



Title	誘電体とフェライトを部分的に含む軸方向スロットを切った導波管の漏洩波および表面波の伝搬定数
Author(s)	伊藤, 精彦; 大木, 一夫; 宮岸, 修; 松本, 正
Citation	北海道大學工學部研究報告, 69, 95-105
Issue Date	1973-11-15
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/41167
Type	bulletin (article)
File Information	69_95-106.pdf



[Instructions for use](#)

誘電体とフェライトを部分的に含む軸方向スロットを切った導波管の漏洩波および表面波の伝搬定数

伊藤 精彦* 大木 一夫* 宮岸 修** 松本 正*

(昭和48年4月28日受理)

On the Propagation Constants of Leaky and Surface Waves of an Axially Slotted Waveguide Partially Filled with Certain Dielectric Media and Ferrite

Kiyohiko ITOH Kazuo OHKI Osamu MIYAGISHI Tadashi MATSUMOTO

(Received April 28, 1973)

Abstract

When a surface wave is launched in an axially slotted waveguide whose cavity is partially filled with some dielectric media and ferrite, we can use this waveguide as a transmission line. However, this slotted waveguide can not be used as a transmission line below a certain frequency at which point the surface wave is converted into leaky wave. In this frequency range where the leaky wave is launched on the slot, we can use this slotted waveguide as a traveling leaky wave antenna whose radiation peak is steerable by means of varying the frequency and/or dc magnetic field.

This report deals with the method of obtaining propagation constants of leaky and surface waves of the above-mentioned slotted waveguide by using the transverse resonance method. Various numerical examples in figures are also given.

1. ま え が き

Fig. 1 に示すような誘電体を一部装荷した単一スロット伝送線路は surface wave を launch することが出来、伝送線路として使用され得る。しかし周波数の低い領域においては surface wave が leaky wave となり伝送線路としては使用不可能となる。が一方、そのような leaky wave 発生領域においては、このスロット伝送線路は進行波アンテナとして使用可能となる。

本報告は、以上の観点から Fig. 1 のようなスロット伝送線路の surface wave および leaky wave の伝搬定数を、横方向等価回路表示を行ない、その構共振条件より求めんとするものである。

また、磁化されたフェライトを一部装荷した場合についても、同様な解析法によりその伝搬定数を求め得ることを示し、leaky wave について若干の数

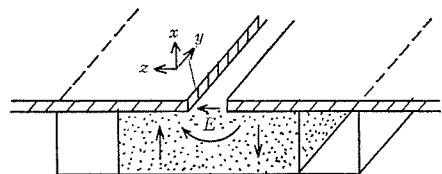


Fig. 1 Slotted waveguide axially filled with dielectric medium

* 電子工学科 電波伝送工学講座

** 現在 日本電信電話公社

値計算例を示す。このようなフェライトを装荷した leaky wave antenna は、印加直流磁界の変化によりその最大放射方向を変化させることが可能で、種々の応用が考えられる。

本報告で計算した伝搬定数は、すべて Fig. 1 のようなスロットを切った導波管における最低次 mode H slot₀ 波に対するものである¹⁾。

2. 横方向等価回路表示

(I) 誘電体を装荷した場合

Fig. 1 のスロット伝送線路を Fig. 2 のように一般化すると横方向等価回路は Fig. 3 のようになる。Fig. 2 の ㉑ の部分は E 面 T 分岐とみなし、回路パラメータは文献 (2) の 337 頁にしたがった。

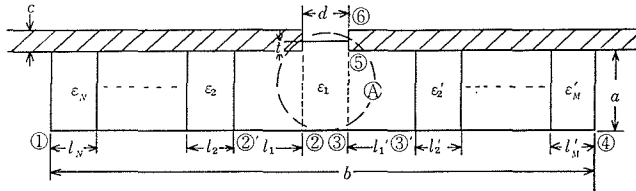


Fig. 2 Generalised slotted waveguide partially filled with certain dielectric media

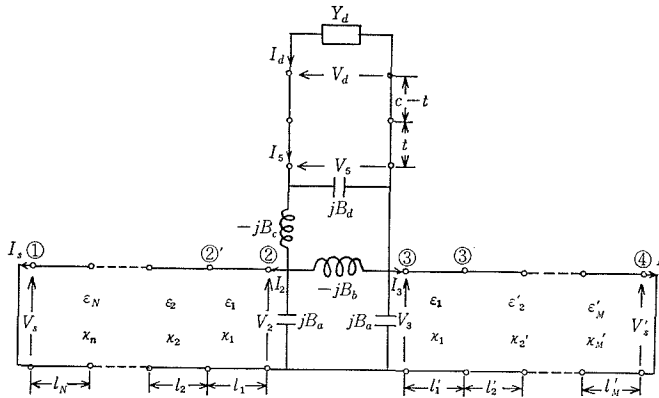


Fig. 3 Transverse equivalent circuit

また、①② および ③④ 区間の n 番目の誘電体の F -matrix は次式で与えられる。

$$(F_n) = \begin{pmatrix} \cos \kappa_n l_n & jZ_n \sin \kappa_n l_n \\ jY_n \sin \kappa_n l_n & \cos \kappa_n l_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\left. \begin{aligned} Y_n &= \frac{\kappa_n}{\omega \mu_0 a} = \frac{1}{Z_n}, & \kappa_n &= \sqrt{(\epsilon_n - 1)k_0^2 + \kappa^2} \\ \kappa &= \sqrt{k_0^2 - \beta^2}, & k_0^2 &= \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

β ; y 軸方向の波数

したがって

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = (F_1)(F_2) \dots (F_N) \begin{pmatrix} V_s \\ I_s \end{pmatrix} = (F) \begin{pmatrix} V_s \\ I_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} SU \\ TV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ I_s \end{pmatrix} \tag{3}$$

より、②より左を見たアドミタンス $Y_{\text{左}}$ は、 $Y_{\text{左}} = V/I$ で与えられる。同様に、③より右

を見たアドミタンス $Y_{\text{③}}$ は, $Y_{\text{③}}=V/U'$ で与えられる。ここで

$$(F') = \begin{pmatrix} S'U' \\ T'V' \end{pmatrix} = (F'_1)(F'_2) \dots (F'_M) \quad (4)$$

であり, $(F'_1), (F'_2)$ 等は Fig. 3 の ③④ 区間のパラメータを式 (1), (2) に代入して与えられる。

したがって, ⑤ より下を見たアドミタンス $Y_{\text{⑤}}$ は

$$\frac{Y_{\text{⑤}}}{Y_1} = jD\kappa_1 + j\frac{C}{\kappa_1} \frac{(A\kappa_1 - j\frac{Y_{\text{②}}}{Y_1})(A\kappa_1 - j\frac{Y_{\text{③}}}{Y_1}) - 2B\kappa_1 \{A\kappa_1 - \frac{1}{2}(j\frac{Y_{\text{②}}}{Y_1} + j\frac{Y_{\text{③}}}{Y_1})\}}{2(\frac{C}{\kappa_1} + B\kappa_1) \{A\kappa_1 - \frac{1}{2}(j\frac{Y_{\text{②}}}{Y_1} + j\frac{Y_{\text{③}}}{Y_1})\} - (A\kappa_1 - j\frac{Y_{\text{②}}}{Y_1})(A\kappa_1 - j\frac{Y_{\text{③}}}{Y_1})} \quad (5)$$

にて与えられる。(A, B, C, D 等は付録1参照)。

Fig. 3 の ⑥ より下を見たアドミタンス $\bar{Y}_d(\kappa)$ は,

$$\begin{pmatrix} V_d \\ I_d \end{pmatrix} = (F_0) \begin{pmatrix} V_3 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$(F_0) = \begin{pmatrix} S_0 U_0 \\ T_0 V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \kappa_1 t & jZ'_1 \sin \kappa_1 t \\ jY'_1 \sin \kappa_1 t & \cos \kappa_1 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \kappa(c-t) & jZ_0 \sin \kappa(c-t) \\ jY_0 \sin \kappa(c-t) & \cos \kappa(c-t) \end{pmatrix}$$

$$Y'_1 = \frac{1}{Z'_1} = \frac{\kappa_1}{\omega \mu_0 d}, \quad Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{\kappa}{\omega \mu_0 d}$$

より

$$\bar{Y}_d(\kappa) = \frac{I_d}{V_d} = \frac{T_0 + V_0 Y_{\text{⑤}}}{S_0 + U_0 Y_{\text{⑤}}} \quad (7)$$

次に Fig. 3 の ⑥ より上, すなわちスロット外部を見たアドミタンスは文献 (3) の 20 頁 (3) 式より

$$\bar{Y}_{ap}(\kappa) = Y_0 \frac{\kappa}{d} \int_0^d (d-\sigma) H_0^{(2)}(\kappa\sigma) d\sigma \quad (8)$$

にて与えられ, 内部の媒質が損失を含まない場合には, スロットには leaky wave あるいは surface wave が guide されることが予想される。

Leaky wave の範囲では $\kappa^2 \geq 0$ であり $\kappa d \ll 1$ のとき (8) 式は

$$\bar{Y}_{ap}(\kappa) = \left[\frac{\kappa d}{2} + j\frac{\kappa d}{\pi} \log \left(\frac{\pi e}{\gamma \kappa d} \right) \right] \frac{\kappa}{\omega \mu_0 d} \quad (9)$$

$$\gamma = 1.781, \quad e = 2.718$$

surface wave の範囲では $\kappa^2 \leq 0$ より, $\kappa = \exp(-j\pi/2) |\kappa|$ とすると

$$H_0^{(2)}(-jz) = \frac{2}{\pi} jK_0(z) \quad (10)$$

$$K_0(z) \cong -\left(\log \frac{1}{2} Z + 0.5772 \right), \quad |z| < 1$$

等を利用して, (8) 式は

$$\bar{Y}_{ap}(\kappa) = j |\kappa|^2 \frac{1}{\omega \mu_0 \pi} \left[\log \frac{1}{2} |\kappa d| - 0.9228 \right] \quad (11)$$

にて与えられる。

したがって, ⑥ にて評価した横共振式は

$$\bar{Y}(\kappa) = \bar{Y}_d(\kappa) + \bar{Y}_{ap}(\kappa) = 0 \quad (12)$$

にて与えられる。

(II) 磁化されたフェライトを一部装荷した場合

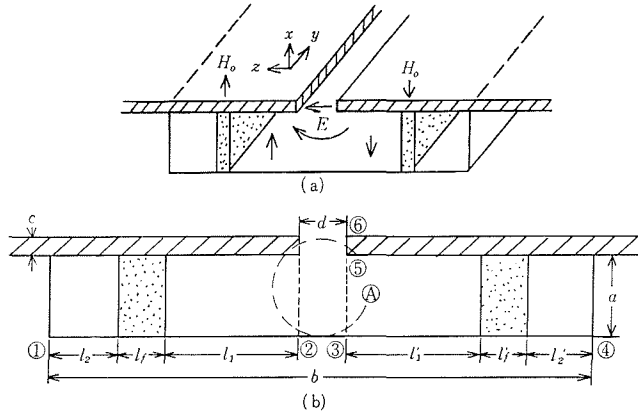


Fig. 4 Slotted waveguide partially filled with ferrite

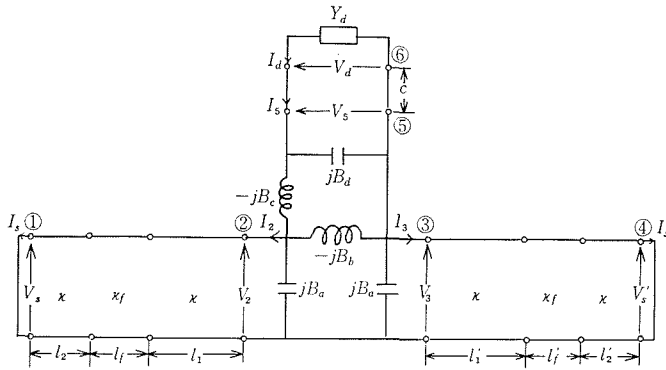


Fig. 5 Transverse equivalent circuit

Fig. 4 に示すような方向に磁化されたフェライトを一部装荷した leaky wave antenna の横方向等価回路表示は (I) の場合と同様にして Fig. 5 にて与えられる。

フェライトに損失がないものとするときフェライト部の F -matrix はそのテンソル透磁率を

$$\underline{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -jk_f \\ 0 & jk_f & \mu \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{\Gamma^2 H_0^4 4\pi M_s}{(\Gamma H_0)^2 - \omega^2}, \quad \frac{k_f}{\mu_0} = \frac{\omega \Gamma 4\pi M_s}{(\Gamma H_0)^2 - \omega^2}, \quad \Gamma = -2.8 \times 10^6 \text{ Hz/Oersted}$$

として

$$(F_f) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\kappa_f l_f - f)}{\cos f} & j \frac{A_f}{\kappa_f} a_f \sin \kappa_f l_f \\ j \frac{C_f}{\kappa_f a_f} \sin \kappa_f l_f & \frac{\cos(\kappa_f l_f + f)}{\cos f} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$A_f = \omega \mu_e = \omega \frac{\mu^2 - k_f^2}{\mu}, \quad B_f = -\beta \frac{k_f}{\mu}, \quad C_f = \frac{k^2 - \beta^2}{\omega \mu}$$

$$f = \tan^{-1} \frac{B_f}{\kappa_f}, \quad k^2 = \omega^2 \epsilon \mu, \quad \kappa = \sqrt{\omega^2 (\epsilon \mu_e - \epsilon_0 \mu_0) + \kappa^2}$$

にて与えられる。(付録 2 参照)

また空気部の F -matrix は (1) 式において $\varepsilon_n = \varepsilon_0$ なる式で与えられる。

したがって、⑥から上下を見たアドミタンス $\vec{Y}_{ap}(\kappa)$, $\vec{Y}_d(\kappa)$ は、(I) の場合と全く同様な手順で求まり、⑥にて評価した横共振式は

$$\vec{Y}(\kappa) = \vec{Y}_d(\kappa) + \vec{Y}_{ap}(\kappa) = 0 \quad (15)$$

にて与えられる。ただし今の場合 leaky wave なので $\vec{Y}_{ap}(\kappa)$ は (9) 式を適用する。

フェライトが多層に装荷された場合 (ただしスロット部は除く) についても (I) の場合と同様にして、容易に求められる。

3. 伝 搬 定 数

式 (12), (15) より κ を求めると軸方向伝搬定数 β は $\beta = \sqrt{k_0^2 - \kappa^2}$ より与えられる。

surface wave の場合、式 (12) は $|\kappa|$ についての実数演算となり、ニュートン近似法等で計算機により容易に求められる。

leaky wave の場合、(12), (15) 式の $\vec{Y}_d(\kappa)$ は純虚数となるので、まず $\vec{Y}_{ap}(\kappa)$ の実数部を無視することにより次式の κ_0 は実数演算により求まる。

$$\vec{Y}(\kappa) \simeq \vec{Y}(\kappa_0) = \vec{Y}_d(\kappa_0) + j \frac{\kappa_0^2}{\pi \omega \mu_0} \log \left(\frac{\pi e}{\sqrt{\kappa_0} d} \right) = 0$$

第1近似として $\kappa_1 = \kappa_0 + \Delta\kappa_1$ とすると¹⁾

$$\vec{Y}(\kappa_0) + \left. \frac{d\vec{Y}(\kappa)}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_0} \Delta\kappa_1 \simeq 0$$

より

$$\Delta\kappa_1 \simeq -\vec{Y}(\kappa_0) / \left. \frac{d\vec{Y}(\kappa)}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_0}$$

以下同様に $\kappa_2 = \kappa_1 + \Delta\kappa_2, \dots, \kappa_n = \kappa_{n-1} + \Delta\kappa_n$ と逐次近似を行なうことにより、 y 軸方向伝搬定数は

$$\beta - j\alpha = \sqrt{k_0^2 - \kappa_n^2}$$

により求められる。

以上の近似計算は、計算機による複素演算によって非常に精度の高い解が求められるようになった。

また、その結果求められた計算例において、leaky wave 領域には遮断周波数がなく、 λ/λ_g がほぼ 0.2 を境に再び増加するという特徴は、Honey⁴⁾ によって求められた計算例と一致したものである。

4. 数 値 計 算 例

(I) 誘電体を装荷した場合

Fig. 1 においてスロット伝送線路内部が同じ誘電率の誘電体ですべて満たされた場合について計算例を示す。

Fig. 6, Fig. 7 からわかるように surface wave では、誘電体の厚さ a , スロット幅 d , いずれをパラメータにした場合にもあるほぼ特定の周波数を境にして位相定数 (λ/λ_g) の変化の様子が逆転している。また周波数をより高くしていくと λ/λ_g は、ほぼ $\sqrt{(1+\varepsilon_r)/2}$ に収束する。

leaky wave では、Fig. 6, Fig. 7 より誘電体の厚さ a , スロット幅 d , いずれをパラメータ

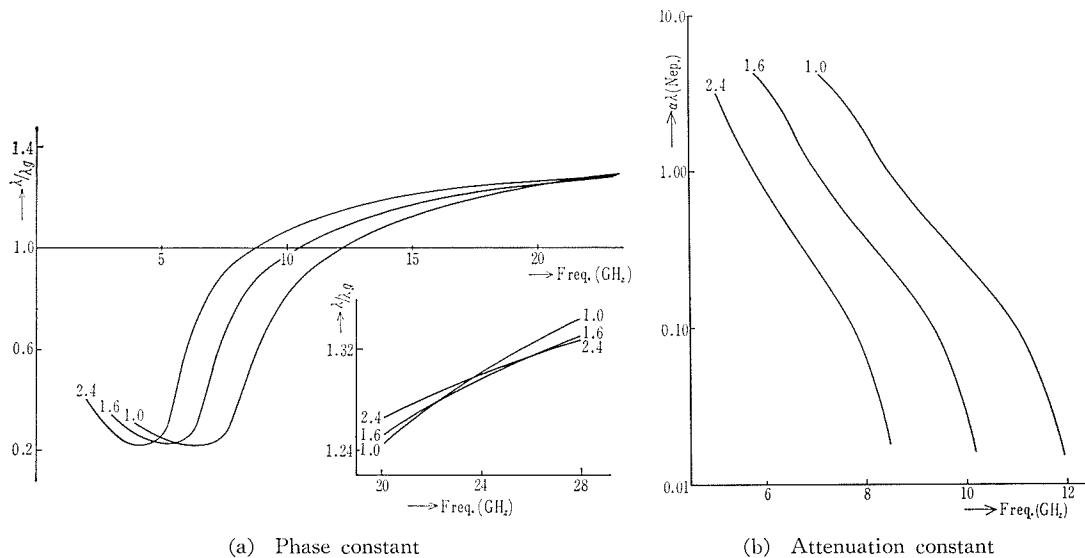


Fig. 6 Propagation constant of slotted waveguide partially filled with dielectrics
 $b=8.5$ (mm), $c=0.035$ (mm), $t=0.0$, $d=0.5$ (mm), $\epsilon_r=2.6$, parameter ; a (mm)

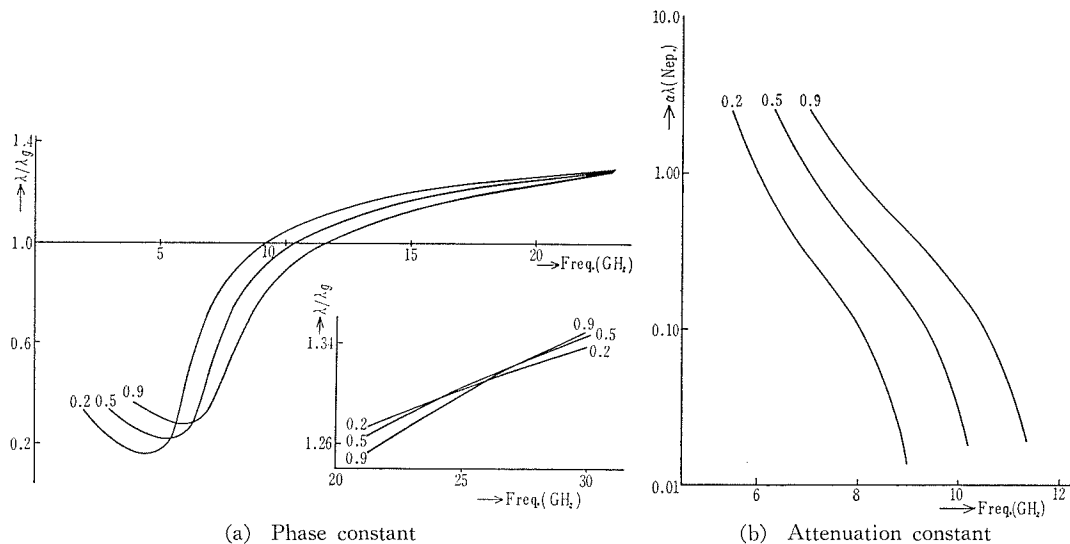


Fig. 7 Propagation constant of slotted waveguide partially filled with dielectrics
 $a=1.6$ (mm), $b=8.5$ (mm), $c=0.035$ (mm), $t=0.0$, $\epsilon_r=2.6$, parameter ; d (mm)

にした場合にも遮断周波数は存在せず、 λ/λ_g の値は 0.2 をほぼ境にして再び増加している。ただし、減衰定数は周波数が低下するにつれ単調に増加しており、非常に大きな値を示している。このことは、このような leaky wave を用いて進行波アンテナを構成した場合、その radiation peak をスロットから測定してはほぼ $\cos^{-1}0.2=78.5^\circ$ 以上 broadside 側へ振れないことを意味している。

(II) 磁化されたフェライトを一部装荷した場合

Fig. 4 において、 $l_1=l'_1$, $l_2=l'_2$, $l_r=l'_r$ と左右対称に同一のフェライトを装荷した場合についてその数値計算例を以下 Fig. 8~Fig. 10 に示す。また以下の計算において、使用周波数は 10 GHz,

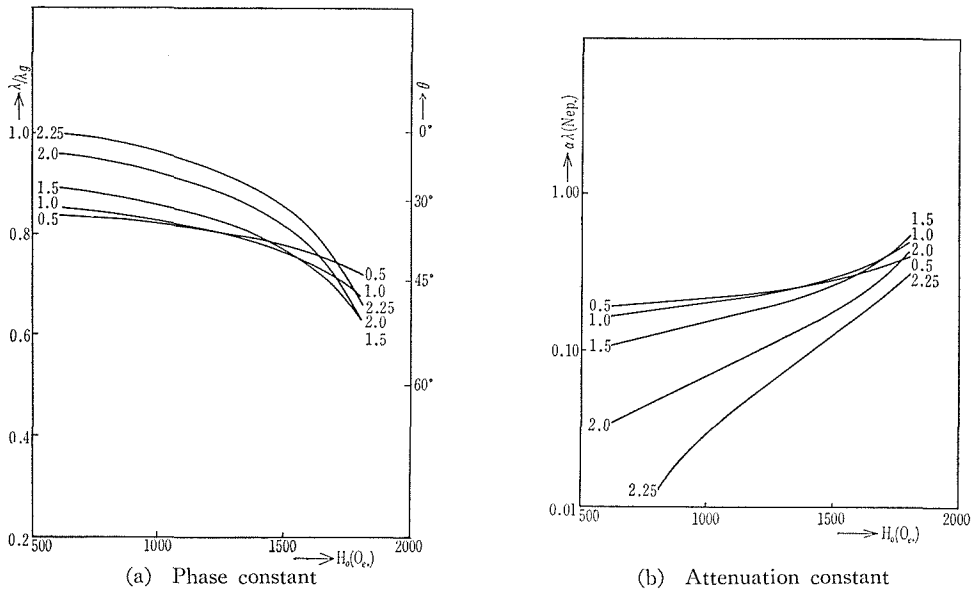


Fig. 8 Propagation constant vs. dc magnetic field (Slotted waveguide partially filled with ferrite)
 $a=2.4$ (mm), $b=1.2$ (cm), $c=0.035$ (mm), $d=0.2$ (mm), parameter ; l_2 (mm)

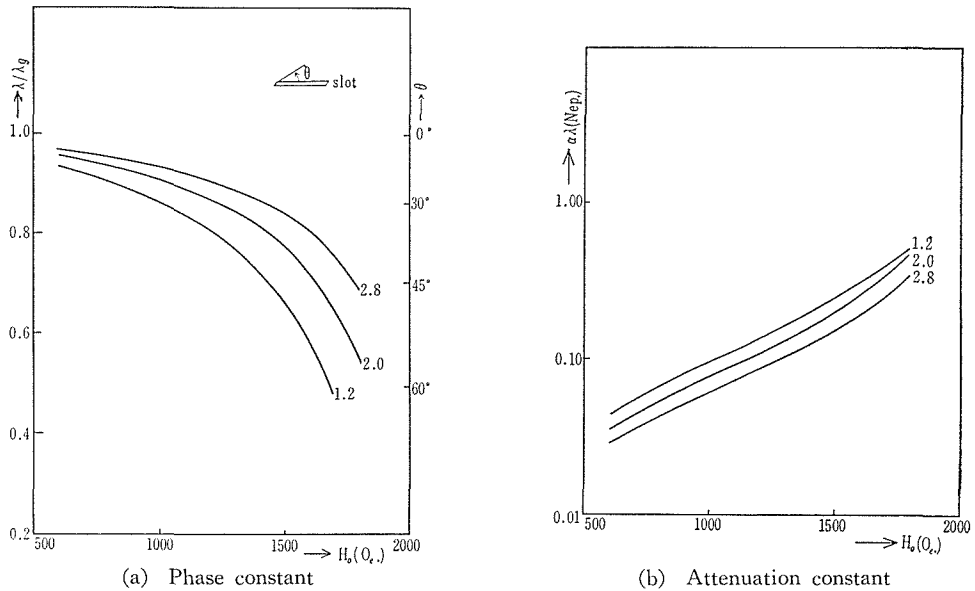


Fig. 9 Propagation constant vs. dc magnetic field (Slotted waveguide partially filled with ferrite)
 $b=1.2$ (cm), $c=0.035$ (mm), $d=0.2$ (mm), $l_2=2.0$ (mm), parameter ; a (mm)

使用フェライトは飽和磁化 $4\pi M_s=3000$ Gauss, 比誘電率 $\epsilon_f=13.6$, フェライト幅 $l_f=1.0$ mm としている。

Fig. 8 にはフェライトの挿入箇所 (導体壁からの距離 l_2 で示してある) をパラメータとしたときの印加直流磁界 H_0 の変化に対する伝搬定数の変化を示してある。これより直流磁界 600~1800 エルステッドの変化によって、管内波長 λ_g と自由空間波長 λ の比 λ/λ_g の変化を最大と

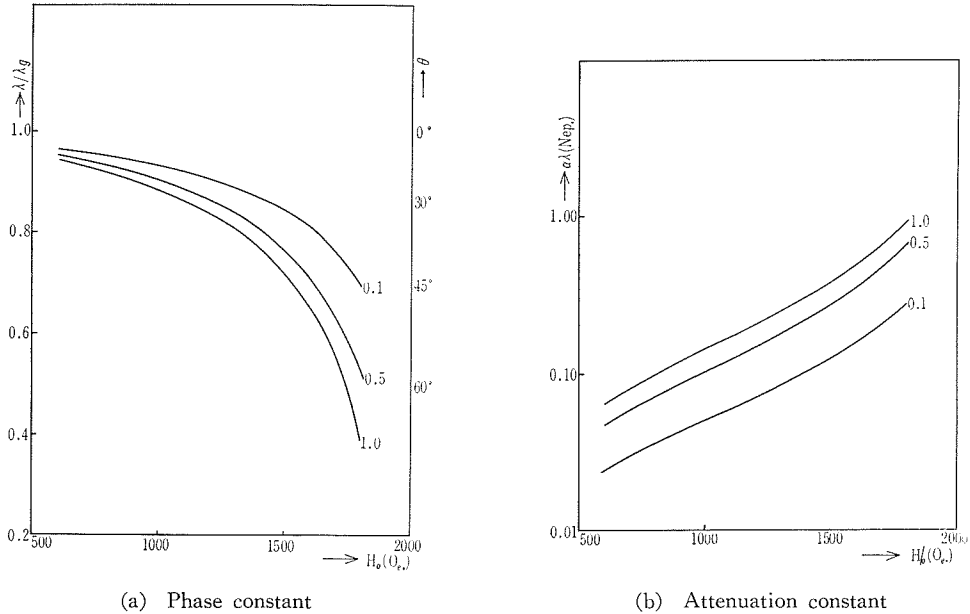


Fig. 10 Propagation constant vs. dc magnetic field (Slotted waveguide partially filled with ferrite)
 $a=2.4$ (mm), $b=12$ (cm), $c=0.035$ (mm), $l_2=2.0$ (mm), parameter; α (mm)

するようなフェライトの挿入箇所が存在することがわかり、空洞の深さ $a=2.4$ mm、空洞の幅 $b=1.2$ cm、スロット幅 $d=0.2$ mm の場合には、ほぼ $l_2=2.0\sim 2.25$ mm であることがわかる。

Fig. 9 では、空洞の深さ a をパラメータとした場合の直流磁界 H_0 と伝搬定数の関係を示している。これより深さ a を深くする程管内波長は自由空間波長に近い値となり、また減衰定数は深さ a の変化に対してはあまり影響を受けないことがわかる。

Fig. 10 には、スロット幅 d をパラメータとしたときの直流磁界 H_0 に対する伝搬定数の変化を示してある。この場合には、スロット幅 d を狭くする程 λ/λ_g は 1.0 に近い値となり、減衰定数は小さな値となることがわかる。

上記いずれをパラメータにとった場合にも適当なパラメータ値を選択すると、フェライトに印加する直流磁界の変化により、相当大きな伝搬定数の変化を得ることが可能であることがわかる。また leaky wave antenna において、その最大放射方向 θ は、スロット側から broadside 方向に測定して $\theta = \cos^{-1}(\lambda/\lambda_g)$ なる角度で与えられる。したがって、以上の結果は直流磁界の変化によってアンテナの最大放射方向をかなりの角度走査可能であることを意味している。Fig. 8 ~ Fig. 10 よりスロット長 10 波長程度の本報告モデルでは、その減衰量をも考慮して約 $\theta=0\sim 45^\circ$ の走査が可能と思われる。

5. む す び

本報告では、誘電体を装荷したスロット伝送線路の伝搬定数を回路網的取り扱いにより求め、若干の数値計算例を示した。また、磁化されたフェライトを一部装荷した leaky wave antenna の伝搬定数についても全く同様な解析法により求め得ることを示し、その数値計算例を示した。

誘電体を装荷した場合、surface wave を利用した伝送線路は、誘電体の厚さやスロット幅をパラメータとした場合ほぼ特定の周波数で λ/λ_g の特性が逆転するという興味ある結果が得られた。

またスロット長 10 波長程度の leaky wave antenna として考えた場合、本報告のモデルでは減衰定数がかなり大きなことより、使用可能な周波数範囲が非常に狭い範囲 (2~3 GHz) に限定されてしまうことがわかった。

磁化されたフェライトを一部装荷した Fig. 4 のモデルの場合、フェライトの挿入箇所、空洞の深さ、スロット幅等のパラメータを適当に選択するならば、印加直流磁界の変化によって最大放射方向をスロットから測定して約 45° まで broadside 方向へ走査可能であることがわかった。

謝 辞

有益な助言を頂いた電子工学科鈴木教授、中岡助手、北沢君に感謝致します。

文 献

- 1) 伊藤, 銘木, 松本: 軸方向スロットを切った方形導波管の Leaky Wave について, 信学誌, vol. 53-B, No. 5, (昭 45-5).
- 2) Marcuvitz, N., edited: Waveguide Handbook, Mcgraw-Hill Book Company, (1951).
- 3) Goldstone, L. O.,: Analysis of Leaky Wave Antenna, Polytechnic Inst. of Brooklyn, (May 1957).
- 4) Honey, R. C.,: Horizontally Polarized Long-Slot Array, Stanford Res. Inst. (August 1954).
- 5) 伊藤精彦, 松本 正: エネルギー密度アンテナ用薄型空洞スロットアンテナの設計理論, 信学会アンテナ伝播研資, AP 72-31, (1972-06).
- 6) 伊藤, 大木, 松本: 誘電体を一部含むスロット伝送線路における leaky wave および surface wave の伝搬定数について, 信学会アンテナ伝播研資, AP 72-61, (1972-11).
- 7) Clarricoats, P. J. B.,: Microwave Ferrites, London, Chapman & Hall (1961).

付 録 1

$$\frac{Y'_1}{Y_1} = \frac{a}{d} \equiv \frac{1}{2\alpha}$$

$$\frac{B_a}{Y_1} = \frac{\kappa_1 d}{\pi} \tan^{-1} \frac{1}{\alpha} + \frac{l_n \sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \equiv A\kappa_1$$

$$\frac{B_b}{Y_1} = \frac{1}{2} \left[\frac{\kappa_1 d}{\pi} \left(\tan^{-1} \frac{1}{\alpha} + \frac{l_n \sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha} \right) - \frac{\kappa_1 a}{\pi} \left(\frac{\pi\alpha}{3} + A_1 \right) \right] \equiv B\kappa_1$$

$$\frac{B_c}{Y_1} = \frac{1}{\kappa_1 d} \equiv \frac{C}{\kappa_1}$$

$$\frac{B_d}{Y_1} = \frac{\kappa_1 a}{2\pi} \left(\frac{\pi}{3\alpha} + A_2 \right) \equiv D\kappa_1$$

$$A_1 = -\frac{2a}{\pi} \exp\left(-\frac{2 \tan^{-1} \alpha}{\alpha}\right) \left[1 + \frac{5+\alpha^2}{4(1+\alpha^2)} \exp\left(-\frac{2 \tan^{-1} \alpha}{\alpha}\right) + \left\{ \frac{4}{1+\alpha^2} + \frac{(5+\alpha^2)^2}{(1+\alpha^2)^2} \right\} \frac{1}{9} \exp\left(-4\frac{\tan^{-1} \alpha}{\alpha}\right) \right]$$

$$\frac{A_1 + A_2}{2} = \alpha \tan^{-1} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \tan^{-1} \alpha + l_n \frac{1+\alpha^2}{4\alpha} - \frac{\pi(1+\alpha^2)}{6\alpha}$$

付 録 2

Fig. A-1 のようなフェライトにおいて、損失を無視するとそのテンソル透磁率は

$$\underline{\underline{\mu}} = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -jk_f \\ 0 & jk_f & \mu \end{pmatrix}, \quad \mu, k_f \text{ は (13) 式に従う} \quad (\text{A-1})$$

にて与えられる。

したがって、このようなフェライト内での Maxwell の方程式は次式で与えられる。

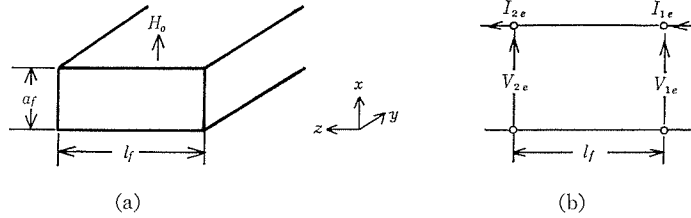


Fig. A-1 Transmission line representation of ferrite

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= j\omega\varepsilon\mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= -j\omega\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}\end{aligned}\quad (\text{A-2})$$

今、界が $\partial/\partial x \equiv 0$ なる 2 次元の姿態の集まりの場合

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_l \\ \mathbf{H}_l \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\beta y) \begin{pmatrix} V_{(z)} \\ I_{(z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_x \frac{j}{\sqrt{a_f}} \\ \mathbf{i}_y \frac{j}{\sqrt{a_f}} \end{pmatrix} d\beta \quad (\text{A-3})$$

なる H-type 波として横方向の界を表わすことができる。またその場合、界の縦方向成分は

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \cdot (\mathbf{H}_l \times \mathbf{i}_z) \\ H_z &= \frac{1}{j\omega\boldsymbol{\mu}} [\nabla (\mathbf{i}_z \times \mathbf{E}_l) - j\omega \mathbf{i}_z \cdot \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{H}_l] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-4})$$

なる形で表わされる。(A-3) を (A-4) へ代入して

$$\left. \begin{aligned} E_z &= 0 \\ H_z &= \frac{1}{j\omega\boldsymbol{\mu}} \left[\frac{-j\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\beta y) V_{(z)} \frac{j}{\sqrt{a_f}} d\beta + \frac{\omega k_f}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\beta y) I_{(z)} \frac{j}{\sqrt{a_f}} d\beta \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-5})$$

したがって (A-2), (A-3), (A-5) 式より次の伝送方程式を導びくことができる。

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial V_{(z)}}{\partial Z} &= jA_f I_{(z)} + B_f V_{(z)} \\ -\frac{\partial I_{(z)}}{\partial Z} &= jC_f V_{(z)} + D_f I_{(z)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-6})$$

$$A_f = \omega\mu_e = \omega \frac{\mu^2 - k_f^2}{\mu}, \quad B_f = -D_f = -\frac{\beta k_f}{\mu}, \quad C_f = \frac{k^2 - \beta^2}{\omega\mu}, \quad k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$$

(A-6) 式より

$$\frac{d^2 V_{(z)}}{dz^2} + (A_f C_f + B_f D_f) V_{(z)} = 0 \quad (\text{A-7})$$

が導びかれ $V_{(z)}, I_{(z)}$ は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} V_{(z)} &= C_1 \exp(-j\kappa_f z) + C_2 \exp(j\kappa_f z) \\ I_{(z)} &= -\frac{1}{jA_f} \left\{ (B_f - j\kappa_f) C_1 \exp(-j\kappa_f z) + (B_f + j\kappa_f) C_2 \exp(j\kappa_f z) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-8})$$

$$\kappa_f = \sqrt{A_f C_f + B_f D_f}$$

今

$$V_{(0)} = V_1, \quad I_{(0)} = I_1, \quad V_{(l)} = V_2, \quad I_{(l)} = I_2 \quad (\text{A-9})$$

なる境界条件のもとで定数 C_1, C_2 を求めると

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{V_1(B_f + j\kappa_f) + jA_f I_1}{2j\kappa_f} \\ C_2 &= -\frac{jA_f I_1 + (B_f - j\kappa_f)V_1}{2j\kappa_f} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-10})$$

したがって、(A-8), (A-9), (A-10) 式より

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\kappa_f l_f - f)}{\cos f} & j\frac{A_f}{\kappa_f} \sin \kappa_f l_f \\ j\frac{C_f}{\kappa_f} \sin \kappa_f l_f & \frac{\cos(\kappa_f l_f + f)}{\cos f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A-11})$$

$$f = \tan^{-1} \frac{B_f}{\kappa_f}$$

上記における V_1, V_2, I_1, I_2 はそれぞれモード電圧, モード電流であるので, これを端子電圧, 端子電流, $V_{1e}, V_{2e}, I_{1e}, I_{2e}$ で表わすと $V_1 = V_{1e}/a_f, V_2 = V_{2e}/a_f, I_1 = I_{1e}, I_2 = I_{2e}$ なる関係より

$$\begin{pmatrix} V_{1e} \\ I_{1e} \end{pmatrix} = (F_f) \begin{pmatrix} V_{2e} \\ I_{2e} \end{pmatrix}$$

$$(F_f) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(\kappa_f l_f - f)}{\cos f} & j\frac{A_f a_f}{\kappa_f} \sin \kappa_f l_f \\ j\frac{C_f}{\kappa_f a_f} \sin \kappa_f l_f & \frac{\cos(\kappa_f l_f + f)}{\cos f} \end{pmatrix} \quad (\text{A-12})$$