HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	曲り梁と曲線スラブからなる構造の解析について
Author(s)	韮沢, 憲吉
Citation	北海道大學工學部研究報告, 68(1), 1-9
Issue Date	1973-09-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/41150
Type	bulletin (article)
File Information	68(1)_1-10.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

曲り梁と曲線スラブからなる構造の解析について

韮　沢　憲　吉*

(昭和48年3月23日受理)

On the Analysis of Structures Consisting of Curved Beams and Ring Plates

Noriyoshi NIRASAWA

Abstract

Curved bridges have become increasingly common in modern high way systems as a result of smooth traffic flow requirements. Hence, it is desirable to have a refined and more accurate method of analysis than the present elementary beam theory. This paper is one attempt to provide a more accurate analysis.

One of the most common curved girders consists of curved beams and ring plates as shown in Fig. 1. These curved beams and ring plates are combined together along combination lines, leading to the fact that the forces and displacements of the two constituent elements are continuous. From this condition the forces acting along combination lines can be solved.

In this paper, the equations defining the displacements of the curved beam with arbitrary cross sections under arbitrary loads and moments are developed. These expressions are presented from eq. (21) to eq. (26).

A numerical example illustrating the application of the method is shown. Some interesting results with respect to the effect of radius of a curvature were obtained, Fig. 9, 10.

1. 序　　論

陸上交通システムの発展に伴い，曲線橋の施工数も急激に増加しつつあるが，同時に，曲線橋の合理的な設計方法が要求されるとともに，桁の曲げ理論以上の厳密な解析が必要となっている。そこで曲線橋の構造としてよく使用される曲り梁と曲線スラブより構成されるところのFig. 1のような構造の解析を試みたので報告する。

この構造をその接合線に沿って切断すると，円弧曲線梁と円弧曲線スラブの2種類の構造要素に分れる。これらの構造要素の変形状態，応力状態を切断前と同様に保持されるためには，接合線に沿って存在していた内力と等価な外力を作用させればいいことになる。さらに，接合線に沿って接合していた構造要素は切断後も，その接合部分において互いに等しい変形を保持させる必要がある。この条件（変位適合

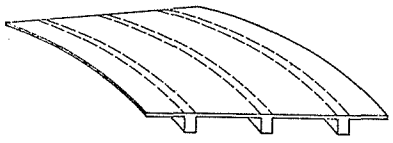

Fig. 1. curved girder consist of beams and plates

* 北海道大学工学部　土木工学科　助手

条件）を満足させることによって解析は構造全体から個々の構造要素へと進められる。以上が，構造解析方法の概略である。

解析にあたって次のような仮定をした。

(1) 構造は両端において単純支持され，ダイアフラムによって断面は保持されている。そのダイアフラムは面内変形に対して剛性無限大であるが，面外変形に対して剛性ゼロである。

(2) 材質は等質であり，線形弾性である。

(3) 変形は微小である。

(4) 梁とスラブの接合は，スラブの中立面の位置において考える。

2. 円弧曲線梁の理論

本章において3種類の分布荷重と3種類の分布モーメント荷重を担う任意断面の円弧曲線梁について変位に関する微分方程式を誘導する。またその梁の内部に発生する直応力式も求める。

2·1 座標，荷重，変位の定義

任意断面の円弧曲線梁の重心軸の半径を r とし，Fig. 2に示すような移動座標 (x, y, z) を定義する。曲線梁要素をとり出してその両端に作用している断面力 $(M_\varphi, M_z, M_t, Q, T, N)$，および重心軸に作用している分布荷重 (p, q, t)，分布モーメント荷重 (m_φ, m_z, m_t) を Fig. 3 のように定義する。また，重心軸の変位 (u, v, w) および角変位 (θ, ψ, κ) は Fig. 4 のように定義しておく。

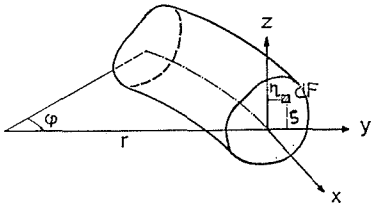

Fig. 2. co-ordinate system of curved beam

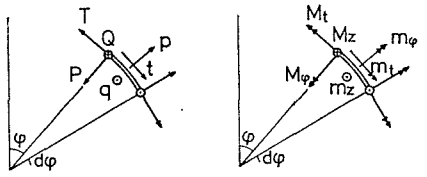

Fig. 3. forces and distributed loads, moments and distributed moments

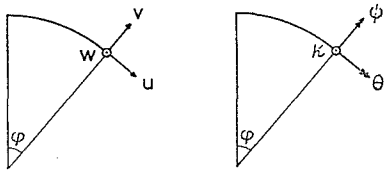

Fig. 4. displacements and slopes

2·2 断面力のつりあいと直応力

まず，円弧曲線梁要素のつりあい条件は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
&dT+P\,d\varphi+tr\,d\varphi=0\\
&dP-T\,d\varphi+pr\,d\varphi=0\\
&dQ+qr\,d\varphi=0\\
&dM_t+M_\varphi\,d\varphi+m_t r\,d\varphi=0\\
&dM_\varphi-M_t\,d\varphi-Qr\,d\varphi+m_\varphi r\,d\varphi=0\\
&dM_z+Pr\,d\varphi+m_z r\,d\varphi=0
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

始点 $\varphi=0$ における各々の断面力を，$T_0, P_0, Q_0, M_{t0}, M_{\varphi 0}, M_{z0}$ と記号すると，次式が求まる。

$$
\left.
\begin{aligned}
T &= T_0 \cos\varphi - P_0 \sin\varphi + \int_0^{\varphi} \left\{ pr \sin(\varphi-\lambda) - tr \cos(\varphi-\lambda) \right\} d\lambda \\
P &= P_0 \cos\varphi + T_0 \sin\varphi - \int_0^{\varphi} \left\{ pr \cos(\varphi-\lambda) + tr \sin(\varphi-\lambda) \right\} d\lambda \\
Q &= Q_0 - \int_0^{\varphi} qr\, d\lambda \\
M_t &= (M_{t0} + Q_0 r) \cos\varphi - M_{\varphi 0} \sin\varphi - Q_0 r \\
&\quad + \int_0^{\varphi} qr^2\, d\lambda - \int_0^{\varphi} (m_t r + qr^2) \cos(\varphi-\lambda)\, d\lambda \\
&\quad + \int_0^{\varphi} m_\varphi r \sin(\varphi-\lambda)\, d\lambda \\
M_\varphi &= (M_{t0} + Q_0 r) \sin\varphi + M_{\varphi 0} \cos\varphi \\
&\quad - \int_0^{\varphi} (m_t r + qr^2) \sin(\varphi-\lambda)\, d\lambda \\
&\quad - \int_0^{\varphi} m_\varphi r \cos(\varphi-\lambda)\, d\lambda \\
M_z &= M_{z0} - P_0 r \sin\varphi - T_0 r (1-\cos\varphi) \\
&\quad + \int_0^{\varphi} \left[pr^2 \sin(\varphi-\lambda) + tr^2 \left\{ 1 - \cos(\varphi-\lambda) \right\} \right] d\lambda \\
&\quad - \int_0^{\varphi} m_z r\, d\lambda
\end{aligned}
\right\} \qquad (2)
$$

これらの積分において，p, q, t, m_φ, m_z, m_t は積分変数 λ の関数と考えられる。

また，Fig. 4 の変位と角変位の間には

$$
\left.
\begin{aligned}
\psi &= -\frac{w'}{r} \\
\kappa &= \frac{1}{r}(v'-u)
\end{aligned}
\right\} \qquad (3)
$$

が成立する。ここで $'$ は φ に関する微分を意味する。

さらに，重心軸自身の伸びは

$$
\frac{du}{r d\varphi} + \frac{v}{r} = \frac{u'+v}{r} \qquad (4)
$$

となるので，梁の断面の平面要素 dF の位置の伸びを考える場合，Bernoulli の断面平面保持の仮定に従うと，重心軸の伸びと角変位 θ, $d\psi$, $d\kappa$ によって

$$
\varepsilon = \frac{1}{r+\eta} \left\{ u' + v - \zeta(\theta - \psi') - \eta\kappa' \right\} \qquad (5)
$$

となる。直応力 σ は，Hooke の法則より

$$
\sigma = E\varepsilon \qquad (6)
$$

と表わされるから，断面の任意の位置における直応力が，重心軸の変位によって表わされたことになる。

2·3　基礎微分方程式

梁の断面における内力と外力のつりあいによって

$$\left.\begin{aligned} T &= \int \sigma\, dF \\ M_\varphi &= \int \sigma\zeta\, dF \\ M_z &= -\int \sigma\eta\, dF \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

と表現される。ところで

$$\left.\begin{aligned} F &= \int dF \\ D &= \int \frac{\zeta\eta}{1+\eta/r}\, dF \\ J &= \int \frac{\eta^2}{1+\eta/r}\, dF \\ I &= \int \frac{\zeta^2}{1+\eta/r}\, dF \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

いう記号を定義すると

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{1}{r+\eta}\, dF &= \frac{1}{r}\left(F+\frac{J}{r^2}\right) \\ \int \frac{\zeta}{r+\eta}\, dF &= -\frac{D}{r^2} \\ \int \frac{\eta}{r+\eta}\, dF &= -\frac{J}{r^2} \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

となるから，(7) 式に (5), (6) 式を代入した結果は

$$\left.\begin{aligned} \frac{Tr^3}{E} &= (u'+v)(Fr^2+J)+r(\theta-\psi')D+r\kappa'J \\ \frac{M_\varphi r^2}{E} &= -(u'+v)D-r(\theta-\psi')I-r\kappa'D \\ \frac{M_z r^2}{E} &= (u'+v)J+r(\theta-\psi')D+r\kappa'J \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

となり，これを変位について解くと

$$u'+v = \frac{Tr-M_z}{EF} \tag{11}$$

$$\theta-\psi' = -\frac{M_\varphi r}{EJ_2}-\frac{M_z r}{EJ_1} \tag{12}$$

$$r\kappa' = v''-u' = \frac{M_\varphi r^2}{EJ_1}+\frac{M_z r^2}{EJ_3}-\frac{Tr-M_z}{EF} \tag{13}$$

ここで，記号 J_1, J_2, J_3 は

$$\left.\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{D}(IJ-D^2) \\ J_2 &= \frac{1}{J}(IJ-D^2) \\ J_3 &= \frac{1}{I}(IJ-D^2) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

である。

また, Fig. 4 から重心軸の要素 $r\,d\varphi$ のねじり角の増分 $d\theta+\psi\,d\varphi$ はねじりモーメント M_t によって決まるから次のようにおく。

$$\theta'+\psi=\frac{M_t r}{GK} \tag{15}$$

ここに, GK は同断面の直棒のねじり剛性で近似する。

さて, (11) 式と (13) 式より, u, v のいずれかを消去すると

$$v''+v=\frac{M_\varphi r^2}{EJ_1}+\frac{M_z r^2}{EJ_3} \tag{16}$$

$$u'''+u'=-\frac{M_\varphi r^2}{EJ_1}-\frac{M_z r^2}{EJ_3}+\frac{Tr+T''r-M_z-M_z''}{EF} \tag{17}$$

次に (12) 式と (15) 式より, ψ, θ のいずれかを消去して

$$\theta''+\theta=-\frac{M_\varphi r}{EJ_2}-\frac{M_z r}{EJ_1}+\frac{M_t' r^2}{GK} \tag{18}$$

$$\psi''+\psi=\frac{M_\varphi' r}{EJ_2}+\frac{M_z' r}{EJ_1}+\frac{M_t r^2}{GK} \tag{19}$$

となる。ここで

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{d\varphi}\int_0^\varphi f(\lambda)\cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda&=-\int_0^\varphi f(\lambda)\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda+f(\varphi)\\ \frac{d}{d\varphi}\int_0^\varphi f(\lambda)\sin(\varphi-\lambda)\,d\lambda&=\int_0^\varphi f(\lambda)\cos(\varphi-\lambda)\,d\lambda\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

を考慮して (2) 式で表わされている T, M_t, M_φ, M_z を (16) 式〜(19) 式に代入してやれば, v, u, θ, ψ に関する微分方程式が得られる。すなわち

$$\begin{aligned}&\frac{d^6u}{d\varphi^6}+2\frac{d^4u}{d\varphi^4}+\frac{d^2u}{d\varphi^2}\\&=r\left\{\frac{r^2}{EJ_1}\left(\frac{dm_t}{d\varphi}+r\frac{dq}{d\varphi}+\frac{d^2m_\varphi}{d\varphi^2}\right)\right.\\&\quad-\frac{r^2}{EJ_3}\left(r\frac{dp}{d\varphi}+rt-m_z-\frac{d^2m_z}{d\varphi^2}\right)\\&\quad\left.-\frac{1}{EF}\left(rt+2r\frac{d^2t}{d\varphi^2}+r\frac{d^4t}{d\varphi^4}-m_z-2\frac{d^2m_z}{d\varphi^2}-\frac{d^4m_z}{d\varphi^4}\right)\right\}\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d^5v}{d\varphi^5}+2\frac{d^3v}{d\varphi^3}+\frac{dv}{d\varphi}\\&=r^3\left\{-\frac{1}{EJ_1}\left(\frac{dm_t}{d\varphi}+r\frac{dq}{d\varphi}+\frac{d^2m_\varphi}{d\varphi^2}\right)\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{EJ_3}\left(r\frac{dp}{d\varphi}+rt-m_z-\frac{d^2m_z}{d\varphi^2}\right)\right\}\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d^5\theta}{d\varphi^5}+2\frac{d^3\theta}{d\varphi^3}+\frac{d\theta}{d\varphi}\\&=r^2\left\{\frac{1}{EJ_2}\left(r\frac{dq}{d\varphi}+\frac{dm_t}{d\varphi}+\frac{d^2m_\varphi}{d\varphi^2}\right)\right.\\&\quad-\frac{1}{EJ_1}\left(r\frac{dp}{d\varphi}+rt-m_z-\frac{d^2m_z}{d\varphi^2}\right)\\&\quad\left.+\frac{1}{GK}\left(r\frac{dq}{d\varphi}-\frac{d^3m_t}{d\varphi^3}+\frac{d^2m_\varphi}{d\varphi^2}\right)\right\}\end{aligned} \tag{23}$$

$$\frac{d^5\psi}{d\varphi^5}+2\frac{d^3\psi}{d\varphi^3}+\frac{d\psi}{d\varphi}$$
$$=r^2\left\{-\frac{1}{EJ_2}\left(r\frac{d^2q}{d\varphi^2}+\frac{d^2m_t}{d\varphi^2}+\frac{d^3m_\varphi}{d\varphi^3}\right)\right.$$
$$+\frac{1}{EJ_1}\left(r\frac{d^2p}{d\varphi^2}+r\frac{dt}{d\varphi}-\frac{dm_z}{d\varphi}-\frac{d^3m_z}{d\varphi^2}\right)$$
$$\left.+\frac{1}{GK}\left(rq-\frac{d^2m_t}{d\varphi^2}+\frac{dm_\varphi}{d\varphi}\right)\right\} \tag{24}$$

また，w と κ については，(3) 式の関係から

$$\frac{d^6w}{d\varphi^6}+2\frac{d^4w}{d\varphi^4}+\frac{d^2w}{d\varphi^2}$$
$$=r^3\left\{\frac{1}{EJ_2}\left(r\frac{d^2q}{d\varphi^2}+\frac{d^2m_t}{d\varphi^2}+\frac{d^3m_\varphi}{d\varphi^3}\right)\right.$$
$$-\frac{1}{EJ_1}\left(r\frac{d^2p}{d\varphi^2}+r\frac{dt}{d\varphi}-\frac{dm_z}{d\varphi}-\frac{d^3m_z}{d\varphi^3}\right)$$
$$\left.-\frac{1}{GK}\left(rq-\frac{d^2m_t}{d\varphi^2}+\frac{dm_\varphi}{d\varphi}\right)\right\} \tag{25}$$

$$\frac{d^6\kappa}{d\varphi^6}+2\frac{d^4\kappa}{d\varphi^4}+\frac{d^2\kappa}{d\varphi^2}$$
$$=-\frac{r^2}{EJ_1}\left(\frac{d^3m_t}{d\varphi^3}+\frac{dm_t}{d\varphi}+r\frac{d^3q}{d\varphi^3}+r\frac{dq}{d\varphi}+\frac{d^4m_\varphi}{d\varphi^4}+\frac{d^2m_\varphi}{d\varphi^2}\right)$$
$$+\frac{r^2}{EJ_3}\left(r\frac{d^3p}{d\varphi^3}+r\frac{dp}{d\varphi}+r\frac{d^2t}{d\varphi^2}+rt-m_z-2\frac{d^2m_z}{d\varphi^2}+\frac{d^4m_z}{d\varphi^4}\right)$$
$$+\frac{1}{EF}\left(rt+2r\frac{d^2t}{d\varphi^2}+r\frac{d^4t}{d\varphi^4}-m_z-2\frac{d^2m_z}{d\varphi^2}-\frac{d^4m_z}{d\varphi^4}\right) \tag{26}$$

と得られる。以上で，円弧曲線梁の重心軸の変位に関する一般的な微分方程式が誘導できたことになる。

2·4 矩形断面円弧曲線梁

Fig. 5 に示すような矩形断面の梁の場合には，$D=0$ であるから $1/J_1=0$ となり，J_2, J_3 はそれぞれ次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}J_2&=\int\frac{\zeta^2}{1+\eta/r}\,dF=\frac{rH^3}{12}\log\frac{r+B}{r-B}\\ J_3&=\int\frac{\eta^2}{1+\eta/r}\,pF=H\left(r^3\log\frac{r+B}{r-B}-2Br^2\right)\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

いま，重心軸と離れた点 $(\pm B, e)$ を考えると，この点に作用する力は重心軸上の荷重に変換され，その点の変位もまた重心軸の変位に変換される。そして重心軸上の荷重と変位の関係は (21) 式～(26) 式に表わされている。従って，これより，重心軸以外の点に作用する力によって，重心軸以外の変位も得られることがわかる。また，梁の任意の点に生じる直応力も (5) 式，(6) 式より得られる。

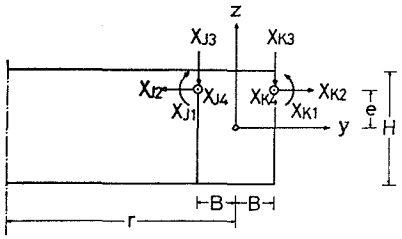

Fig. 5. curved beam with rectangular section

3.　円弧曲線スラブの理論

Fig. 6 のような円孤曲線スラブの応力，変形状態は，面外変形と面内変形が互いに独立であるとすると

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Delta v_{zz} &= \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3}\, p_{zz} \\ \Delta\Delta F &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

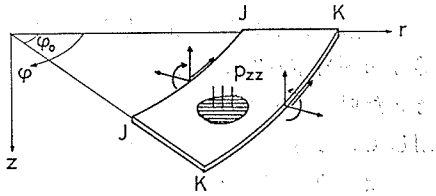

Fig. 6. circular ring plate

と表現される。ここで，v_{zz} はスラブのたわみ，p_{zz} はスラブに垂直に作用する分布荷重強度，$12(1-\nu^2)/Eh^3$ はスラブの曲げ剛性，F は Airy の応力関数であって，Δ は

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \qquad (29)$$

である。これらの微分方程式の解は，$\omega = n\pi/\varphi_0 \neq 0$, $\omega \neq 1$ として

$$v_{zz} = \sum^{n} \left\{ A_{1n} r^{+\omega} + A_{2n} r^{-\omega} + A_{3n} r^{\omega+2} + A_{n4} r^{-\omega+2} + P(n) \right\} \sin \omega\varphi \qquad (30)$$

$$F = \sum^{n} \left\{ B_{1n} r^{+\omega} + B_{2n} r^{-\omega} + B_{3n} r^{\omega+2} + B_{n4} r^{-\omega+2} \right\} \sin \omega\varphi \qquad (31)$$

ここで，$n=1, 2, 3\cdots$ で，$P(n)$ は荷重 p_{zz} の分布によって決まり

$$p_{zz} = p \sum^{n} f(n) \sin \omega\varphi \qquad (32)$$

と級数展開される場合

$$P = p\,\frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3}\, r^4\, \frac{f(n)}{(\omega+2)(\omega-2)(\omega+4)(\omega-4)} \qquad (33)$$

である。この解を用いることによって，境界面 $J-J$, $K-K$ に作用する力および荷重 p_{zz} による境界の変形は求められる。

4.　構造全体の解析

円弧曲線桁構造を，曲線梁と曲線スラブに切断し Fig. 7 のように不静定力を作用させる。この不静定力 X は，曲げモーメント，せん断力，直応力，接線力の4種類である。ところで，曲線梁にこれらの不静定力が作用した場合の接合部における変形は2章の理論から得られ，曲線スラブにこれらの不静定力が作用した場合の接合部での変形も3章の理論より得られるから，あとは，それらの変形（3方向の変位と回転角の合わせて4種類の変形）をそれぞれの接合線の全長にわたって一致させていけばよいことになる。その手順は結局，不静定力を未知数とする $\{4\times(\text{接合部の数})\}$ 元の連立方程式を解くことになるわけである

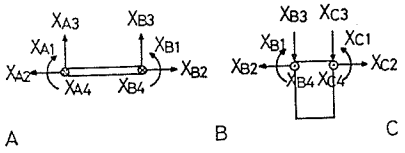

Fig. 7. unknown forces

不静定力 X が上記の方法から得られるならば，構造全体の解析は一つ一つの構造要素の解析の段階となり，それは，2章，3章の理論の下で行われる。

5. 解析例

Fig. 8 に示された断面をもつ曲線桁構造を解析した例を示す。材料は 2.5 t/m³ のものと考え等分布面荷重 0.35 t/m² がスラブ全域にわたって作用しているものとすれば，構造要素に分けて考えた場合，曲線梁上に 1.71 t/m の等分布線荷重，曲線スラブに 0.85 t/m² の等分布面荷重が作用しているものと考えられる。桁長は 20 m，ポアソン比は 0 とした。

開き角 φ_0 を 10° から 80° まで変化させた場合の桁の中央断面のたわみを示すと，Fig. 9 のようになる。また，$\varphi_0=60°$ と $\varphi_0=30°$ の場合の桁中央断面の直応力分布 σ^{φ} を示すと Fig 10 のようになる。この図で一部が不連続な曲線となっているのは，適合条件をスラブの中立面においてとっているので，そこから離れた点においては誤差がわずかに表われるためである。

これらの図から，曲線構造の場合，外側にいけばいくほど，また曲線が大きくなればなるほど，変形や応力が大きくなることがわかる。

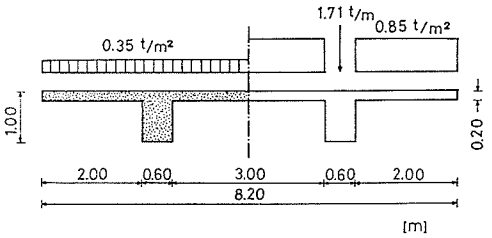

Fig. 8. cross section of example girder

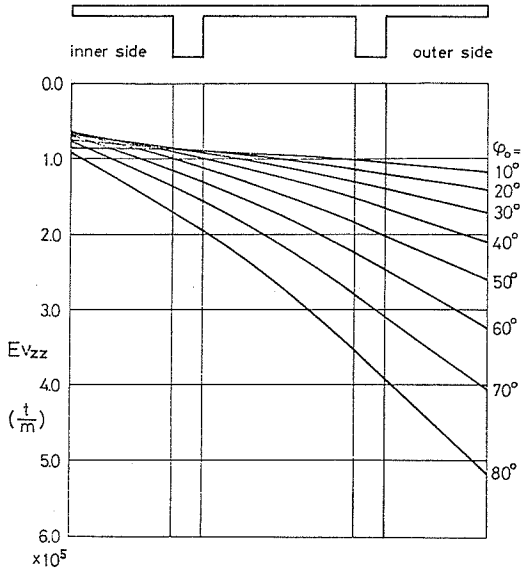

Fig. 9. transverse variation of deflection at midspan

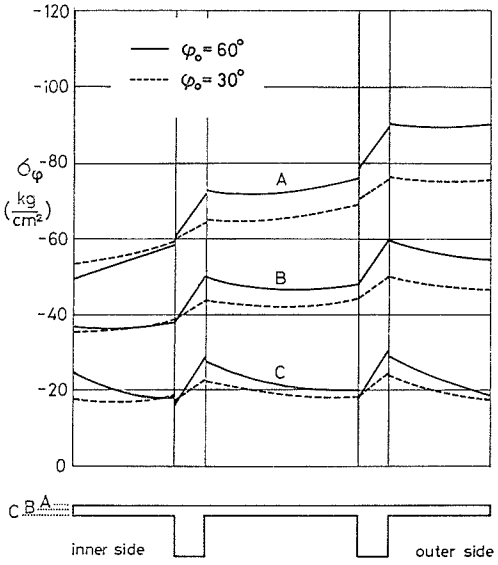

Fig. 10. transverse variation of longitudinal stresses in slabs at midspan

6. 結語

曲線梁と曲線スラブによって構成される構造の解析について述べた。一般に曲線構造は直線構造より複雑な変形状態，応力状態をひきおこすため，直線構造以上の厳密な構造解析が要求される。本報告は，その要求に一つの方向を与えるものと考えている。

おわりに，この研究にご指導いただいた芳村　仁教授に厚く感謝の意を表すものである。
計算は北大大型計算機センターの FACOM 230-60 によった。

参 考 文 献

1) Odqvist, F. K. G.: Theorie der elastischen Ringe starker Krümmung, Ingenieur-Arch. 22, 1954, p. 343.
2) Björklund, A.: Beitrag zur Theorie der elastischen Ringe mit Berücksichtigung der Wölbbehinderung, Ingenieur-Arch. 23, 1955, p. 421.
3) Rüdiger, D.: Die strenge Theorie der Faltwerke konstanter Krümmung, Öst. Ingenieur-Arch. 11/1, 1956, p. 5.