alpha\cot\beta)-C_1\coth\alpha-C_3\cot\beta \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= \alpha \sin\beta + \beta \sinh\alpha - 2t/s(\alpha \sin\beta - \beta \sinh\alpha) \\ \gamma_1 &= (\gamma-1)(\cosh\alpha - \cos\beta) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

(3) 片持ばりの場合

この場合でねじり剛度が大きい場合すなわち $t=0$ の場合について Mehmel が解析しているので，ここではねじり剛度を考慮した場合について扱っている。

$\delta_P(0)+\delta_X(0)=0$ から

$$X(0) = -\gamma P \tag{27}$$

$\delta'_P(0)+\delta'_X=0$ から

$$X'(0)-2t\left[P-1/s^2\left\{X'''(0)-2t\,X'(0)\right\}\right] = -2t\eta P \tag{28}$$

$\delta''_P(1)+\delta''_X(1)=0$ から

$$X''(1)-2t\,X(1) = 2t\eta P \tag{29}$$

$\delta'''_P(1)+\delta'''_X(1)=0$ から

$$X'''(1)-2t\,X'(1) = 0 \tag{30}$$

(27)～(30) 式を解くと

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \Big[t_1\left\{t_3 \sinh^2\alpha + u\alpha - \overline{C}(\alpha\varphi_1 - \beta\varphi_3)\right\} + \\ &\qquad + \overline{C}(\gamma-1)(t_2 \sin\beta\cos\beta + t_3 \sinh\alpha\cos\alpha)\Big]\Big/A_3 \\ C_2 &= \gamma-1 \\ C_3 &= \Big[t_1\left\{-t_2 \sin\beta + u\beta + C(\alpha\varphi_1 - \beta\varphi_3)\right\} \\ &\qquad + C(\gamma-1)(-t_2 \sin\beta\cos\beta - t_3 \sinh\alpha\cos\alpha)\Big]\Big/A_3 \\ C_4 &= \Big[t_1\left\{t_2 \sin\beta\cos\beta - t_3 \sinh\alpha\cosh\alpha - \varphi_4 t - u\varphi_2\right\} \\ &\qquad - C(\gamma-1)(t_2 \sin^2\beta - t\alpha) + \overline{C}(\gamma-1)(-t_3 \sinh^2\alpha + \beta t)\Big]\Big/A_3 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} A_3 &= 0.5\,u^2\left\{\cosh^2\alpha + \cos^2\beta + 2t/s(\cosh^2\alpha - \cos^2\beta)\right\} \\ &\qquad - C\beta t \sinh^2\alpha - \overline{C}\alpha t \sin^2\beta, \\ t_1 &= 2t(\eta-1), \quad t_2 = t\alpha + u\beta, \quad t_3 = -t\beta + u\alpha, \\ C &= (1+2t/s)\beta, \quad \overline{C} = (1-2t/s)\beta, \quad \varphi_1 = \cosh\alpha \sin\beta, \\ \varphi_2 &= \cosh\alpha\cos\beta, \quad \varphi_3 = \sinh\alpha\cos\beta, \quad \varphi_4 = \sinh\alpha\sin\beta \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

5. 2主変断面箱桁の荷重分担力の解析

とくにコンクリートを用いた2主箱桁橋では変断面の構造形式が多いので，この構造物での荷重分担力を差分方程式によって解析する。

任意標準断面の断面2次モーメント I_{xc}，ねじり剛度 $I_{\tau c}$ として無次元化して

$$i(\lambda) = \frac{I(\lambda)}{I_{xc}}, \qquad \bar{i}(\lambda) = \frac{I_{\tau c}}{I_\tau(\lambda)}$$

とおき，線荷重 P が橋軸方向に一定に載荷した場合 (12) 式は

$$(iX'')''-2t_C\left\{i(\bar{i}\int Xd\lambda)'\right\}''+s_C^2X=-s_C^2P+2\eta t_C\left\{i(\bar{i}\int Pd\lambda)'\right\}'' \tag{33}$$

で表わされる，展開して X について整理すると

$$\begin{aligned}&iX''''+2i'X'''+(i''-2t_Ci\bar{i})X''-2t_C(3i\bar{i}'+2i'\bar{i})X'\\&\quad+\left\{-2t_C(3i\bar{i}''+4i'\bar{i}'+i''\bar{i})+s_C^2\right\}X-2t_C(i\bar{i}'''+2i'\bar{i}''+i''\bar{i}')\int Xd\lambda\\&\quad=-s_C^2P+2\eta t_C\left\{(i''\bar{i}'+2i'\bar{i}''+i\bar{i}''')\int Pd\lambda+P(i''\bar{i}+4i'\bar{i}'+3i\bar{i}'')\right\}\end{aligned} \tag{34}$$

差分方程式に変換すると

$$W_{1,k}X_{k-2}+W_{2,k}X_{k-1}+W_{3,k}X_k+W_{4,k}X_{k+1}+W_{5,k}X_{k+2}+W_{6,k}\int Xd\lambda=Q_k \tag{35}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}W_{1,k}&=i_k-i_k'\\W_{2,k}&=-4i_k+2i_k'+i_k''-t_C(2i_k\bar{i}_k-3i_k\bar{i}_k'-2i_k'\bar{i}_k)\\W_{3,k}&=6i_k-2i_k''+2t_C(2i_k\bar{i}_k-3i_k\bar{i}_k''-4i_k'\bar{i}_k-i_k''\bar{i}_k)+s_C^2\\W_{4,k}&=-4i_k-2i_k'+i_k''-t_C(2i_k\bar{i}_k+3i_k\bar{i}_k'+2i_k'\bar{i}_k)\\W_{5,k}&=i_k+i_k'\\W_{6,k}&=-2t_C(i_k\bar{i}_k'''+2i_k'\bar{i}_k''+i_k''\bar{i}_k')\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$Q_k=-s_C^2P+2\eta t_C\left\{(i_k''\bar{i}_k'+2i_k'\bar{i}_k''+i_k\bar{i}_k''')\int Pd\lambda+P(i_k''\bar{i}_k+4i_k'\bar{i}_k+3i_k\bar{i}_k'')\right\}$$

$$\Delta\lambda=\lambda/n,\quad n:\text{分割数},\quad s_C^2=l^4I_P\Delta\lambda^4/(\alpha_XI_{XC})$$

$$2t_C=a^2l^2EI_P\Delta\lambda^2/(\alpha_XGI_{tC})$$

i_k', $\bar{i}_k'$ には $\Delta\lambda$, $i_k''\bar{i}_k''$ には $\Delta\lambda^2$, $\bar{i}_k'''$ には $\Delta\lambda^3$, $\int Xd\lambda$, $\int Pd\lambda$ には $1/\Delta\lambda$ をそれぞれかけたものを用いている。これが変断面桁の荷重分担力を表わす差分方程式である。

(1) 単純桁の場合

x の積分の項は Simpson の台形公式によって近似する。Fig. 2 に示すように n 分割する，境界条件は

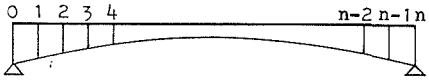

Fig. 2. Division of beam

$\delta_P(0)+\delta_X(0)=0$ から

$$X_0=-\gamma P \tag{37}$$

$\delta_P''(0)+\delta_X''(0)=0$ から

$$X_{-1}=-X_1+\beta_{t0}\int_{\Delta\lambda}^{1-\Delta\lambda}Xd\lambda-P\left\{\gamma(2+\beta_0+\beta_{t0})-\eta(\beta_0+\beta_{t0}/\Delta\lambda)\right\} \tag{38}$$

$\delta_P(1)+\delta_X(1)=0$ から

$$X_n=-\gamma P \tag{39}$$

$\delta_P''(1)+\delta_X''(1)=0$ から

$$X_{n+1}=-X_{n-1}-\beta_{tn}\int_{\Delta\lambda}^{1-\Delta\lambda}Xd\lambda-P\left\{\gamma(2+\beta_n-\beta_{tn})-\eta(\beta_n-\beta_{tn}/\Delta\lambda)\right\} \tag{40}$$

(35) 式の $k=1$ の場合に境界条件 (37) 式, (38) 式を代入すると

$$\begin{aligned}&\left\{W_{3,1}+W_{1,1}(\beta_{t0}-1)\right\}X_1+(W_{4,1}+W_{1,1}\beta_{t0})X_2+(W_{5,1}+W_{1,1}\beta_{t0})X_3\\&\quad+W_{1,1}\beta_0X_4\cdots\cdots W_{1,1}\beta_{t0}X_{n-1}+W_{6,1}\int Xd\lambda\\&\quad=Q_1+PW_{1,1}\left\{\gamma(2+\beta_0+\beta_{t0})-\eta(\beta_0+\beta_{t0}/\Delta\lambda)\right\}+\gamma W_{2,1}P\end{aligned} \tag{41}$$

同様に (35) 式の $k=2$ の場合に (37) 式を代入すると

$$W_{2,2}X_1+W_{3,2}X_2+W_{4,2}X_3+W_{5,2}X_4+W_{6,2}\int X\,d\lambda=Q_2+\gamma W_{1,2}P \tag{42}$$

(35) 式の $k=n-2$ の場合に (39) 式を代入すると

$$\begin{aligned}&W_{1,n-2}X_{n-4}+W_{2,n-2}X_{n-3}+W_{3,n-2}X_{n-2}+W_{4,n-2}X_{n-1}+W_{6,n-2}\int X\,d\lambda\\&\quad=Q_{n-2}+W_{5,n-2}\gamma P\end{aligned} \tag{43}$$

(35) 式の $k=n-1$ の場合に (39) 式, (40) 式を代入すると

$$\begin{aligned}&-\beta_{tn}W_{5,n}X_1-\beta_{tn}W_{5,n-1}X_2\cdots\cdots-\beta_{tn}W_{5,n-1}X_{n-2}\\&\quad+(W_{1,n-1}-\beta_{tn}W_{5,n-1})X_{n-3}+(W_{2,n-1}-\beta_{tn}W_{5,n-1})X_{n-2}\\&\quad+(W_{3,n-1}-\beta_{tn}W_{5,n-1})X_{n-1}+W_{6,n-1}\int X\,d\lambda\\&\quad=Q_{n-1}+PW_{5,n-1}\left\{\gamma(2+\beta_n-\beta_{tn})-\eta(\beta_n-\beta_{tn}/\Delta\lambda)\right\}+W_{4,n-1}\gamma P\end{aligned} \tag{44}$$

ここで

$$\beta_0=2t_C\bar{i}_0,\quad \beta_n=2t_C\bar{i}_n,\quad \beta_{t0}=0.5\,\beta_0(\bar{i}_0-\bar{i}_1)/\bar{i}_1,$$

$$\beta_{tn}=0.5\,\beta_n(\bar{i}_{n-1}-i_n)/\bar{i}_{n-1},\quad \int P=(k-0.5\,n),$$

$$W_{6,k}\int X\,d\lambda=0.5\,W_{6,k}(X_1+X_2\cdots\cdots X_{k-1}-X_{k+1}-X_{k+2}\cdots\cdots-X_{n-1}).$$

これらの積分の項 $W_{6,k}\int X\,d\lambda$ を除いた部分の x の係数をマトリックス表示すると

$$\begin{bmatrix}
W_{3,1}+W_{1,1}(\beta_{t0}-1), & W_{4,1}+W_{1,1}\beta_{tn}, & W_{5,1}+W_{1,1}\beta_{t0}, & W_{1,1}\beta_{t0}\cdots\cdots\cdots\cdots & & W_{1,1}\beta_{t0}\\
W_{2,2} & W_{3,2} & W_{4,2} & W_{5,2} & 0 & 0\\
W_{1,3} & W_{2,3} & W_{3,3} & W_{4,3} & W_{5,3} & 0\\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
0 & W_{1,n-3} & W_{2,n-3} & W_{3,n-3} & W_{4,n-3} & W_{5,n-1}\\
0 & & W_{1,n-2} & W_{2,n-2} & W_{3,n-2} & W_{4,n-2}\\
-\beta_{tn}W_{5,n-1} & & -\beta_{tn}W_{5,n-1} & W_{1,n-1}-\beta_{tn}W_{5,n-1}, & W_{2,n-1}-\beta_{tn}W_{5,n-1}, & W_{3,n-1}-W_{5,n-1}(\beta_{tn}+1)
\end{bmatrix}$$

$$=[A_1] \tag{45}$$

$W_{6,k}\int X\,d\lambda$ の x に関する係数をマトリックス表示すると,

$$0.5\begin{bmatrix}0 & -W_{6,1} & -W_{6,1}\cdots\cdots\cdots\cdots & -W_{6,1}\\ W_{6,2} & 0 & -W_{6,2} & -W_{6,2}\\ \vdots & & & \\ W_{6,n-1} & W_{6,n-1} & W_{6,n-1} & 0\end{bmatrix}=[A_2] \tag{46}$$

となる。

$$\left\{[A_1]+[A_2]\right\}[X]=[Q'] \tag{47}$$

より X が求められる。ここで $[Q']$ は $[Q]$ の $k=1, 2, n-2, n-1$ の項を (41), (42), (43), (44) の右辺の値に変えたものである。

(2) 固定桁の場合

$\delta_P(0)+\delta_X(0)=0$ から

$$X_0=-\gamma P \tag{48}$$

$\delta'_P(0)+\delta'_X(0)=0$ から

$$X_{-1} = X_1 + \beta_0 \int_{\Delta\lambda}^{1-\Delta\lambda} X d\lambda - \beta_0 P(\gamma - \eta/\Delta\lambda) \tag{49}$$

$\delta_P(1)+\delta_X(1)=0$ から

$$X_n = -\gamma P \tag{50}$$

$\delta'_P(1)+\delta'_X(1)=0$ から

$$X_{n+1} = X_{n-1} + \beta_n \int_{\Delta\lambda}^{1-\Delta\lambda} X d\lambda - \beta_n P(\gamma - \eta/\Delta\lambda) \tag{51}$$

(35) 式の $k=1$ について (48), (49) 式を代入すると,

$$\begin{aligned}&\left\{W_{3,1}+W_{1,1}(1+\beta_0)\right\} X_1 + (W_{4,1}+W_{1,1}\beta_0) X_2 + (W_{5,1}+W_{1,1}\beta_0) X_3 + W_{1,1}\beta_0 X_4 \\ &\quad + W_{1,1}\beta_0 X_{n-1} + W_{6,1}\int X d\lambda = Q_1 + W_{1,1}\beta_0 P(\gamma - \eta/\Delta\lambda) + W_{2,1}\gamma P\end{aligned} \tag{52}$$

(35) 式の $k=2$ について (48) 式を代入すると

$$W_{2,2}X_1 + W_{3,2}X_2 + W_{4,2}X_3 + W_{5,2}X_4 + W_{6,2}\int X d\lambda = Q_2 + W_{1,2}\gamma P \tag{53}$$

(35) 式の $k=n-2$ について (50) 式を代入すると

$$\begin{aligned}&W_{1,n-2}X_{n-4} + W_{2,n-2}X_{n-3} + W_{3,n-2}X_{n-2} + W_{4,n-2}X_{n-1} + W_{6,n-2}\int X d\lambda \\ &\quad = Q_{n-2} + W_{5,n-2}\gamma P\end{aligned} \tag{54}$$

(35) 式の $k=n-1$ について (50) 式, (51) 式を代入すると

$$\begin{aligned}&\beta_n W_{5,n-1} X_1 + \beta_n W_{5,n-1} X_2 \cdots\cdots \beta_n W_{5,n-1} X_{n-2} + (W_{1,n-1} + \beta_n W_{5,n-1}) X_{n-3} \\ &\quad + (W_{2,n-1} + \beta_n W_{5,n-1}) X_{n-2} + \left\{W_{3,n-1} + W_{5,n-1}(1+\beta_n)\right\} X_{n-1} + W_{6,n-1}\int X d\lambda \\ &\quad = Q_{n-1} + W_{4,n-1}\gamma P + \beta_n P(\gamma - \eta/\Delta\lambda) W_{5,n-1}\end{aligned} \tag{55}$$

$\int X d\lambda$ を除いた部分の x の係数をマトリックス表示すると

$$\begin{bmatrix} W_{3,1}+W_{1,1}(1+\beta_0), & W_{4,1}+W_{1,1}\beta_0, & W_{5,1}+W_{1,1}\beta_0, & W_{1,1}\beta_0 & \cdots\cdots\cdots\cdots & W_{1,1}\beta_0 \\ W_{2,2} & W_{3,2} & W_{4,2} & W_{5,2} & 0 & 0 \\ W_{1,3} & W_{2,3} & W_{3,3} & W_{4,3} & W_{5,3} & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 \quad W_{1,n-3} & W_{2,n-3} & W_{3,n-3} & W_{4,n-3} & & W_{5,n-3} \\ 0 & W_{1,n-2} & W_{2,n-2} & W_{3,n-2} & & W_{4,n-2} \\ \beta_n W_{5,n-1} & \beta_n W_{5,n-1} & W_{1,n-1} + \beta_n W_{5,n-1}, & W_{2,n-1} + W_{5,n-1}\beta_n, & & W_{3,n-1} + W_{5,n-1}(1+\beta_n) \end{bmatrix} = [A_3] \tag{56}$$

となる。

$$\left\{[A_3]+[A_2]\right\}[X] = [Q''] \tag{57}$$

$[A_2]$ は (46) と同じ, $[Q'']$ は $[Q]$ の $k=1, 2, n-2, n-1$ の項を (52), (53), (54), (55) 式の右辺の値に変えたものである。これによって固定桁の場合の X が求まる。

(3) 片持ばりの場合

$\delta_P(0)+\delta_X(0)=0$ から

$$X_0 = -\gamma P \tag{58}$$

$\delta'_P(0)+\delta'_X(0)=0$ から

$$X_{-1} = X_1 + 2\beta_0 \int_{\Delta\lambda}^{1} X d\lambda - \beta_0 P(\gamma - 2\eta/\Delta\lambda) \tag{59}$$

$\delta''_P(1)+\delta''_X(1)=0$ から

$$X_{n+1} = -X_{n-1} + X_n(2+\beta_n) + \beta_n \eta P \tag{60}$$

$\delta'''_P(1)+\delta'''_X(1)=0$ から

$$X_{n+2} = X_{n-2} - 2X_{n-1}(2+\beta_n) + X_n(2+\beta_n)^2 + \beta_n \eta P(2+\beta_n) \tag{61}$$

(35) 式の $k=1$ に対して (58), (59) 式を代入すると

$$\begin{aligned}&\left\{W_{3,1}+W_{1,1}(1+2\beta_0)\right\}X_1+\left\{W_{4,1}+2\beta_0 W_{1,1}\right\}X_2+\left\{W_{5,1}+2\beta_0 W_{1,1}\right\}X_3\\&\quad+2\beta_0 W_{1,1}X_4 \cdots\cdots \beta_0 W_{1,1}X_n + W_{6,1}\int X d\lambda\\&\quad= Q_1 + W_{1,1}\beta_0 P(\gamma - 2\eta/\Delta\lambda) + W_{2,1}\gamma P\end{aligned} \tag{62}$$

(35) 式の $k=2$ に対して (58) 式を代入すると

$$W_{2,2}X_1 + W_{3,2}X_2 + W_{4,2}X_3 + W_{5,2}X_4 + W_{6,2}\int X d\lambda = Q_2 + W_{1,2}\gamma P \tag{63}$$

(35) 式の $k=n-1$ に対して (60), (61) 式を代入すると

$$\begin{aligned}&W_{1,n-1}X_{n-3} + W_{2,n-1}X_{n-2} + X_{n-1}(W_{3,n-1} - W_{5,n-1})\\&\quad+\left\{W_{4,n-1}+W_{5,n-1}(2+\beta_n)\right\}X_n + W_{6,n-1}\int X d\lambda = Q_{n-1} - W_{5,n-1}\beta_n \eta P\end{aligned} \tag{64}$$

(35) 式の $k=n$ に対して (60), (61) 式を代入すると,

$$\begin{aligned}&(W_{1,n}+W_{5,n})X_{n-2}+\left\{W_{2,n}-W_{4,n}-2W_{5,n}(2+\beta_n)\right\}X_{n-1}\\&\quad+\left\{W_{3,n}+W_{4,n}(2+\beta_n)+W_{5,n}(2+\beta_n)^2\right\}X_n + W_{6,n}\int X d\lambda\\&\quad= Q_n - \left\{W_{4,n}+(\beta_n+2)W_{5,n}\right\}\eta\beta_n P\end{aligned} \tag{65}$$

$W_{6,k}\int X d\lambda$ の除いた部分の x の係数をマトリックス表示すると

$$\begin{bmatrix} W_{3,1}+W_{1,1}(1+2\beta_0), & W_{4,1}+W_{1,1}(1+2\beta_0), & W_{5,1}+2\beta_0 W_{1,1}, & 2\beta_0 W_{1,1} \cdots\cdots\cdots\cdots & & 2\beta_0 W_{1,1}, \beta_0 W_{1,1} \\ W_{2,2} & W_{3,2} & W_{4,2} & W_{5,2} & 0 & 0 \\ W_{1,3} & W_{2,3} & W_{3,3} & W_{4,3} & W_{5,3} & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & W_{1,n-2} & W_{2,n-2} & W_{3,n-2} & W_{4,n-2} & W_{5,n-2} \\ 0 & 0 & W_{1,n-1} & W_{2,n-1} & W_{3,n}+W_{5,n-1} & W_{4,n-1}+W_{5,n-1}(2+\beta_n) \\ 0 & & & W_{1,n}+W_{5,n}, & W_{2,n}-W_{4,n}-2W_{5,n}(2+\beta_n), & W_{3,n}+W_{4,n}(2+\beta_n)+W_{5,n}(2+\beta_n)^2 \end{bmatrix} = [A_4] \tag{66}$$

$W_{6,k}\int X d\lambda$ の x の係数をマトリックス表示すると

$$-\begin{bmatrix} 0.5\,W_{6,1} & W_{6,1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & W_{6,1} & 0.5\,W_{6,1} \\ 0 & 0.5\,W_{6,2} \quad W_{6,2} \cdots\cdots\cdots\cdots & W_{6,2} & 0.5\,W_{6,2} \\ \ddots & & & \\ 0 & 0.5\,W_{6,n-2} & W_{6,n-2} & 0.5\,W_{6,n-2} \\ 0 & & 0.5\,W_{6,n-1} & 0.5\,W_{6,n-1} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} = [A_5] \tag{67}$$

$$\left\{[A_4]+[A_5]\right\}[X]=[Q''']\tag{68}$$

ここで $[Q''']$ は $[Q]$ の $k=1, 2, n-1, n$ の項を (62), (63), (64), (65) 式の右辺の値に変えたものである。これで片持ばりの X が求まる。

6. 定断面の場合の荷重分配性状

2主箱桁の床版の中央の力の伝達をせん断力のみと考えて解析した3章を用いて，等分布線荷重が支間方向に載荷されている場合の支間中央における横断面方向の荷重分配を C_0，C_a で表示する。C_0 は Fig. 3 に示すように荷重が主桁2の中央に載荷された場合の主桁1の荷重分担を表わし

$$C_0=-0.5\,X_{\eta=0}\tag{69}$$

によって求められる。C_a は Fig. 4 に示すように主桁2のフランジの先端に荷重が載荷された場合の主桁1の荷重分担を表わし

$$C_a=-0.5\,X_{\eta=-1}\tag{70}$$

によって求められる。単純桁および固定桁の荷重分配 C_0, C_a について変数 $C_p=4\bar{a}^3 I_X/(3l^2 I_P)$, パラメーター $C_T=EI_X a^2/(G I_T l^2)$ によって図示した。片持ばりについては $C_p=0.002\sim0.05$, $C_T=0.02$ についての計算例を図示した。

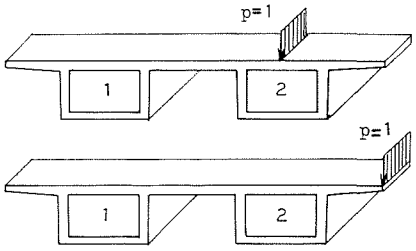

Fig. 3-4. Condition of loading

(1) 単純桁の場合

Fig. 5, 6 は (14) 式に (19) 式の定数を代入して解き，変数 C_p，パラメーター C_T によって荷重分担の影響線の値を示している。主桁1に関する荷重の分担の影響線の値は主桁1の $\eta=-1$ の点で $1-C_a$，主桁1の中央点で $1-C_0$，2主桁の中央点で 0.5，主桁2の中央点で C_0，主桁2の $\eta=1$ の点で C_a の値をそれぞれもっている。

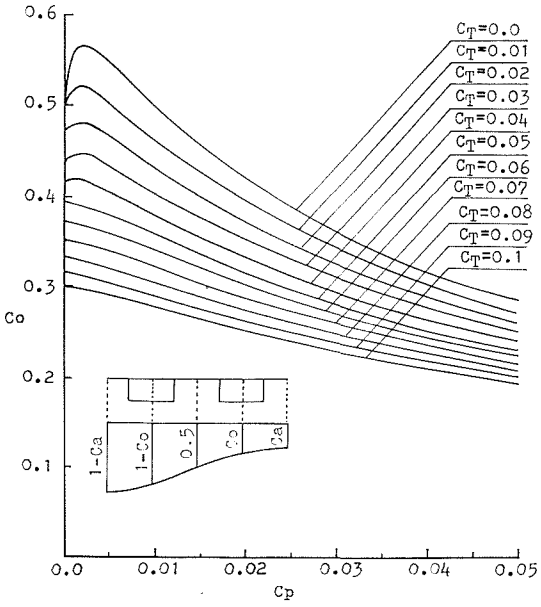

Fig. 5. Load distribution Co (simple beam)

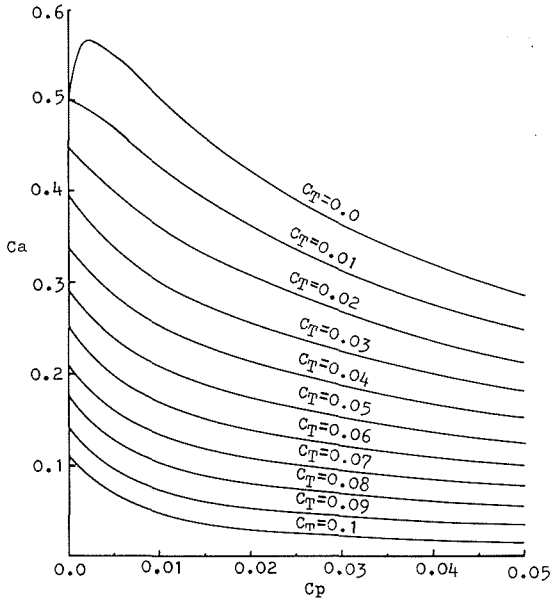

Fig. 6. Load distribution Ca (simple beam)

(2) 固定桁の場合

Fig. 7, 8 は (14) 式に (25) 式の定数を代入して解き，変数 C_p，パラメーター C_T によって (1) と同様に荷重分担の影響線の値 C_0, C_a を図示している。

(3) 片持ばりの場合

片持ばりの荷重分担力 X の形状は固定端で 0，自由端で 1 より大きい値をもつ，これを図にまとめても意味がないので X の形状を図示することにする。線荷重が主桁 1 の中心に載荷した場合の C_T=0.2 で C_p=0.002, 0.005, 0.01, 0.03, 0.05 の場合を図示した (Fig. 9)。

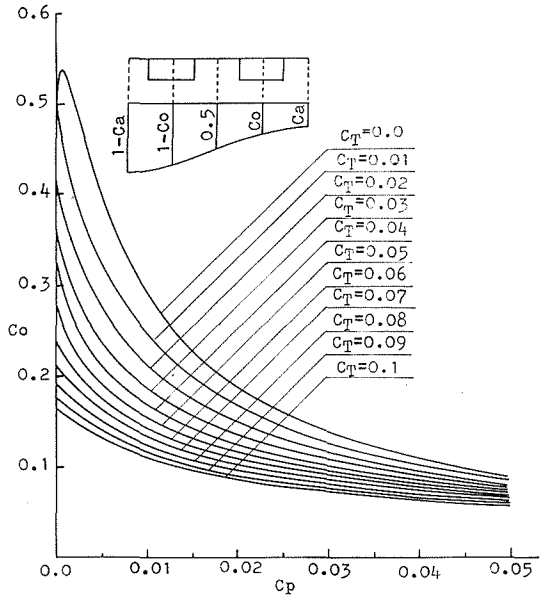

Fig. 7. Load distribution Co (fixed beam)

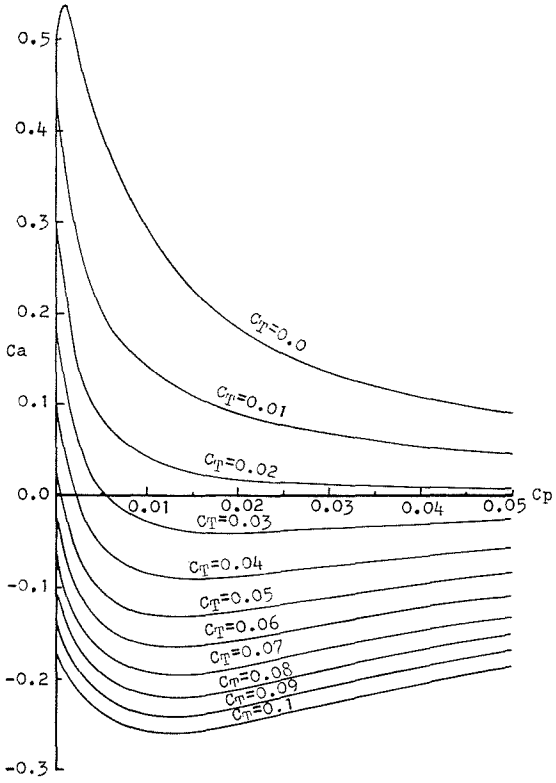

Fig. 8. Load distibution Ca (fixed beam)

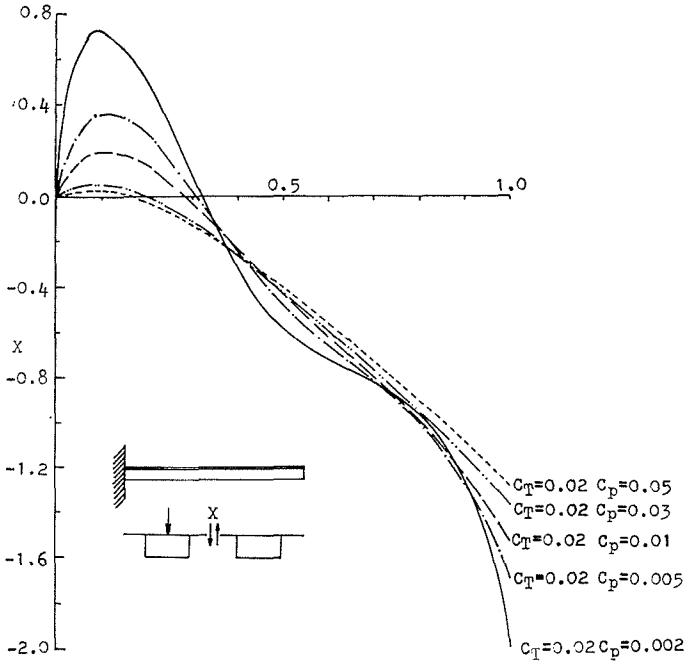

Fig. 9. Force of distribution X (cantilever)

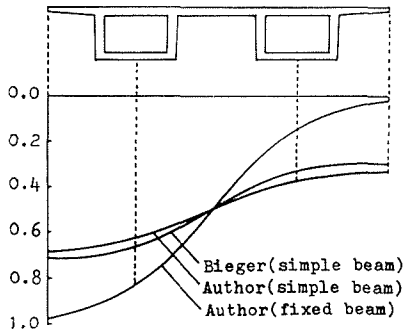

Fig. 10. Influence lines of load distribution

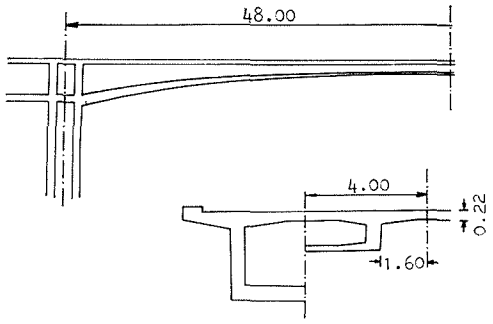

Fig. 11. General view (m)

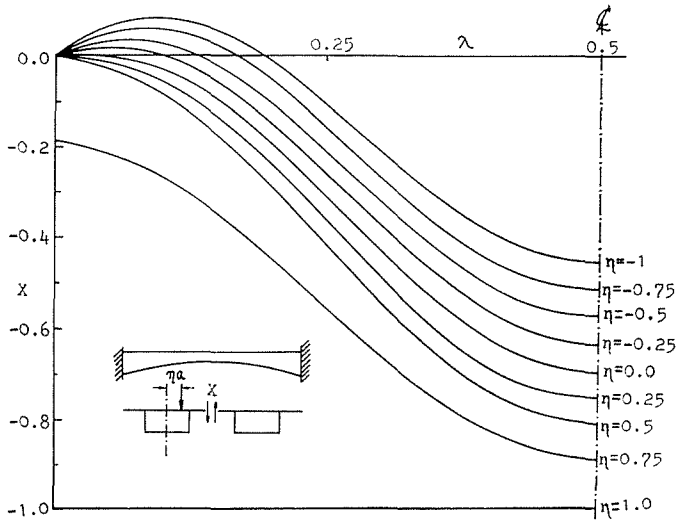

Fig. 12. Force of distribution

(4) 割増係数の数値計算

Fig. 10 のような断面の割増係数を計算してみる。スパン 30 m，断面 2 次モーメント $I_X=3.285\ \mathrm{m}^4$，$I_T=7.127\ \mathrm{m}^4$，床版厚 0.24 m，$a=4$ m，$I_P=0.001152\ \mathrm{m}^4/\mathrm{m}$，$E=300\ \mathrm{t/cm}^2$，$G=130\ \mathrm{t/cm}^2$ とすると $C_T=0.0189$，$C_p=0.0192$，Fig. 5, 6 より単純桁の場合 $C_0=0.38$，$C_a=0.32$，固定桁の場合 Fig. 7, 8 より $C_0=0.15$，$C_a=0.03$，Bieger[1] の図から単純桁の場合 $C_0=0.33$，$C_a=0.29$ が得られる，この Bieger の解は床版の伝達する力はせん断力とモーメントとしている。それぞれの割増係数は単純桁の場合 $\zeta=1.07$ (著者)，$\zeta=1.09$ (Bieger)，固安桁の場合 $\zeta=1.20$ (著者) となった。

7. 変断面の荷重分配性状

Fig. 11 に示すような固定桁の 2 主箱桁について荷重分配の性状を調べる。分割数は 48 分割にして計算を行なった。Fig. 12 は線荷重 $P=1$ が横方向に移動する場合のせん断力 X の値を図示している。Fig. 13 は Fig. 11 に示すような断面で張出部の長さ $\bar{a}$，床版厚 t のみを変化させたものである。Fig. 14 は Fig. 11 に示す実際の断面の場合と，断面 2 次モーメントの平均値，ねじり剛度の逆数の平均値を用いた定断面とした場合と，断面 2 次モーメントは変断面のままにしてねじり剛度を無限大にしした場合と比較している。

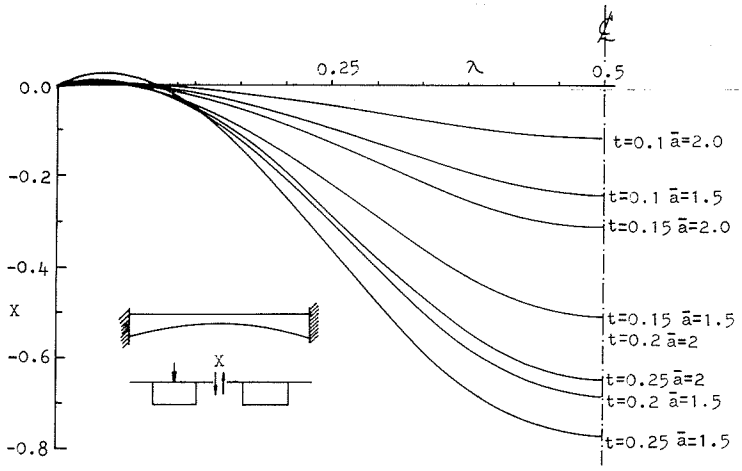

Fig. 13. Force of distribution (t and $\bar{a}$ is variable)

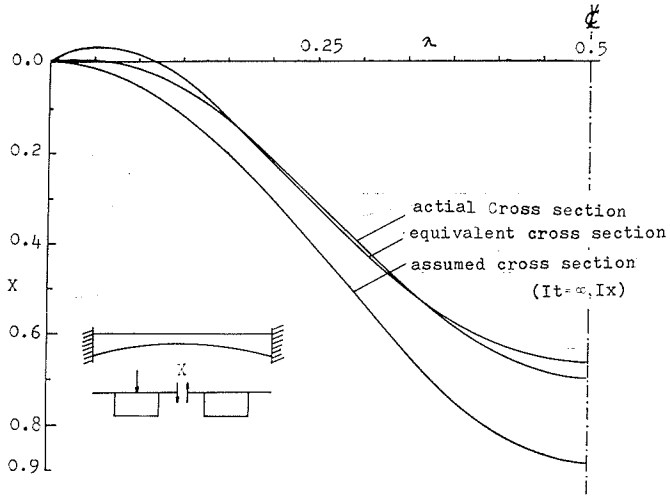

Fig. 14. Force of distribution ($\eta=0$)

8. 考察および結論

(1) 2主箱桁の床版の中央がヒンジで連結されているとみなされる構造の荷重分配について単純桁，固定桁，片持ばりの定断面で等分布荷重の場合の厳密解がえられた。

(2) 変断面桁の場合は差分方程式によって単純桁，固定桁，片持ばりについての荷重分担の解が明らかにされた。

(3) (1)によって単純桁，固定桁の場合の荷重分配について変数 C_p，パラメーター C_T によって割増係数の計算が容易になった。また Birger との差はあまりないことがわかった (Fig. 10)。片持ばりについては固定端付近で逆向きの分担力が生じ，自由端では1より大きい分担力が生じている，この性状は C_p が小さいほど著しく表われてくることがわかった (Fig. 9)。

(4) 変断面固定桁の荷重分配の性状についてまず線荷重が横方向に移動する場合のせん断力 X の分布が明らかにされ，η が負の場合支点付近で逆向きのせん断力の分布をすることがわかっ

た (Fig. 12)。荷重分配は床版厚 t, 張出部の長さ $\bar{a}$ によって影響されやすく t/a にほぼ比例してせん断力は大きくなっている (Fig. 13)。変断面の断面2次モーメントの平均とねじり剛度の逆数の平均の値をもつ定断面としてのせん断力 X と実際の断面とでは大差がないこと，ねじり剛度を無限大，すなわちねじり剛度の無視した場合とでは，かなりの差があることが明らかにされた (Fig. 14)。

(5) 差分方程式の解 (48分割) の精度は定断面の場合の厳密解と比較して非常によく一致した。Fig. 5, 6, 7, 8 の C_p 小さい場合 ($S \leqq$ t) は差分方程式の解を用いた。

参 考 文 献

1) Klaus-Wolfaeg Bieger: "Verberechnung zweistegiger Pattenbalken" Beton und Stahlbetonbau 8/1962.

2) G. Bratthauer und H. Kappei: "Zur qver Verteilung bei unsymmeterisch geraden und gekrümmten zweisten Plattenbalkenbrücken" Beton und Stahlbetonbau 12/1963.

3) Alfred mehmel und Hubert Beck: "Ein Beitrag zum Problem des zweistegigen symmetrischen Plattenbalken unter einseitiger Belastung"