HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	折板理論による曲線桁構造の応力解析とその特性について
Author(s)	芳村, 仁; 韮沢, 憲吉
Citation	北海道大學工學部研究報告, 68(1), 25-34
Issue Date	1973-09-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/41149
Type	bulletin (article)
File Information	68(1)_25-34.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

折板理論による曲線桁構造の応力解析とその特性について

芳村　仁*　韮沢憲吉*

(昭和48年3月23日受理)

Stresses of a Curved Girder analyzed by the Folded Plate Theory

Jin YOSHIMURA　Noriyoshi NIRASAWA

Abstract

At the present, curved bridges are generally analyzed using the elementary curved beam theory. The most important assumption underlying this theory is that the cross sections are not distorted transversely. Such an analysis may be inaccurate in some cases. The folded plate analysis, however, allows for cross-sectional distortions, hence the structural behavior can be interpreted more accurately.

In most cases, curved bridges can be considered as assemblies of cvrved plate, each of which is in general a segment of a conical frustum, Fig. 1. In this paper, a curved girder consisting of circular ring plates and cylindrical shells was treated as folded plate structure.

A numerical example is shown. The deflections, longitudinal stresses, bending moments of the curved girder were analyzed for six different acting points of a concentrated load. And a comparison is made with the stresses of a straight girder.

1. 序　　論

板状の構造部材を立体的に構成して力学的機能を高度化しようという考えは，鋼のような材料の発達と結びついて，いわゆる薄肉構造物を生み出した。例えばトラス構造は力の伝達が線状であるが，この薄肉構造はそれと異なり，板状部材によって面状に力の伝達が行なわれることに大きな特徴がある。そこで構造の厳密な解析には，構造を複数個の板の集合体ととらえることが必要となる。

さて，構造を構成する一つ一つの板（構造要素）をその接合から開放して，接合部で伝達していた内力と等価な力を作用させることによって，板内部の応力，変形状態を開放前と同じく保たせるとする。そうした場合，接合関係にあった板は，その接合端において同じ変形を起すはずである。変形と作用する力の間には関係がある筈であるから，この変位適合条件から作用させた力を知ることができる。それはすなわち，接合部分で伝達していた力である。従ってこの方法によれば複数個の板によって構成された複雑な構造も，結局，各々の板の解析に帰着する。これが折板理論の基本的な概念である。

* 土木工学科　構造力学講座

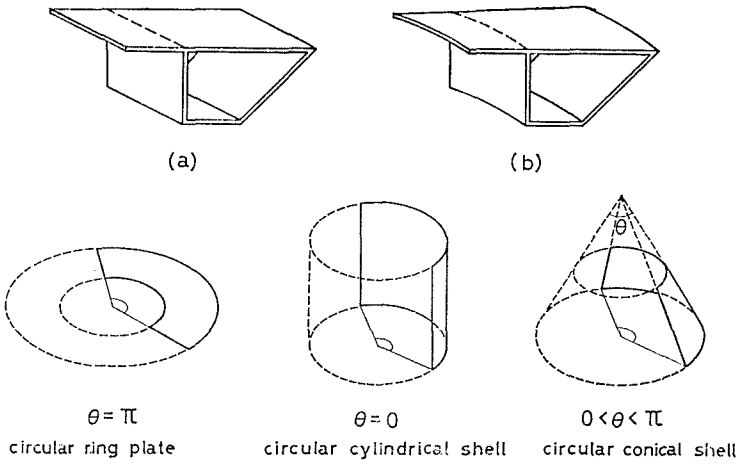

Fig. 1. simple folded plate structures and their constituent elements

では，その構造を構成する要素となる板には，いかなる種類の板があるかを Fig. 1 に示す。構造が直線の場合，(a) のようにすべて rectangular plate である。ところが円弧曲線形の場合では，(b) のようにスラブを構成するのは circular ring plate であり，ウェブを構成するのは，母線が回転方向に垂直か否かで，circular cylindrical shell と circular conical shell になる。普通一般に用いられる構造の要素は，これら 4 種に限られると考えてよいであろう。

本報告においては，これらの要素のうち circular ring plate と circular cylindrical shell によって構成される曲線桁構造を扱い，折板理論による解析法を示すとともに曲線桁構造の特性を論ずる。

ここで用いた主要な仮定は次のようなものである。

(1) 桁は両端単純支持であって，支持端においてはダイヤフラムによって断面を保持されているものとする。そのダイヤフラムは面内変形に対し無限大の剛性を有し，面外変形には剛性はないものとする。

(2) 構造材料は等質，等方性であり，線形弾性体である。

(3) 変形は微小である。

(4) 応力の伝達は板の中立面で考える。

2. Circular Ring Plate

座標を Fig. 2 のようにとり，面外変形と面内変形を互いに独立であるとすれば，基礎微分方程式は次のようになる。

$$\Delta\Delta F=0 \tag{1}$$

$$\Delta\Delta v_{zz}=\frac{l^3}{D}p_{zz} \tag{2}$$

ここに

$$\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

D: 板の曲げ剛性

p_{zz}: 板に垂直に作用している面荷重

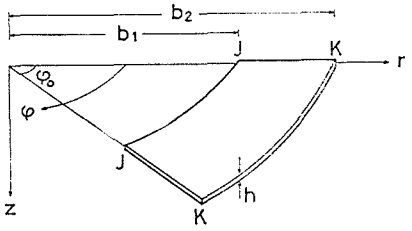

Fig. 2. co-ordinate system of circular ring plate

F: Airy の応力関数に板厚 lh をかけたもの

v_{zz}: 板のたわみを l で除した無次元変位

l: 任意の基準長

r: 半径方向の座標を l で除した無次元座標

微分方程式 (1) および (2) の解は，$\varphi=0$, $\varphi=\varphi_0$ で単純支持の条件を与えると

$$F=\sum^{n} El^3h(A_{1k\cdot n}r^{+\omega}+A_{2k\cdot n}r^{-\omega}+A_{3k\cdot n}r^{\omega+2}+A_{4k\cdot n}r^{-\omega-2})\sin\omega\varphi \tag{3}$$

$$v_{zz}=\sum^{n}(A_{1i\cdot n}r^{\omega}+A_{2i\cdot n}r^{-\omega}+A_{3i\cdot n}r^{\omega+2}+A_{4i\cdot n}r^{-\omega+2}+P_n)\sin\omega\varphi \tag{4}$$

ここで

$$\omega=\frac{n\pi}{\varphi_0}\qquad(n=1,\ 2,\ 3\ \cdots)$$

P_n は荷重 P_{zz} の分布形によってきまり

$$p_{zz}=p\sum f(n)\sin\omega\varphi \tag{5}$$

と級数展開されるとき

$$P_n=p\frac{l^3}{D}r^4\frac{f(n)}{(\omega+2)(\omega-2)(\omega+4)(\omega-4)} \tag{6}$$

である。板の断面力，変形は F または v_{zz} で表わされる筈であるから，(3), (4) 式の代入によって級数展開形に表わされる。

いま，境界 J–J, K–K に作用する曲げモーメント，直応力，せん断力，接線力の 4 種類の分布した力を考える。それらの力を X_{J1}, $X_{J2}\cdots X_{K4}$ と記号をつけ，それぞれに対応する変位を δ_{J1}, $\delta_{J2}\cdots\delta_{K4}$ と表わす。それらの力と変位の方向は，Fig. 3 のように定義する。ここで定義された境界力と境界変位を級数展開すると，それらの係数 $X_{J1\cdot n}$, $X_{J2\cdot n}\cdots X_{K4\cdot n}$, $\delta_{J1\cdot n}$, $\delta_{J2\cdot n}\cdots\delta_{K4\cdot n}$ は先の断面力，変位の級数展開式の係数との対応から次のようにマトリックスで表わされる。

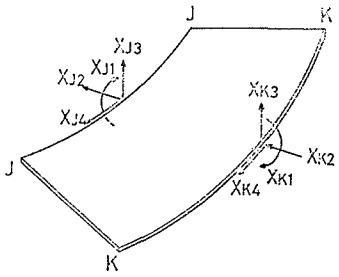

Fig. 3. edge forces of circular ring plate

(1) 面外変形について

$$\begin{Bmatrix}X_{J1\cdot n}\\X_{J3\cdot n}\\X_{K1\cdot n}\\X_{K3\cdot n}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{1\cdot n}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_{1i\cdot n}\\A_{2i\cdot n}\\A_{3i\cdot n}\\A_{4i\cdot n}\end{Bmatrix}\quad\text{又は}\quad\begin{Bmatrix}X_{i\cdot n}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{1\cdot n}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_{i\cdot n}\end{Bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{Bmatrix}\delta_{J1\cdot n}\\\delta_{J3\cdot n}\\\delta_{K1\cdot n}\\\delta_{K3\cdot n}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{1\cdot n}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_{1i\cdot n}\\A_{2i\cdot n}\\A_{3i\cdot n}\\A_{4i\cdot n}\end{Bmatrix}$$

あるいは

$$\begin{Bmatrix}\delta_{i\cdot n}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{1n}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_{i\cdot n}\end{Bmatrix} \tag{8}$$

(2) 面内変形について

$$\begin{Bmatrix} X_{J2\cdot n} \\ X_{J4\cdot n} \\ X_{K2\cdot n} \\ X_{K4\cdot n} \end{Bmatrix} = \Big[B_{2\cdot n}\Big] \begin{Bmatrix} A_{1k\cdot n} \\ A_{2\cdot kn} \\ A_{3\cdot kn} \\ A_{4\cdot kn} \end{Bmatrix}$$

あるいは

$$\Big\{X_{K\cdot n}\Big\} = \Big[B_{2\cdot n}\Big]\Big\{A_{k\cdot n}\Big\} \tag{9}$$

$$\begin{Bmatrix} \delta_{J2\cdot n} \\ \delta_{J4\cdot n} \\ \delta_{K2\cdot n} \\ \delta_{K4\cdot n} \end{Bmatrix} = \Big[C_{2\cdot n}\Big] \begin{Bmatrix} A_{1k\cdot n} \\ A_{2k\cdot n} \\ A_{3k\cdot n} \\ A_{4k\cdot n} \end{Bmatrix}$$

あるいは

$$\Big\{\delta_{K\cdot n}\Big\} = \Big[C_{2\cdot n}\Big]\Big\{A_{k\cdot n}\Big\} \tag{10}$$

ここで $[B_n]$, $[C_n]$ は (4×4) のマトリックスであって，断面力，変位の級数展開式に $r=b_1$, $r=b_2$ を代入して得られる。

(7) 式～(10) 式より

$$\Big\{\delta_{i\cdot n}\Big\} = \Big[C_{1\cdot n}\Big]\Big[B_{1\cdot n}\Big]^{-1}\Big\{X_{i\cdot n}\Big\} \tag{11}$$

$$\Big\{\delta_{k\cdot n}\Big\} = \Big[C_{2\cdot n}\Big]\Big[B_{2\cdot n}\Big]^{-1}\Big\{X_{k\cdot n}\Big\} \tag{12}$$

となる。

次に荷重 p_{zz} が作用する時は，境界 $r=b_1$, $r=b_2$ において曲げモーメントと（せん断力＋置換せん断力）が零であるという条件を適用すれば

$$\Big[B_{1\cdot n}\Big]\Big\{A_0\Big\} = p\,\frac{l^3}{D}\,f(n)\Big\{m_0\Big\} \tag{13}$$

という形に表わされ，その時の境界変位は

$$\begin{Bmatrix} \delta_{J1\cdot 0} \\ \delta_{J3\cdot 0} \\ \delta_{K1\cdot 0} \\ \delta_{K3\cdot 0} \end{Bmatrix} = p\,\frac{l^3}{D}\,f(n)\left[\Big[C_{1\cdot n}\Big]\Big[B_{1\cdot n}\Big]^{-1}\Big\{m_0\Big\} + \frac{1}{(\omega+2)(\omega-2)(\omega+4)(\omega-4)}\begin{Bmatrix} 4b_1^3 \\ -b_1^4 \\ 4b_2^3 \\ -b_2^4 \end{Bmatrix}\right] \tag{14}$$

となる。以上より，境界変位と境界力および荷重との関係は，１つのマトリックスで表わすと，次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \delta_{J1\cdot n} \\ \delta_{J2\cdot n} \\ \delta_{J3\cdot n} \\ \delta_{J4\cdot n} \\ \delta_{K1\cdot n} \\ \delta_{K2\cdot n} \\ \delta_{K3\cdot n} \\ \delta_{K4\cdot n} \end{Bmatrix} = \left[\bar{\delta}_n\right] \begin{Bmatrix} X_{J1\cdot n} \\ X_{J2\cdot n} \\ X_{J3\cdot n} \\ X_{J4\cdot n} \\ X_{K1\cdot n} \\ X_{K2\cdot n} \\ X_{K3\cdot n} \\ X_{K4\cdot n} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta_{J1\cdot 0} \\ 0 \\ \delta_{J3\cdot 0} \\ 0 \\ \delta_{K1\cdot 0} \\ 0 \\ \delta_{K3\cdot 0} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{15}$$

ここで $[\bar{\delta}_n]$ はいわゆる変位影響マトリックスである。

3. Circular Cylindrical Shell

座標を Fig. 4 のようにとり，r, z, h, ε および変位 v_{rr}, v_{zz}, $v_{\varphi\varphi}$ を任意の基準長 l で除された無次元量とすると，Donnell[1] によって与えられた変位で表わした平衡条件式は次のようになる。

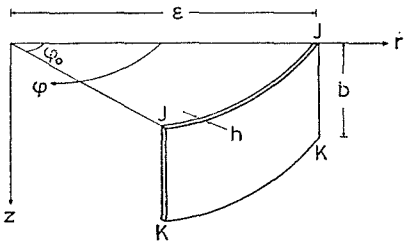

Fig. 4. co-ordinate system of circular cylindrical shell

$$\nabla^8 v_{rr} + \frac{12(1-\nu^2)}{\varepsilon^2 h^2}\frac{\partial^4 v_{rr}}{\partial z^4} = 0 \tag{16}$$

$$\nabla^4 v_{zz} = \frac{1}{\varepsilon}\left(-\nu\frac{\partial^3 v_{rr}}{\partial z^3} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^3 v_{rr}}{\partial z\,\partial\varphi^2}\right) \tag{17}$$

$$\nabla^4 v_{\varphi\varphi} = \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{-(2+\nu)\frac{\partial^3 v_{rr}}{\partial z^2\,\partial\varphi} - \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^3 v_{rr}}{\partial\varphi^3}\right\} \tag{18}$$

ここで

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \qquad \nabla^4 = \nabla^2\nabla^2$$

ν: ポアソン比

この微分方程式の解の形を

$$v_{rr} = Ae^{pz}\sin\omega\varphi \tag{19}$$

$$v_{zz} = Be^{pz}\sin\omega\varphi \tag{20}$$

$$v_{\varphi\varphi} = Ce^{pz}\cos\omega\varphi \tag{21}$$

と仮定すると (17), (18) 式から

$$B = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\nu p^2 + \omega^2/\varepsilon^2}{(p^2-\omega^2/\varepsilon^2)^2}pA \tag{22}$$

$$C = \frac{1}{\varepsilon}\frac{(2+\nu)p^2 - \omega^2/\varepsilon^2}{(p^2-\omega^2/\varepsilon^2)^2}\frac{\omega}{\varepsilon}A \tag{23}$$

となり，(16) 式から次式を得る。

$$\left(p^2 - \frac{\omega^2}{\varepsilon^2}\right)^4 + \frac{12(1-\nu^2)}{\varepsilon^2 h^2}p^4 = 0 \tag{24}$$

この式は p に関して8つの根をもつ。従って最終的に変位 v_{rr}, v_{zz}, $v_{\varphi\varphi}$ は，8つの任意定数 $A_{1n}\sim A_{8n}$ を含む級数式で表わされる。

$$v_{rr} = \sum^{n}(A_{1n}\sim A_{8n})\sin\omega\varphi \tag{25}$$

$$v_{zz}=\sum^{n}(A_{1n}\sim A_{8n})\sin\omega\varphi \tag{26}$$

$$v_{\varphi\varphi}=\sum^{n}(A_{1n}\sim A_{8n})\cos\omega\varphi \tag{27}$$

ここで $\varphi=0$ および $\varphi=\varphi_0$ の両端で単純支持されているものとして

$$\omega=\frac{n\pi}{\varphi_0}\qquad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

である。shell の断面力は，変位の関数であるから，(25)～(27)式同様に，任意定数を含む級数式で表わされる[2]。

いま circular cylindrical shell の場合も circular ring plate の場合と同様に，Fig. 5 のように境界力，境界変位を定義すれば断面力，変位の対応から

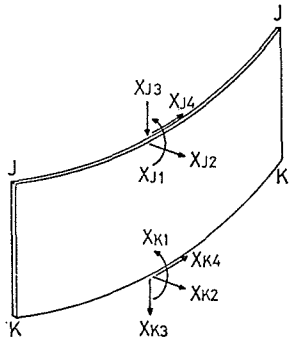

Fig. 5. edge forces of circular cylindrical shell

$$\begin{Bmatrix} X_{J1\cdot n}\\ X_{J2\cdot n}\\ \vdots\\ X_{K4\cdot n}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}B_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_{1n}\\ A_{2n}\\ \vdots\\ A_{8n}\end{Bmatrix}$$

あるいは

$$\{X_n\}=[B_n]\{A_n\} \tag{29・1}$$

$$\begin{Bmatrix}\delta_{J1\cdot n}\\ \delta_{J2\cdot n}\\ \vdots\\ \delta_{K4\cdot n}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_{1n}\\ A_{2n}\\ \vdots\\ A_{8n}\end{Bmatrix}$$

あるいは

$$\{\delta_n\}=[C_n]\{A_n\} \tag{29・2}$$

これより

$$\begin{aligned}\{\delta_n\}&=[C_n][B_n]^{-1}\{X_n\}\\ &=[\delta_n]\{X_n\}\end{aligned} \tag{30}$$

と circular cylindrieal shell の境界変位影響係数マトリックスが得られる。

4. 構造解析

Fig. 6 に示されるような構造を，その接合部から切離し，不静定力 X を導入する。この不静定力は，その接合端において釣合い状態にある。不静定力 X を級数展開し，その係数 X_n とその力による変位 δ_n の関係（境界変位影響係数マトリックス）は circular Ring plate および circular cylindrical shell について，それぞれ 2 章および 3 章において得られているから，構造全体の変形の適合条件を与えるには単に変位影響係数マトリックスを重ね合せればよいことになる。Fig. 6 のような構造の場合の変位適合条件マトリックスは Fig. 7 のように作られる。ここで○は二つの変位量の和，●は一つの変位量を表わしている。この変位適合条件マトリックス

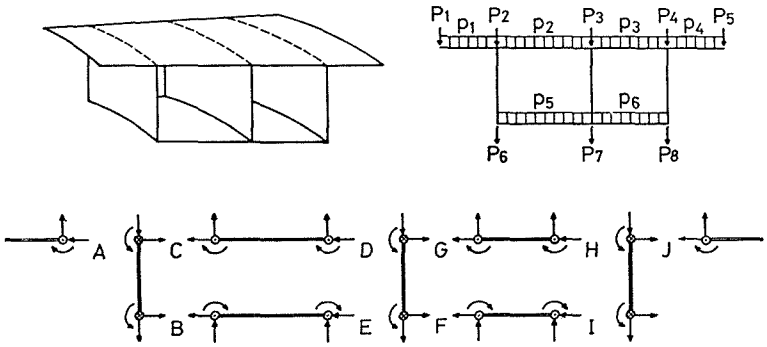

Fig. 6. curved girder bridge, its loads and unknown forces

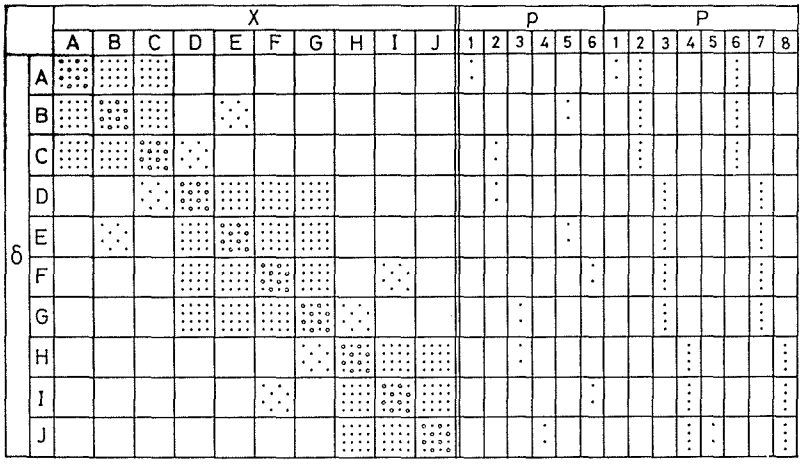

Fig. 7. edge displacement compatibility condition

を不静定力 X_n の係数マトリックスとして解けば，不静定力 X_n が決定される。以後は境界に力 X_n が作用した場合の板の問題となって，第2章および第3章の理論のもとに解析される。

5. 解　析　例

Fig. 8 に示すような4本主桁曲線桁構造を解析した例を示す。桁長を l として，断面諸元は図に示す通りとする。曲率半径は桁長 l の2倍とし，集中荷重 P が主桁の上および内側端，外側端に作用する6つの場合について計算を行なった。

5.1 桁のたわみ

載荷点の異なる6つの場合についての集中荷重による桁のたわみを Fig. 9 に示す。たわみ曲線の○印は載荷位置での値を意味している（以下の応力の曲線についても同じである）。曲線桁の場合，外側端部に載荷された場合 ⑥ のたわみが極端に大きな値を示し，他と比較して数倍から数十倍の値となる。

また，$R=\infty$ の場合，すなわち直線桁の場合のたわみも併せて示したが，これと比較すると一般に曲線桁の場合はたわみが大きいことが判かる。特に外側主桁に載荷された場合 ⑤ にその差がはっきりと現われている。

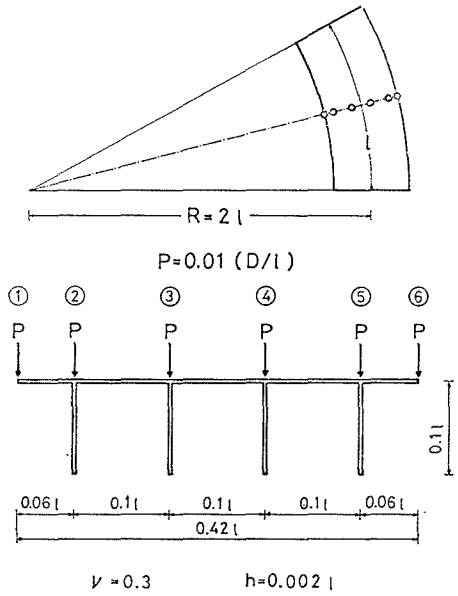

Fig. 8. example curved bridge; plan view, cross section and loads

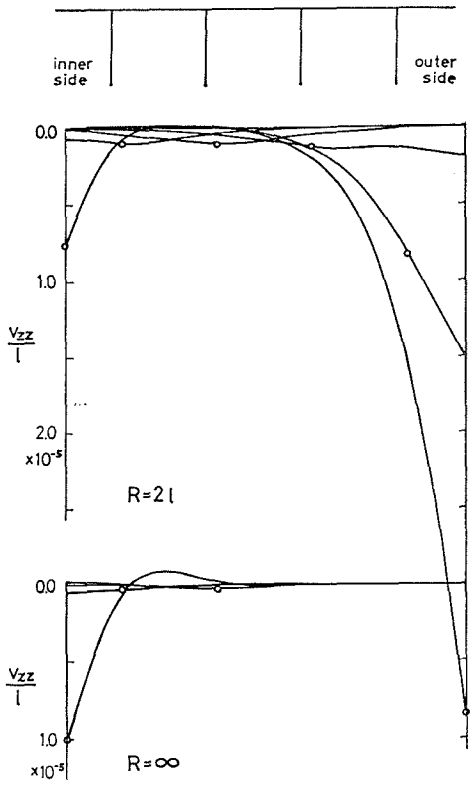

Fig. 9. deflections at midspan for each concentrated load

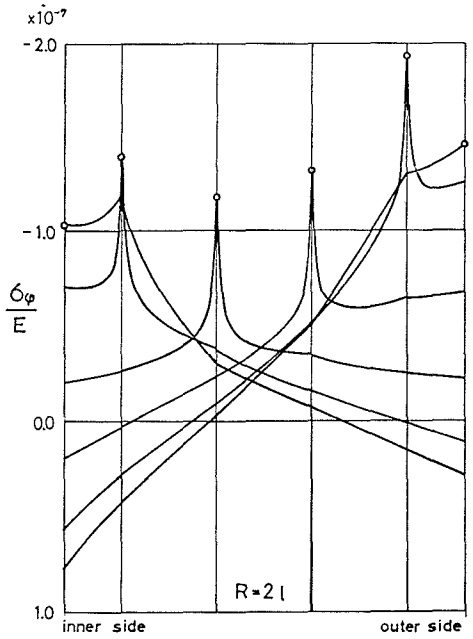

Fig. 10. longitudinal stresses in slabs at midspan for each concentrated load ($R=2\ell$)

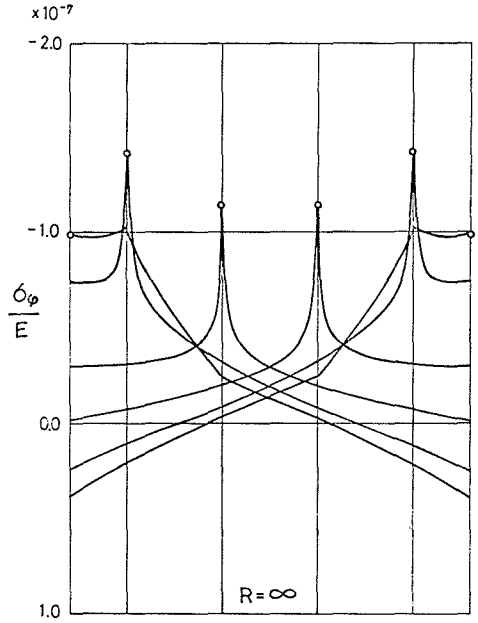

Fig. 11. longitudinal stresses in slabs at midspan for each concentrated load ($R=\infty$)

5.2　床版の直応力

床版の直応力 σ_φ の分布をそれぞれの場合について示す。曲線桁の場合が Fig. 10 であり，直線桁の場合は Fig. 11 である。集中荷重載荷の場合，分布荷重載荷の場合[3] と異なり，その載荷点において急なピークを示す。曲線桁の場合，載荷位置 ⑤ の場合が最大の圧縮応力を発生させるが，内側端部の床版に生ずる引張り応力は載荷位置 ⑥ の方が大きい。また曲線桁の方が大きな応力値を与えるが，大きな差はないことが判かる。

5.3　床版の曲げモーメント

床版断面内に発生する曲げモーメント M_r の分布を，曲線桁，直線桁について Fig. 12, Fig. 13 に示す。載荷位置は ②, ③, ④, ⑤ を考えた。曲げモーメント分布は，載荷点近傍以外においてはほぼ直線分布をなす。曲線桁の場合，載荷位置 ⑤ の場合が最大の値を示すが，直線桁と比較すると，どの載荷位置においても数倍から数十倍の差で曲線桁の M_r が大きい。このことは M_φ の分布についても同じである。

分布曲線は不連続な曲線となっているが，これは，その位置においてその差だけ主桁が曲げモーメントを担っていることを意味する。

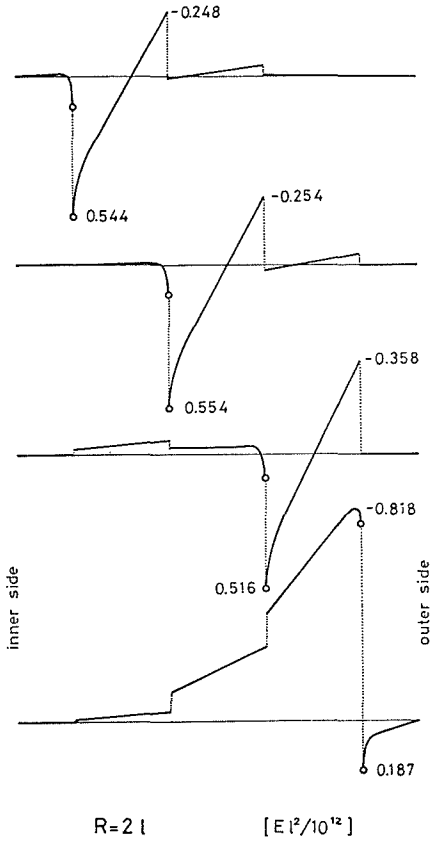

Fig. 12. bending mements Mr in cross section of slabs at midspan for each concentrated load (R=2ℓ)

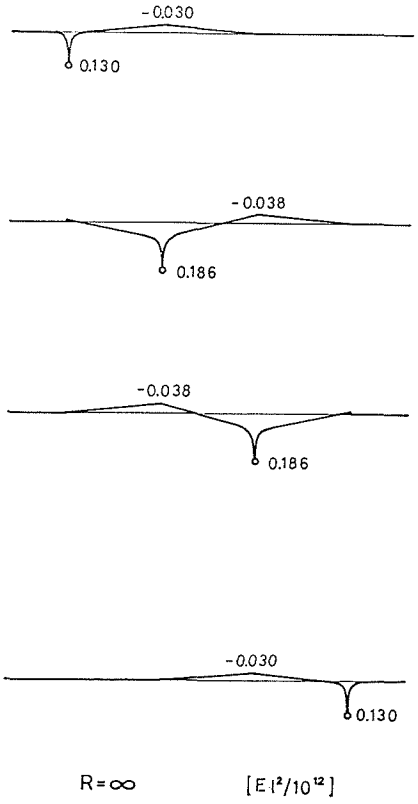

Fig. 13. bending moments Mr in cross section of slabs at midspan for each concentrated load (R=∞)

6. 結　　語

折板理論による曲線桁構造解析についてその概略を述べるとともに，実際に理論を適用して解析した結果を示し，曲線桁の応力特性についても触れた。

曲線構造は直線構造に比し，変形も応力状態も複雑でかつ，極端な差異を示す。従って直線構造の解析において従来行なわれてきた仮定が曲線構造を解析する際には必ずしも有効でないことに留意すべきである。

なお，この計算には北大大型計算機センターの FACOM 230-60 を使用した。

参 考 文 献

1) Donnell, L. H.: Stability of Thin Walled Tubes Under Torsion, NACA Technical Report, No. 479, 1933.

2) Hoff. N. J.: Boundary-Value Problems of the Thin-Walled Circular Cylinder, Jour. of Applied Mechanics, December 343, 1954.

3) 芳村　仁・韮沢憲吉：折板理論による曲線桁構造の解析（第2報）．土木学会第27回年次学術講演会講演概要集 I, 1972, p. 713.