HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	混成k木集合，混成k¯木集合とその性質（II）
Author(s)	仙石, 正和; 黒部, 貞一; 小川, 吉彦; 松本, 正
Citation	北海道大學工學部研究報告, 69, 75-86
Issue Date	1973-11-15
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/41181
Type	bulletin (article)
File Information	69_75-86.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

混成 k 木集合，混成 $\bar{k}$ 木集合とその性質（II）

仙石正和* 黒部貞一** 小川吉彦** 松本 正*

(昭和48年4月28日受理)

Hybrid k Trees, Hybrid $\bar{k}$ Trees and Their Some Properties (II)

Masakazu SENGOKU* Teiichi KUROBE** Yoshihiko OGAWA** Tadashi MATSUMOTO*
Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo Japan

(Received April 28, 1973)

Abstract

In our previous paper: "Hybrid k Trees, Hybrid $\bar{k}$ Trees andTheir some Properties (I)" hybrid k trees and hybrid $\bar{k}$ trees in a graph were defined and the relationships among hybrid trees, hybrid 2 trees, hybrid $\bar{2}$ trees, circuits, paths and sub-cutsets were presented. In this paper, the above results are extended to a discussion using hybrid k trees and hybrid $\bar{k}$ trees. Further, the relationships between hybrid k trees and hybrid $\bar{k}$ trees are presented.

These results may be considered as a generalization and an extension of work using subgraphs such as trees, cotrees, k trees and co-k trees etc.

1. 緒　　言

前論文（混成 k 木集合，混成 $\bar{k}$ 木集合とその性質（I））において混成 k 木と混成 $\bar{k}$ 木を定義し，混成木集合，混成2木集合，混成$\bar{2}$木集合と閉路，カットセット，道，サブカットセットとの関係を示した。本論文では，前論文の結果を混成 k 木集合と混成 $\bar{k}$ 木集合とに拡張し，さらに混成 k 木集合と混成 $\bar{k}$ 木集合との関係について述べる。なお，演算記号他本論文で用いる記号はすべて前論文のものを使用している。

2. 混成木集合，混成 k 木集合，混成 $\bar{k}$ 木集合とカットセット，閉路，道との関係

定理1[1]を混成 k 木集合に拡張する。そのためにつぎの補題を証明しておく。

[補題4] グラフ G の一つの枝を $e_i=(v_l, v_m)$ とする。

$$\frac{\partial HT_{v_1,v_2,\dots,v_k}}{\partial e_i}=HT_{v_1,v_2,\dots,v_k,v_l}\oplus HT_{v_1,v_2,\dots,v_k,v_m}\quad :e_i\in E_y \text{ のとき}$$

$$\int HT_{v_1,v_2,\dots,v_k}de_j=HT_{v_1,v_2,\dots,v_k,v_l}\oplus HT_{v_1,v_2,\dots,v_k,v_m}\quad :e_l\in E_z \text{ のとき}$$

ただし，$v_l=v_j(1\leq j\leq k)$ のとき，$HT_{v_1,v_2,\dots,v_k,v_l}=\phi$, $v_m=v_j(1\leq j\leq k)$ のとき，$HT_{v_1,v_2,\dots,v_k,v_m}=\phi$.

(証明) h_1, h_2, h_0 を $h_1\in HT_{v_1,v_2,\dots,v_k,v_l}$, $h_2\in HT_{v_1,v_2,\dots,v_k,v_m}$, $h_0\in(HT_{v_1,v_2,\dots,v_k,v_l}\oplus HT_{v_1,v_2,\dots,v_k,v_m})$ とし，$h_1=h_{y_1}\cup h_{z_1}$, $h_{y_1}\cup h_{z_1}=\phi$, $h_{y_1}\subset E_y$, $h_{z_1}\subset E_z$, $\bar{h}_{z_1}=E_z-h_{z_1}$, $h_2=h_{y_2}\cup h_{z_2}$, $h_{y_2}\cap h_{z_2}=\phi$,

---

* 電子工学科　電波伝送工学講座
** 電子工学科　電子回路工学講座

$h_{y_2}\subset E_y$, $h_{z_2}\subset E_z$, $\bar{h}_{z_2}=E_z-h_{z_2}$, $h_0=h_{y_0}\cup h_{z_0}$, $h_{y_0}\cap h_{z_0}=\phi$, $h_{y_0}\subset E_y$, $h_{z_0}\subset E_z$, $\bar{h}_{z_0}=E_{z_0}-h_z$ とする。$h_{y_0}\cup\bar{h}_{z_0}$ は v_l, v_m 間に道をもたない。というのは，$h_{y_1}\cup\bar{h}_{z_1}$ を v_l, v_m 間に道をもつ部分グラフとすると $h_{y_1}\cup\bar{h}_{z_1}=h_{y_2}\cup\bar{h}_{z_2}$ となる h_2 が必ず $HT_{v_1,v_2,\dots,v_k,v_m}$ の中に存在するからである。ゆえに $h_0\oplus e_i(e_i\in E_y$ のとき $h_0\ni e_i$, $e_i\in E_z$ のとき $h_0\not\ni e_i)$ は混成 k 木集合 $HT_{v_1,v_2,\dots,v_k}$ の要素であることがわかる。このことから，$HT_{v_1,v_2,\dots,v_k,v_l}\oplus HT_{v_1,v_2,\dots,v_k,v_m}$ の要素はすべて

$$\frac{\partial HT_{v_1,v_2,\dots,v_k}}{\partial e_l}\quad(e_l\in E_y)\ \text{または，}\ \int HT_{v_1,v_2,\dots,v_k}de_i\quad(e_l\in E_z)$$

に含まれることになる。逆に $h^k\in HT_{v_1,v_2,\dots,v_k}$ とし，$e_i\in h^k$, $(e_i\in E_y)$ とすると $h^k\oplus e_i$（または，$e_i\not\in h^k$, $e_i\in E_z$ のとき $h^k\oplus e_i$）は $HT_{v_1,v_2,\dots,v_k,v_l}$, $HT_{v_1,v_2,\dots,v_k,v_m}$ の片方のみに含まれ両方に含まれない。(証明終)

この補題を用いてつぎの定理を得る。

［定理 6］ 節点 v_i, v_j 間の一つの道を P_{ij} とし，$P_{ij}=P_{y_{ij}}\cup P_{z_{ij}}$, $P_{y_{ij}}\cup P_{z_{ij}}=\phi$, $P_{y_{ij}}\subset E_y$, $P_{z_{ij}}\subset E_z$ とすると，

$$HT_{v_1,v_2,\dots,v_k}=\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{12}}}\oplus\int dP_{z_{12}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{23}}}\oplus\int dP_{z_{23}}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{k-1k}}}\oplus\int dP_{z_{k-1k}}\right)HT$$

(証明) $k=2$ のとき定理1から成立する。$k-1$ まで成立したとすると，

$$HT_{v_1,v_2,\dots,v_k}=\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{k-1k}}}\oplus\int dP_{z_{k-1k}}\right)HT_{v_1,v_2,\dots,v_{k-1}}$$

を証明すればよい，$|P_{k-1k}|=1$ のとき補題4より成立している。$|P_{k-1k}|=n-1$ まで成立したとする。$P_{k-1k}=\{e_1e_2\dots e_n\}$, $e_n\in E_y$, $e_n=(v_j,v_k)$, $P_{y_{k-1k}}\oplus e_i=P_{y_{jk-1}}$ とすると，

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{k-1k}}}\oplus\int dP_{z_{k-1k}}\right)HT_{v_1,v_2,\dots,v_{k-1}}&=\left\{\frac{\partial}{\partial e_n}\oplus\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{jk-1}}}\oplus\int dP_{z_{k-1k}}\right)\right\}HT_{v_1,v_2,\dots,v_{k-1}}\\&=\frac{\partial HT_{v_1,v_2,\dots,v_{k-1}}}{\partial e_n}\oplus\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{j_{k-1}}}}\oplus\int dP_{z_{k-1k}}\right)HT_{v_1,v_2,\dots,v_{k-1}}\\&=\frac{\partial}{\partial e_n}HT_{v_1,v_2,\dots,v_{k-1}}\oplus HT_{v_1,v_2,\dots,v_{k-1},v_j}\qquad(\because\ \text{仮定から})\\&=(HT_{v_1,v_2,\dots,v_{k-1},v_j}\oplus HT_{v_1,v_2,\dots,v_{k-1},v_k})\oplus HT_{v_1,v_2,\dots,v_{k-1},v_j}\\&=HT_{v_1,v_2,\dots,v_{k-1},v_k}\end{aligned}$$

$e_n\in E_z$ の場合も同様である。(証明終)

この証明からわかるように道の集合 $\{P_{12},P_{23},\dots,P_{k-1k}\}$ は節点 $v_1,v_2,\dots,v_k$ を結んでいる $k-1$ 個の道で置きかえても成立する。例えば $\{P_{12},P_{13},P_{14},P_{k5},P_{k6},\dots,P_{1k}\}$ であってもよい。ここでもし $\{P_{12},P_{23},P_{31},\dots\}$ のように閉路 $(v_1\to v_2\to v_3\to v_1)$ を含むようにとった場合，$HT_{v_1,v_2,\dots,v_k}=\phi$ となる。

混成 $\bar{k}$ 木集合についても同様の定理を導くためにつぎの補題を証明しておく。

［補題 5］ $e_i=(v_i,v_i')$, $(1\leq i\leq k)$ とする。

$$\begin{aligned}HT^{v_2v_2',v_3v_3',\dots,v_kv_k'}&=\frac{\partial HT^{v_2v_2',v_3v_3',\dots,v_{k-1}v_{k'-1}}}{\partial e_k}\quad(e_k\in E_z)\\&=\int HT^{v_2v_2',v_3v_3',\dots,v_{k-1}v_{k'-1}}de_k\quad(e_k\in E_y)\end{aligned}$$

(証明) $h_0\in HT^{v_2v_2',v_3v_3',\dots,v_kv_k'}$ とすると $h_0\oplus e_k$ は $HT^{v_2v_2',v_3v_3'\dots,v_{k-1}v_{k'-1}}$ に含まれる。なぜならば $(h_0\oplus e_k)\oplus\{e_2e_3\dots e_{k-1}\}$ は HT に含まれるからである。このことから $HT^{v_2v_2',v_3v_3',\dots,v_kv_k'}$ の要素はすべて，

$$\frac{\partial HT^{v_2v_2', v_3v_3', \dots, v_{k-1}v_{k'-1}}}{\partial e_k}, \ (e_k \in E_z)$$

または

$$\int HT^{v_2v_2', v_3v_3', \dots, v_{k-1}v_{k'-1}} de_k, \ (e_k \in E_y)$$

に含まれることがわかる。逆に $h^k \in HT^{v_2v_2', v_3v_3', \dots, v_{k-1}v_{k'-1}}$ とすると，$e_k \in h^k$, $e_k \in E_z$ のとき $h^k \oplus e_k$（または $e_k \notin h^k$, $e_k \in E_y$ のとき $h^k \oplus e_k$）は $HT^{v_2v_2', v_3v_3', \dots, v_kv_{k'}}$ に含まれる。（証明終）

また今後の議論のためにつぎの補題を証明しておく。

［補題 6］ $HT_{v_1, v_2, \dots, v_k}$ はグラフ G の $v_1, v_2, \dots, v_k$ を同一節点としたグラフの混成木集合である。

（証明） G の $v_1, v_2, \dots, v_k$ を同一節点にしたグラフを G_k とする。G_k の任意の一つの混成木を h_k とし，$h_k = h_{y_k} \cup h_{z_k}$, $h_{y_k} \cap h_{z_k} = \phi$, $h_{y_k} \subset E_y$, $h_{z_k} \subset E_z$, $\bar{h}_{z_k} = E_z - h_{z_k}$ とする。$h_{y_k} \cup \bar{h}_{z_k}$ は明らかに G では $v_1, v_2, \dots, v_k$ の間には道がなく $\rho - k + 1$（$\rho : G$ の階数）個の枝からなっている。つまり $h_k \in HT_{v_1, v_2, \dots, v_k}$ である。逆に $HT_{v_1, v_2, \dots, v_k}$ の任意の要素を δ とし，$\delta = \delta_y \cup \delta_z$, $\delta_y \cap \delta_z = \phi$, $\delta_y \subset E_y$, $\delta_z \subset E_z$, $\bar{\delta}_z = E_z - \delta_z$ とすると定義から $\delta_y \cap \bar{\delta}_z$ は $v_1, v_2, \dots, v_k$ に道をもたず $\rho - k + 1$ 個の枝からなる閉路を含まない部分グラフであるので $v_1, v_2, \dots, v_k$ を同一節点にした場合明らかに δ は G_k の一つの混成木となっている。（証明終）

［補題 7］ $HT^{v_2v_2', v_3v_3', \dots, v_kv_{k'}}$（ただし $e_i = (v_i, v_i')$, $(2 \le i \le k)$）はグラフ G の枝 $e_2, e_3, \dots, e_k$ を開放除去し $e_i (2 \le i \le k)$ を節点 v_i または v_i' に可分枝として加えたグラフ G^k の混成木集合である。

（証明） G^k の任意の一つの混成木を h^k とする。$\gamma = \{e_2 e_3 \dots e_k\}$ とすると $h^k \oplus \gamma$ は明らかに G の混成木である。このことから h^k は $HT^{v_2v_2', v_3v_3', \dots, v_kv_{k'}}$ の要素である。逆に $HT^{v_2v_2', v_3v_3', \dots, v_kv_{k'}}$ の任意の一つの要素を ξ とすると明らかに ξ は G^k の混成木である。（証明終）

以上の補題を用いてつぎの定理を得る。

［定理 7］ $e_i = (v_i, v_i')$ に関するサブカットセットを $S_{ii'}$ とし，$S_{ii'} = S_{yii'} \cup S_{zii'}$, $S_{yii'} \cap S_{zii'} = \phi$, $S_{yii'} \subset E_y$, $S_{zii'} \subset E_z (2 \le i \le k)$ とする。

$$TH^{v_2v_2', v_3v_3', \dots, v_kv_{k'}} = \left(\frac{\partial}{\partial S_{z22'}} \oplus \int dS_{y22'}\right)\left(\frac{\partial}{\partial S_{z33'}} \oplus \int dS_{y33'}\right) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial S_{zkk'}} \oplus \int dS_{ykk'}\right) HT$$

（証明） $k=2$ のとき定理 5 から成立する。$k-1$ まで成立するとすると，

$$HT^{v_2v_2', v_3v_3', \dots, v_kv_{k'}} = \left(\frac{\partial}{\partial S_{zkk'}} \oplus \int dS_{ykk'}\right) HT^{v_2v_2', v_3v_3', \dots, v_{k-1}v_{k'-1}}$$

を証明すればよい。補題 7 から $HT^{v_2v_2', v_3v_3', \dots, v_{k-1}v_{k'-1}}$ は $e_2, e_3, \dots, e_{k-1}$ を開放除去しその各々の枝をそれぞれ節点 v_2（または v_2'），v_3 (v_3'), ..., v_{k-1} (v_{k-1}') に可分枝として加えたグラフ G^{k-1} の混成木集合 HT^{k-1} と一致する。また補題 5 から，

$$\begin{aligned} HT^{v_2v_2', v_3v_3', \dots, v_kv_{k'}} &= \frac{\partial HT^{v_2v_2', v_3v_3', \dots, v_{k-1}v_{k'-1}}}{\partial e_k} \\ &= \frac{\partial HT^{k-1}}{\partial e_k} \quad (e_k \in E_z) \\ &= \int HT^{v_2v_2', v_3v_3', \dots, v_{k-1}v_{k'-1}} de_k \\ &= \int HT^{k-1} de_k \quad (e_k \in E_y) \end{aligned}$$

であったので定理5から G^{k-1} の e_k に関するサブカットセットを S'_k とし，$S'_k=S'_{k_y}\bigcup S'_{k_z}$, $S'_{k_y}\bigcap S'_{k_z}=\phi$, $S'_{k_y}\subset E_y$, $S'_{k_z}\subset E_z$ とすると，

$$HT^{v_2v_2',v_3v_3',\dots,v_kv_k'}=\left(\frac{\partial}{\partial S'_{k_z}}\oplus\int dS'_{k_y}\right)HT^{k-1}$$

となる。ところで，$S_{kk'}=S'_k\bigcup g_k$ と考えることができる。ここで g_k は $\{e_2e_3\dots e_k\}$ の部分集合である。そこで $g_k=g_{k_y}\bigcup g_{k_z}$, $g_{y_k}\bigcap g_{k_z}=\phi$, $g_{k_y}\subset E_y$, $g_{k_z}\subset E_z$ とすると，

$$\left(\frac{\partial}{\partial S_{z_{kk'}}}\oplus\int dS_{y_{kk'}}\right)HT^{k-1}=\left(\frac{\partial}{\partial S'_{k_z}}\oplus\int dS'_{k_y}\right)HT^{k-1}\oplus\left(\frac{\partial}{\partial g_{k_z}}\oplus\int dg_{k_y}\right)HT^{k-1}$$

となる。

ここで G^{k-1} の枝 g_k はすべて可分枝であることから，$e_i\in g_k$ とすると，$e_i\in E_z$ のとき，

$$\frac{\partial HT^{k-1}}{\partial e_i}=\phi,\qquad e_i\in E_y \text{ のとき } \int HT^{k-1}de_i=\phi$$

である。ゆえに，

$$\left(\frac{\partial}{\partial S_{z_{kk'}}}\oplus\int dS_{y_{kk'}}\right)HT^{k-1}=\left(\frac{\partial}{\partial S'_{k_z}}\oplus\int S'_{k_y}\right)HT^{k-1}$$

つまり，

$$HT^{v_2v_2',v_3v_3',\dots,v_kv_k'}=\left(\frac{\partial}{\partial S_{z_{kk'}}}\oplus\int dS_{y_{kk'}}\right)HT^{v_2v_2',v_3v_3',\dots,v_{k-1}v_{k'-1}}$$

となる。(証明終)

つぎに混成 k 木集合または混成 $\bar{k}$ 集合から混成木集合を求めることを考えてみよう。

[定理8] 節点 v_n, v_m を分離するグラフ G の一つのカットセットでそのカットセットによって節点集合 V が $V_n, V_m(V=V_n\bigcup V_m, V_n\bigcap V_m=\phi)$, $V_n\subset\{v_1, v_2,\dots, v_n\}$, $V_m\subset\{v_m, v_{m+1},\dots, v_k\}$ と分割されるものを Q_{nm} とし，$Q_{nm}=Q_{y_{nm}}\bigcap Q_{z_{nm}}$, $Q_{y_{nm}}\bigcap Q_{z_{nm}}=\phi$, $Q_{y_{nm}}\subset E_y$, $Q_{z_{nm}}\subset E_z$, $(1\leq n\leq k-1, 2\leq m\leq k, m=n+1, k<\rho+1)$ とすると，

$$HT=\left(\frac{\partial}{\partial Q_{z12}}\oplus\int dQ_{y12}\right)\left(\frac{\partial}{\partial Q_{z23}}\oplus\int dQ_{y23}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial Q_{z_{k-1k}}}\oplus\int dQ_{y_{k-1k}}\right)HT_{v_1,v_2,\dots,v_k}$$

(証明) $k=2$ のとき定理2から成立する。$k-1$ まで成立しているとする。G の v_{k-1} と v_k を同一点にしたグラフを G' とし，G' の混成 $k-1$ 木集合 $HT'_{v_1,v_2,\dots,v_{k-1}}$ (これは G の混成 k 木集合 $HT_{v_1,v_2,\dots,v_k}$ と同一。(∵ 補題6)) に $k-2$ 回の $\left(\frac{\partial}{\partial Q^{zi_{i+1}}}\oplus\int dQ_{y_{i_{i+1}}}\right)$ の演算をほどこすことによって G' の混成木集合 HT' が得られる。$HT'=HT_{v_{k-1},v_k}$ であることに注意して，

$$HT=\left(\frac{\partial}{\partial Q_{z_{k-1k}}}\oplus\int dQ_{y_{k-1}}\right)HT_{v_{k-1},v_k}$$

を証明すればよい。これは定理2から明らかである。(証明終)

この定理において $k-1$ 個のカットセット $Q_{12}, Q_{23},\dots, Q_{k-1k}$ を用いたが，この代わりに，$k-1$ 個のカットセット $Q_{i_1i_2}, Q_{i_2i_3},\dots, Q_{i_{k-1}i_k}$, $(1\leq i_j\leq k, 1\leq j\leq k-1)$ を考え，仮想の枝 $e'_j=(v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$ をグラフ G に加えて，この $k-1$ 個の仮想の枝と G の $\rho-(k-1)$ 個の枝(これも仮想の枝でよい)からなる部分グラフが G の一つの木(結局仮想の木となる)となっており，$Q_{i_ji_{j+1}}$ はその木の仮想の枝 $e'_j(1\leq j\leq k-1)$ に関する基本カットセット(仮想の枝は含めず)となっているようなカットセットの組を用いても良いことに注意すべきである。つぎに混成 $\bar{k}$ 木集合から混成木集合を求める公式を導くためにつぎの補題を証明しよう。

[補題 8]　グラフ G の枝 $e_i=(v_i, v_i')$ を含む一つの閉路を L_i とし，$L_i=L_{y_i}\cap L_{z_i}$, $L_{y_i}\cap L_{z_i}=\phi$, $L_{y_i}\subset E_y$, $L_{z_i}\subset E_z$ とすると，

$$HT=\left(\frac{\partial}{\partial L_{y_i}}\oplus\int dL_{z_i}\right)HT_{v_i v_{i'}}$$

(証明)　$HT^{v_i v_{i'}}$ は補題7から $e_i=(v_i, v_i')$ を開放除去したグラフの節点 v_i に e_i を可分枝として加えたグラフ G' の混成木集合 HT' と一致する。G' の枝 e_i を $e_i=(v_i, v_{i'})$ とする。(図 2–1 参照) G' の混成 2 木集合 $HT'_{v_{i'}, v_{i''}}$ を考えるとこれは G の混成木集合となっている (補題 6) はずである。ゆえに G' の v_i', v_i'' 間の道を $P_{i'i''}=P_{y_{i'i''}}\cup P_{z_{i'i''}}$, $P_{y_{i'i''}}\cap P_{z_{i'i''}}=\phi$, $P_{y_{i'i''}}\subset E_y$, $P_{z_{i'i''}}\subset E_z$ とすると，

$$HT'_{v_{i'}, v_{i''}}=\frac{\partial HT'}{\partial P_{y_{i'i''}}}\oplus\int HT'dP_{z_{i'i''}}$$

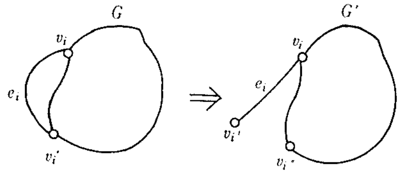

図 2–1　補題 8 の説明のためのグラフ

Fig. 2–1　Explanation (graphs) of lemma 8

となる。ところで，$P_{i'i''}$ は G の e_i を含む一つの閉路 L_i であることから，

$$HT=HT_{v_{i'}, v_{i''}}=\frac{\partial HT'}{\partial L_{y_i}}\oplus\int HT'dL_{z_i}=\left(\frac{\partial}{\partial L_{y_i}}\oplus\int dL_{z_i}\right)HT^{v_i v_{i'}}$$

となる。(証明終)

この補題を混成 $\bar{k}$ 木集合に拡張する。

[定理 9]　グラフ G の枝 $e_i=(v_i, v_i')$ を含む一つの閉路を L_iとし，$L_i=L_{y_i}\cup L_{z_i}$, $L_{y_i}\cap L_{z_i}=\phi$, $L_{y_i}\subset E_y$, $L_{z_i}\subset E_z$, $(2\leq i\leq k, k<\mu-1, \mu$ は G の零度) とすると，

$$HT=\left(\frac{\partial}{\partial L_{y_2}}\oplus\int dL_{z_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial L_{y_3}}\oplus\int dL_{z_3}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial L_{y_k}}\oplus\int dL_{z_k}\right)HT^{v_2v_{2'}, v_3v_{3'}, \ldots, v_kv_{k'}}$$

(証明)　補題 8 の繰返しにより求まる。ここで v_i, v_i' が同一節点であっても成立することに注意する必要がある。(証明終)

この定理は定理 8 に対応するものである。さて，この定理 8，定理 9 を用いてグラフ G の独立な閉路，カットセットと混成木集合との関係を得ることができる。

[定理 10]　グラフ G の独立な閉路を $L_1, L_2, \ldots, L_\mu$ とする。(μ は G の零度) $L_i=L_{y_i}\cup L_{z_i}$, $L_{y_i}\cap L_{z_i}=\phi$, $L_{y_i}\subset E_y$, $L_{z_i}\subset E_z$, $(1\leq i\leq\mu)$ とすると，

$$HT=\left(\frac{\partial}{\partial L_{y_1}}\oplus\int dL_{z_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial L_{y_2}}\oplus\int dL_{z_2}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial L_{y_\mu}}\oplus\int dL_{z_\mu}\right)E_y$$

(証明)　グラフ G の一つの補木を $\bar{t}=\{e_1e_2\ldots e_\mu\}$ とし，$e_1=(v_1, v_1')$, $e_2=(v_2, v_2')$,..., $e_\mu=(v_\mu, v_\mu')$ とすると $HT^{v_1v_{1'}, v_2v_{2'}, \ldots, v_\mu v_{\mu'}}=E_y$ である。$e_i(1\leq i\leq\mu)$ を含む基本閉路を L_{f_i} とし，$L_{f_i}=L_{yf_i}\cup L_{zf_i}$, $L_{yf_i}\cap L_{zf_i}=\phi$, $L_{yf_i}\subset E_y$, $L_{zf_i}\subset E_z$ とすると定理 9 から，

$$HT=\left(\frac{\partial}{\partial L_{yf_1}}\oplus\int dL_{zf_i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial L_{yf_2}}\oplus\int dL_{zf_2}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial L_{yf_\mu}}\oplus dL_{zf_\mu}\right)E_y$$

となる。

ところで，A を部分グラフからなる集合とし g_i, g_j を部分グラフとすると，

$$\frac{\partial A}{\partial(g_i \oplus g_j)}=\frac{\partial A}{\partial g_i}\oplus\frac{\partial A}{\partial g_j},\qquad \int Ad(g_i \oplus g_j)=\int Adg_i \oplus \int Adg_j,\qquad \frac{\partial^2 A}{\partial g_i g_j}=\phi,\qquad \iint Adg_i g_i=\phi$$

である。このことおよび G のすべての閉路が基本閉路の一次結合で表わされることから定理は証明される。(定理終)

[定理 11]　グラフ G の独立なカットセットを $Q_1, Q_2,\ldots, Q_\rho$ とする。(ρ は G の階数) $Q_i=Q_{y_i}\cup Q_{z_i}$, $Q_{y_i}\cap Q_{z_i}=\phi$, $Q_{y_i}\subset E_y$, $Q_{z_i}\subset E_z$, $(1\leq i\leq\rho)$ とすると，

$$HT=\left(\frac{\partial}{\partial Q_{z_1}}\oplus\int dQ_{y_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial Q_{z_2}}\oplus\int dQ_{y_2}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial Q_{z_\rho}}\oplus\int dQ_{y_\rho}\right)E_z$$

(証明)　グラフ G の一つの木を $t=\{e_1e_2\ldots e_\rho\}$ とする。この t の中には G のすべての節点 $V=\{v_1v_2\ldots v_{\rho+1}\}$ を含んでいる。そのため $HT_{v_1,v_2,\ldots,v_{\rho+1}}=E_z$ となる。また t の枝 $e_i(1\leq i\leq\rho)$ に関する基本カットセットを Q_{f_i} とし，$Q_{f_i}=Q_{yf_i}\cup Q_{zf_i}$, $Q_{yf_i}\cap Q_{zf_i}=\phi$, $Q_{yf_i}\subset E_y$, $Q_{zf_i}\subset E_z$ とすると定理 8 から，

$$HT=\left(\frac{\partial}{\partial Q_{zf_1}}\oplus\int dQ_{yf_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial Q_{zf_2}}\oplus\int dQ_{yf_2}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial Q_{zf_\rho}}\oplus\int dQ_{yf_\rho}\right)E_z$$

となる。また定理 10 の証明と同様に G のすべてのカットセットが基本カットセットの一次結合で表わされることから明らか。(証明終)

この定理 10，定理 11 は混成木集合の一生成法でもある。つぎに例を示す。

[例題 2–1]

図 2–2 のグラフの混成木集合を定理 10 および定理 11 を用いて求める。

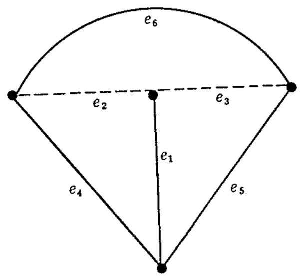

図 2–2　例題2–1のグラフ
Fig. 2–2　A hybrid graph of example 2–1

$$E=\{e_1e_2e_3e_4e_5e_6\}$$
$$E_y=\{e_1e_4e_5e_6\},\qquad E_z=\{e_2e_3\}$$

(i)　このグラフの独立な閉路を L_1, L_2, L_3 とし，

$$L_1=\{e_2e_3e_6\} : L_{y_1}=\{e_6\},\qquad L_{z_1}=\{e_2e_3\}$$
$$L_2=\{e_1e_2e_4\} : L_{y_2}=\{e_1e_4\},\qquad L_{z_2}=\{e_2\}$$
$$L_3=\{e_1e_3e_5\} : L_{y_3}=\{e_1e_5\},\qquad L_{z_3}=\{e_3\}$$

とする。

$$HT=\left(\frac{\partial}{\partial L_{y_1}}\oplus\int dL_{z_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial L_{y_2}}\oplus\int dL_{z_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial L_{y_3}}\oplus\int dL_{z_3}\right)E_y$$

$$A_1=\left(\frac{\partial}{\partial L_{y_3}}\oplus\int dL_{z_3}\right)E_y=\frac{\partial\{e_1e_4e_5e_6\}}{\partial e_1e_5}\oplus\int\{e_1e_4e_5e_6\}de_3=\{e_4e_5e_6,\ e_1e_4e_6,\ e_1e_3e_4e_5e_6\}$$

$$A_2=\left(\frac{\partial}{\partial L_{y_2}}\oplus\int dL_{z_2}\right)A_1=\frac{\partial A_1}{\partial e_1e_2}\oplus\int A_1de_1$$
$$=\{e_4e_6,\ e_3e_4e_5e_6,\ e_5e_6,\ e_1e_6,\ e_1e_3e_5e_6\}\oplus\{e_2e_4e_5e_6,\ e_1e_2e_4e_6,\ e_1e_2e_3e_4e_5e_6\}$$
$$HT=\left(\frac{\partial}{\partial L_{y_1}}\oplus\int dL_{z_1}\right)A_2=\frac{\partial A_2}{\partial e_6}\oplus\int A_2de_2e_3$$
$$=\{e_1,\ e_4,\ e_5,\ e_1e_2e_4,\ e_1e_2e_6,\ e_1e_3e_5,\ e_1e_3e_6,\ e_2e_4e_5,\ e_2e_4e_6,$$
$$e_2e_5e_6,\ e_3e_4e_5,\ e_3e_4e_6,\ e_3e_5e_6,\ e_1e_2e_3e_4e_5,\ e_1e_2e_3e_4e_6,\ e_1e_2e_3e_5e_6\}$$

(ii)　このグラフの独立なカットセットを Q_1, Q_2, Q_3 とし，

$$Q_1=\{e_3e_5e_6\}:Q_{y_1}=\{e_5e_6\},\qquad Q_{z_1}=\{e_3\}$$
$$Q_2=\{e_1e_4e_5\}:Q_{y_2}=\{e_1e_4e_5\},\qquad Q_{z_2}=\phi$$
$$Q_3=\{e_2e_4e_6\}:Q_{y_3}=\{e_4e_6\},\qquad Q_{z_3}=\{e_2\}$$
$$HT=\left(\frac{\partial}{\partial Q_{z_1}}\oplus\int dQ_{y_1}\right)\left(\frac{\partial}{\partial Q_{z_2}}\oplus dQ_{y_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial Q_{z_3}}\oplus dQ_{y_3}\right)E_z$$
$$A_1=\left(\frac{\partial}{\partial Q_{z_3}}\oplus\int dQ_{y_3}\right)E_z=\frac{\partial\{e_2e_3\}}{\partial e_2}\oplus\{e_2e_3\}de_4e_6=\{e_3,\ e_2e_3e_4,\ e_2e_3e_6\}$$
$$A_2=\int A_1dQ_{y_2}=\{e_1e_3,\ e_3e_4,\ e_3e_5,\ e_1e_2e_3e_4,\ e_1e_2e_3e_6,\ e_2e_3e_4e_6,\ e_2e_3e_4e_5,\ e_2e_3e_5e_6\}$$
$$HT=\left(\frac{\partial}{\partial Q_{z1}}\oplus\int dQ_{y_1}\right)A_2=\frac{\partial A_2}{\partial e_3}\oplus A_2de_5e_6$$
$$=\{e_1,\ e_4,\ e_5,\ e_1e_2e_4,\ e_1e_2e_6,\ e_1e_3e_5,\ e_1e_3e_6,\ e_2e_4e_5,\ e_2e_4e_6,$$
$$e_2e_5e_6,\ e_3e_4e_5,\ e_3e_4e_6,\ e_3e_5e_6,\ e_1e_2e_3e_4e_5,\ e_1e_2e_3e_4e_6,\ e_1e_2e_3e_5e_6\}$$

（例題終）

つぎに種々の混成 k 木集合，混成 $\bar{k}$ 木集合を求めるための重要な定理を証明する。

［定理 12］　$V_1, V_2,\dots, V_k$ を節点集合 V の互いに素な部分集合とするとき，

$$HT_{V_1,V_2,\dots,V_{k-1}\cup V_k}=HT_{V_1,V_2,\dots,V_{k-1}}\cap HT_{V_1,V_2,\dots,V_{k-2},V_k}$$

である。

（証明）　$HT_{V_1,V_2,\dots,V_{k-2},V_{k-1}\cup V_k}$ の任意の一つの要素を h_k とする。定義から，$h_k=\alpha_y\cup\alpha_z$, $\alpha_y\cap\alpha_z=\phi$, $\alpha_y\subset E_y$, $\alpha_z\subset E_z$, $\bar{\alpha}_z=E_z-\alpha_z$ とすると，$\alpha_y\cup\bar{\alpha}_z$ は閉路を含まず $\rho-k+2$ 個（ρ：グラフ G の階数）の枝からなり $k-1$ 個の連結成分からなっている。その連結成分を $g_1, g_2,\dots, g_{k-1}$ とし，g_1 に V_1, g_2 に $V_2,\dots, g_{k-1}$ に $V_{k-1}\cup V_k(V_{k-1}\cap V_k=\phi)$ がそれぞれ含まれているとする。g_{k-1} に V_{k-1} が含まれているので V_{k-1} の節点間に道があり定義から $h_k\in HT_{V_1,V_2,\dots,V_{k-1}}$ である。同時に g_{k-1} に V_k が含まれているので $h_k\in HT_{V_1,V_2,\dots V_{k-2},V_k}$ でもある。逆に $(HT_{V_1,V_2,\dots,V_{k-1}}\cap HT_{V_1,V_2,\dots,V_{k-2},v_k})$ の任意の一つの要素を h_k' とする。$h_k'=\alpha_y'\cup\alpha_z'$, $\alpha_y'\cap\alpha_z'=\phi$, $\alpha_y'\subset E_y$, $\alpha_z'\subset E_z$, $\bar{\alpha}_z'=E_z-\alpha_z'$ とすると，$\alpha_y'\cup\bar{\alpha}_z'$ は h_α' が混成 $k-1$ 木であるので閉路を含まず $\rho-k+2$ 個の枝からなりやはり $k-1$ 個の連結成分からなっている。その連結成分を $g_1, g_2,\dots, g_{k-1}$ とし，g_1 に V_1, g_2 に $V_2,\dots, g_{k-2}$ に V_{k-2} がそれぞれ含まれているとする。$h_k'\in HT_{V_1,V_2,\dots,V_{k-1}}$ であるので V_{k-1} は g_{k-1} に含まれる。同様に $h_k'\in HT_{V_1,V_2,\dots,V_{k-2},V_k}$ であるので V_k は g_{k-1} に含まれる。ゆえに g_{k-1} は連結であるので g_{k-1} は $(V_k\cup V_{k-1})$ を含むことになり，$h_k'\in HT_{V_1,V_2,\dots,V_{k-2},V_{k-1}\cup V_k}$ となる。（証明終）

［定理 13］　$Y_2, Y_3,\dots, Y_k$ を互いに素な節点対（枝集合 E の部分集合）集合とすると，

$$HT^{Y_2,Y_3,\dots,Y_{k-2},Y_{k-1}\cup Y_k}=HT^{Y_2,Y_3,\dots,Y_{k-1}}\cap HT^{Y_2,Y_3,\dots,Y_{k-2},Y_k}$$

である。

(**証明**)　$HT^{Y_2, Y_3, \ldots, Y_{k-2}, Y_{k-1} \cup Y_k}$ の任意の一つの要素を h^k とする。$\{Y_2, Y_3, \ldots, Y_{k-2}\}$ のそれぞれの $Y_i(2 \leq i \leq k-2)$ に対して枝 $e_i = (v_i, v_i')$, $v_i v_i' \subset Y_i$ を一つづつ選びその集合を $\gamma = \{e_2, e_3, \ldots, e_{k-2}\}$ とし $\gamma = \gamma_y \cup \gamma_z$, $\gamma_y \cap \gamma_z = \phi$, $\gamma_y \subset E_y$, $\gamma_z \subset E_z$ とする。h^k から γ_y を取り去り，γ_z を加えて得られる部分グラフ $(h^k \oplus \gamma)$ を η^k とすると定義から $Q_1 = \eta^k \oplus e_{k-1}$, $(e_{k-1} = (v_{k-1}, v_{k-1}')$, $v_{k-1}v_{k-1}' \subset Y_{k-1})$ は混成木集合の要素となり $h^k \in HT^{Y_2, Y_3, \ldots, Y_{k-1}}$ となる。また $Q_2 = \eta^k \oplus e_k$, $(e_k = (v_k, v_k')$, $v_k v_k' \subset Y_k$ とすると $Q_2 \in HT$ となり，$h^k \in HT^{Y_2, Y_3, \ldots, Y_{k-2}, Y_k}$ となる。このことから h^k は $(HT^{Y_2, Y_3, \ldots, Y_{k-1}} \cap HT^{Y_2, Y_3, \ldots, Y_{k-2}, Y_k})$ に含まれる。逆に $(HT^{Y_2, Y_3, \ldots, Y_{k-1}} \cap HT^{Y_2, Y_3, \ldots, Y_{k-2}, Y_k})$ の任意の一つの要素を $h^{k'}$ とする。$\{Y_2, Y_3, \ldots, Y_{k-2}\}$ のそれぞれの $Y_i(2 \leq i \leq k-2)$ に対して枝 $e_i = (v_i, v_i')$, $v_i v_i' \subset Y_i$ を一つづつ選びその集合を $\gamma = \{e_2, e_3, \ldots, e_{k-1}\}$ とし，$\eta^{k'} = h^{k'} \oplus \gamma$ とする。$e_{k-1} = (v_{k-1}, v_{k-1}')$, $v_{k-1}v_{k-1}' \subset Y_{k-1}$, $e_k = (v_k, v_k')$, $v_k v_k' \subset Y_k$ とすると $(\eta^{k'} \oplus e_{k-1})$ も $(\eta^{k'} \oplus e_k)$ も HT に含まれる。つまり $h^{k'} \in HT^{Y_2, Y_3, \ldots, Y_{k-2}, Y_{k-1} \cup Y_k}$ となる。(証明終)

定理 6，定理 7，定理 12，定理 13 を用いると混成木集合 HT からいろいろな混成 k 木集合，混成 $\bar{k}$ 木集合を求めることができる。例えば $HT_{v_1v_2, v_5, v_7v_8}$ を求める場合，定理 6 を用いて，HT_{v_1, v_5, v_7} と HT_{v_2, v_5, v_7} を求め定理してから $HT_{v_1, v_5, v_7} \cap HT_{v_2, v_5, v_7} = HT_{v_1v_2, v_5, v_7}$ とし，同様に $HT_{v_1v_2, v_5, v_8}$ を求め，定理 12 から $HT_{v_1v_2, v_5, v_7v_8} = HT_{v_1v_2, v_5, v_7} \cap HT_{v_1v_2, v_5, v_8}$ となる。つぎに $HT^{v_1v_2v_5v_8, v_6v_3, v_7v_9, v_3v_4v_4v_{10}}$ の求め方を考えてみよう。定理 7 を用いて $HT^{v_1v_2, v_6v_3, v_7v_9, v_3v_4}$, $HT^{v_5v_8, v_6v_3, v_7v_9, v_3v_4}$ を求め定理 13 から $HT^{v_1v_2, v_6v_3, v_7v_9, v_3v_4} \cap HT^{v_5v_8, v_6v_3, v_7v_9, v_3v_4} = HT^{v_1v_2v_5v_8, v_6v_3, v_7v_9, v_3v_4}$ とし，同様に $HT^{v_1v_2v_5v_8, v_6v_3, v_7v_9v_4v_{10}}$ を求め定理 13 から，$HT^{v_1v_2v_5v_8, v_6v_3, v_7v_9, v_3v_4v_4v_{10}} = HT^{v_1v_2v_5v_8, v_6v_3, v_7v_9, v_3v_4} \cap HT^{v_1v_2v_5v_8, v_6v_3, v_7v_9, v_4v_{10}}$ となる。

3.　混成 k 木集合と混成 $\bar{k}$ 木集合との関係

ここでは混成 k 木集合と混成 $\bar{k}$ 木集合の関係を述べる。まず混成 $\bar{k}$ 木集合から混成 k 木集合を求める関係を導くためにつぎの補題を証明する。

[補題 9]　グラフ G の一つの枝を $e_1 = (v_1, v_2)$ とする。節点 v_1, v_2 間の e_1 でない一つの道を P_{12} とし，$P_{12} = P_{y_{12}} \cup P_{z_{12}}$, $P_{y_{12}} \cap P_{z_{12}} = \phi$, $P_{y_{12}} \subset E_y$, $P_{z_{12}} \subset E_z$ とすると，

$$HT_{v_1, v_2} = \{e_1\} * \left(\frac{\partial HT^{v_1v_2}}{\partial P_{y_{12}}} \oplus \int HT^{v_1v_2} dP_{z_{12}}\right)$$

である。

(**証明**)　補題 7，補題 6 から $HT^{v_1v_2}$ はグラフ G の e_1 を開放除去して e_1 を可分枝として v_1 (または v_2) に加えたグラフ G^2 (図 3-1 の (a)) の混成木集合 HT^2 であり，また HT_{v_1, v_2} はグラフ G の v_1, v_2 を同一節点にしたグラフ G_2 (図 3-1 の (b)) の混成木集合である。そこで G^2 の節点 v_1, v_2, v_2' を同一節点にすると G_2 となるので $HT^2{}_{v_1, v_2, v_2'} = HT_{v_1, v_2}$。定理 6 から，

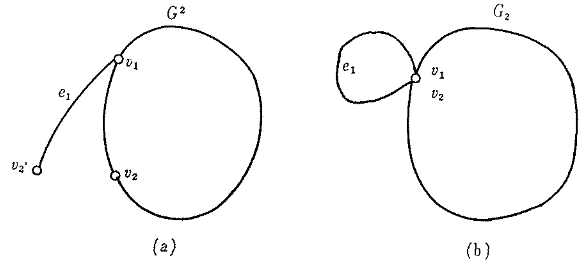

図 3-1　補題 9 の説明のためのグラフ
Fig. 3-1　Explanation (graphs) of lemma 9

$$HT^2_{v_1, v_2, v_2'}=\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{12}}}\oplus\int dP_{z_{12}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial e_1}\right)HT^2 \quad : e_1\in E_y \text{ のとき}$$

または

$$=\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{12}}}\oplus\int dP_{z_{12}}\right)\left(\int de_1\right)HT^2 \quad : e_1\in E_z \text{ のとき}$$

となる。ところが，$e_1\in E_y$ のとき任意の $ht^2\in HT^2$ に対して $e_1\in ht^2$ または $e_1\in E_z$ のとき任意の $ht^2\in HT^2$ に対して $e_1\notin ht^2$ であるので，

$$HT_{v_1, v_2}=HT^2_{v_1, v_2, v_2'}=\{e_1\}*\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{12}}}\oplus\int dP_{z_{12}}\right)HT^{v_1v_2}$$

(証明終)

この補題を繰り返すことによりつぎの定理を得る。

[定理 14] $e_i=(v_i, v_{i+1})$, e_i でない v_i, v_{i+1} 間の道を $P_{i_{i+1}}=P_{y_{i_{i+1}}}\cup P_{z_{i_{i+1}}}$, $P_{y_{i_{i+1}}}\cap P_{z_{i_{i+1}}}=\phi$, $P_{y_{i_{i+1}}}\subset E_y$, $P_{z_{i_{i+1}}}\subset E_z$, $(1\leq i\leq k-1)$ とする。ただし $P_{i_{i+1}}$ に $e_j=(v_j, v_{j+1})$, $(1\leq j\leq k-1$, $i\neq j)$ を含んではならない。このとき，

$$HT_{v_1, v_2, \ldots, v_k}=\{e_1e_2 \ldots e_{k-1}\}*\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{12}}}\oplus\int dP_{z_{12}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{23}}}\oplus dP_{z_{23}}\right)\cdots$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{k-1k}}}\oplus\int dP_{z_{k-1k}}\right)HT^{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k}$$

である。

(証明) 補題 9 の繰り返しにより明らかであるが $P_{i_{i+1}}$ の存在を述べる必要がある。もし条件を満足する $P_{i_{i+1}}$ が存在しないとすると，そのとき e_i は可分枝であるか，$\{e_1e_2e_3 \ldots e_{k-1}\}$ の部分集合がグラフ G のカットセットをなしているときでありいずれのときも混成 $\bar{k}$ 木集合 $HT^{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k}$ は空集合となっている。(証明終)

つぎに混成 k 木集合から混成 $\bar{k}$ 木集合を求める方法を考える。

[補題 10] グラフ G の一つの枝を $e_1=(v_1, v_2)$ とする。e_1 に関するサブカットセットを S_{12} とし，$S_{12}=S_{y_{12}}\cup S_{z_{12}}$, $S_{y_{12}}\cap S_{z_{12}}=\phi$, $S_{y_{12}}\subset E_y$, $S_{z_{12}}\subset E_z$ とすると，

$$HT^{v_1v_2}=\{e_1\}*\left(\frac{\partial HT_{v_1, v_2}}{\partial S_{z_{12}}}\oplus\int HT_{v_1, v_2}dS_{y_{12}}\right)$$

である。

(証明) 補題 9 の証明と同様に，$HT^{v_1v_2}$ は図 3–1 (a) の G^2 の混成木集合であり，HT_{v_1, v_2} は図 3–1 (b) の G_2 混成木集合 HT_2 である。G_2 の v_1, v_2 を分割し，e_1 を開放除去し可分枝とすれば G^2 となる。G_2 で e_1 は自己閉路のままで v_1, v_2 を分割するには，

$$\left(\frac{\partial}{\partial S_{z_{12}}}\oplus\int dS_{y_{12}}\right)HT_2$$

を求めればよい。つぎに e_1 を可分枝にするには，

$$e_1\in E_y \text{ のとき，} \int de_1\left(\frac{\partial}{\partial S_{z_{12}}}\oplus\int dS_{y_{12}}\right)HT_2,$$

$$e_1\in E_z \text{ のとき，} \frac{\partial}{\partial e_1}\left(\frac{\varrho}{\partial S_{z_{12}}}\oplus\int dS_{y_{12}}\right)HT_2$$

を求めればよい。$e_1\in E_y$ のとき任意の $ht_2\in HT_2$ に対して $e_1\notin ht_2$ であり，$e_1\in E_z$ のとき任意の $ht_2\in HT_2$ に対して $e_1\in ht_2$ である。このことから，

$$HT^{v_1v_2}=\{e_1\}*\left(\frac{\partial HT_{v_1, v_2}}{\partial S_{z_{12}}}\oplus\int HT_{v_1, v_2}dS_{y_{12}}\right)$$

(証明終)

この補題を拡張するとつぎの定理を得る。

[定理 15] $e_i=(v_i,\ v_{i+1})$, e_i に関するサブカットセットを $S_{i_{i+1}}$ とし, $S_{i_{i+1}}=S_{y_{i_{i+1}}}\bigcup S_{z_{i_{i+1}}}$, $S_{y_{i_{i+1}}}\bigcap S_{z_{i_{i+1}}}=\phi$, $S_{y_{i_{i+1}}}\subset E_y$, $S_{z_{i_{i+1}}}\subset E_z$ とする。ただし $S_{i_{i+1}}$ の中に $e_j(1\leq j\leq k-1,\ i\neq j)$ を含んではならない。

$$HT^{v_1v_2,\,v_2v_3,\,\dots,\,v_{k-1}v_k}=\{e_1e_2\dots e_{k-1}\}*\left(\frac{\partial}{\partial S_{z_{12}}}\oplus\int dS_{y_{12}}\right)$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial S_{z_{23}}}\oplus\int dS_{y_{23}}\right)\dots\left(\frac{\partial}{\partial S_{z_{k-1k}}}\oplus\int dS_{y_{k-1k}}\right)HT_{v_1,\,v_2,\,\dots,\,v_k}$$

(証明) 補題10の繰り返しにより明らかであるが, $S_{i_{i+1}}$ が存在する理由を述べる必要がある。もし条件を満足する $S_{i_{i+1}}$ が存在しないとすると $\{e_1e_2\dots e_{k-1}\}$ の部分集合の中に G の閉路をなすものが存在し混成 k 木集合 $HT_{v_1,v_2,\dots,v_k}$ は空集合となっている。(証明終)

定理14, 定理15を例によって説明する。

[例題 3-1]

図3-2のグラフを考える。このグラフにおいて,

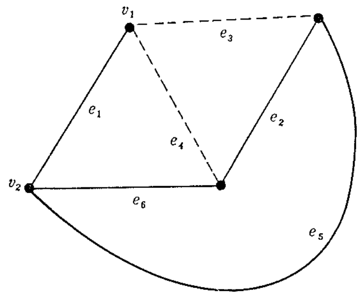

図 3-2 例題3-1のグラフ

Fig. 3-2 A hybrid graph of example 3-1

$$E=\{e_1e_2e_3e_4e_5e_6\}$$
$$E_y=\{e_1e_2e_5e_6\},\ E_z\{e_3e_4\}$$

とすると混成木集合 HT は,

$$HT_3=\{e_1e_2e_3e_4e_5,\ e_1e_2e_3e_4e_6,\ e_1e_3e_4e_5e_6,\ e_1e_2e_3,\ e_1e_2e_4,\ e_1ee_5,$$
$$e_1e_4e_6,\ e_2e_3e_5,\ e_2e_3e_6,\ e_2e_4e_5,\ e_2e_4e_6,\ e_3e_5e_6,\ e_4e_5e_6,\ e_1,\ e_5,\ e_6\}$$

となる。

$e_1=(v_1,\ v_2)$ とすると,

$$HT^{v_1,\,v_2}=\{e_2e_3e_4e_5,\ e_2e_3e_4e_6,\ e_3e_4e_5e_6,\ e_2e_3,\ e_2e_4,\ e_3e_5,\ e_4e_6,\ \phi\}$$
$$HT^{v_1v_2}=\{e_1e_2e_3e_5,\ e_1e_2e_3e_6,\ e_1e_2e_4e_5,\ e_1e_2e_4e_6,\ e_1e_3e_5e_6,\ e_1e_4e_5e_6,\ e_1e_5,\ e_1e_6\}$$

となる。

(i) $P_{12}=\{e_4e_6\}$, $P_{y_{12}}=\{e_6\}$, $P_{z_{12}}=\{e_4\}$ とすると,

$$\{e_1\}*\left(\frac{\partial HT^{v_1v_2}}{\partial P_{y_{12}}}\oplus\int HT^{v_1v_2}dP_{z_{12}}\right)=\{e_1\}*\left(\frac{\partial HT^{v_1v_2}}{\partial e_6}\oplus\int HT^{v_1v_2}de_4\right)$$
$$=\{e_1\}*[\{e_1e_2e_3,\ e_1e_2e_4,\ e_1e_3e_5,\ e_1e_4e_5,\ e_1\}\oplus\{e_1e_2e_3e_4e_5,\ e_1e_2e_3e_4e_6,\ e_1e_3e_4e_5e_6,$$
$$e_1e_4e_5,\ e_1e_4e_6\}]=\{e_2e_3e_4e_5,\ e_2e_3e_4e_6,\ e_3e_4e_5e_6,\ e_2e_3,\ e_2e_4,\ e_3e_5,\ e_4e_6,\ \phi\}$$

となり, これは HT_{v_1,v_2} と一致する。

(ii)　$S_{12}=\{e_2e_4e_5\}$，$S_{y_{12}}=\{e_2e_5\}$，$S_{z_{12}}=\{e_4\}$ とすると，

$$\{e_1\}*\left(\frac{\partial HT_{v_1,v_2}}{\partial S_{z_{12}}}\oplus\int HT_{v_1,v_2}dS_{y_{12}}\right)=\{e_1\}*\left(\frac{\partial HT_{v_1,v_2}}{\partial e_4}\oplus\int HT_{v_1,v_2}de_2e_5\right)$$
$$=\{e_1\}*[\{e_2e_3e_5,\ e_2e_3e_6,\ e_3e_5e_6,\ e_2,\ e_6\}\oplus\{e_2e_3e_4e_5e_6,\ e_2e_3e_5,\ e_2e_4e_6,\ e_2\}\oplus\{e_2e_3e_4e_5e_6,\ e_2e_3e_5,\ e_2e_4e_5,\ e_4e_5e_6,\ e_5\}]=\{e_1e_2e_3e_5,$$
$$e_1e_2e_3e_6,\ e_1e_2e_4e_5,\ e_1e_2e_4e_6,\ e_1e_3e_5e_6,\ e_1e_4e_5e_6,\ e_1e_5,\ e_1e_6\}$$

となりこれは $HT^{v_1v_2}$ と一致する。(例題終)

また混成 k 木集合と混成 $\bar{k}$ 木集合との間につぎのような関係がある。この関係は能動回路網に対する位相幾何学的公式を導く場合に重要な役割を果たす。

[定理 16]　$e_{m_i}=(v_{m_i},\ v'_{m_i})$，$e_{n_i}=(v_{n_i},\ v'_{n_i})$，$e_{m_i}\neq e_{n_i}(1\leq i\leq k)$，$v_{m_i}$，$v'_{m_i}$ 間の一つの道 P_{m_i}，v_{n_i}，v'_{n_i} 間の一つの道を P_{n_i} とし，$P_{m_i}=P_{y_{m_i}}\cup P_{z_{m_i}}$，$P_{y_{m_i}}\cap P_{z_{m_i}}=\phi$，$P_{y_{m_i}}\subset E_y$，$P_{z_{m_i}}\subset E_z$，$P_{n_i}=P_{y_{n_i}}\cup P_{z_{n_i}}$，$P_{y_{n_i}}\cap P_{z_{n_i}}=\phi$，$P_{y_{n_i}}\subset E_y$，$P_{z_{n_i}}\subset E_z$ とする。

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{m_1}}}\oplus\int Pp_{z_{m_1}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{m_2}}}\oplus\int dP_{z_{m_2}}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{m_k}}}\oplus\int dP_{z_{m_k}}\right)HT\right]$$
$$\cap\left[\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{n_1}}}\oplus\int dP_{z_{n_1}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{n_2}}}\oplus\int dP_{z_{n_2}}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{n_k}}}\oplus\int dP_{z_{n_k}}\right)HT\right]$$
$$=\{e_{m_1}e_{m_2}\ldots e_{m_k}e_{n_1}e_{n_2}\ldots e_{n_k}\}*[HT^{v_{m_1}v_{m_1}',v_{m_2}v_{m_2}',\ldots,v_{m_k}v'_{m_k}}\cap HT^{v_{n_1}v'_{n_1},v_{n_2}v'_{n_2},\ldots,v_{n_k}v_{n_k}'}]$$

(証明)

$$H_1=\left[\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{m_1}}}\oplus\int dP_{z_{m_1}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{m_2}}}\oplus\int dP_{z_{m_2}}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{m_k}}}\oplus\int dP_{z_{m_k}}\right)HT\right]$$
$$\cap\left[\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{n_1}}}\oplus\int dP_{z_{n_1}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{n_2}}}\oplus\int dP_{z_{n_2}}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial P_{y_{n_k}}}\oplus\int dP_{z_{n_k}}\right)HT\right]$$
$$H_2=[HT^{v_{m_1}v_{m'_1},v_{m_2}v_{m'_2},\ldots,v_{m_k}v_{m_k'}}\cap HT^{v_{n_1}v_{n_1'},v_{n_2}v_{n_2'},v_{n_k}v_{n_k'}}]$$

とし，H_1，H_2 の任意の一つの要素をそれぞれ h_k，h^k とする。また，$\alpha_m=\{e_{m_1}e_{m_2}\ldots e_{m_k}\}=\alpha_{y_m}\cup\alpha_{z_m}$，$\alpha_{y_m}\cap\alpha_{z_m}=\phi$，$\alpha_{y_m}\subset E_y$，$\alpha_{z_m}\subset E_z$，$\alpha_n=\{e_{n_1}e_{n_2}\ldots e_{n_k}\}=\alpha_{y_n}\cup\alpha_{z_n}$，$\alpha_{y_n}\cap\alpha_{z_n}=\phi$，$\alpha_{y_n}\subset E_y$，$\alpha_{z_n}\subset E_z$ とする。定義から明らかなように $(h_k\cup\alpha_{y_m})-\alpha_{z_m}$，$(h_k\cup\alpha_{y_n})-\alpha_{z_n}$ は共に混成木集合 HT に含まれる。ゆえに $g^k=h_k\oplus(\alpha_m\cup\alpha_n)$ とすると，$g^k=(h_k\cup\alpha_{y_m}\cup\alpha_{y_n})-(\alpha_{z_m}\cup\alpha_{z_n})$ となり $(g^k\cup\alpha_{z_n})-\alpha_{y_n}$ および $(g^k\cup\alpha_{z_m})-\alpha_{y_m}$ は HT に含まれることになる。このことから $g^k\in H_2$ と(定義から)なる。ゆえに，$h_k\oplus(\alpha_m\cup\alpha_n)\in H_2$ つまり $h_k\in(\alpha_m\cup\alpha_n)*H_2$ となる。逆に $(h^k\cup\alpha_{z_m})-\alpha_{y_m}$，$(h^k\cup\alpha_{z_n})-\alpha_{y_n}$ は共に HT に含まれる。(定義から) $g_k=h^k\oplus(\alpha_m\cup\alpha_n)$ とすると $g_k=(h^k\cup\alpha_{z_m}\cup\alpha_{z_n})-(\alpha_{y_m}\cup\alpha_{y_n})$ となり $(g_k\cup\alpha_{y_n})-\alpha_{z_n}$，$(g_k\cup\alpha_{y_m})-\alpha_{z_m}$ は共に HT に含まれることになる。このことから $g_k\in H_1$ となる。ゆえに $h^k\oplus(\alpha_m\cup\alpha_n)\in H_1$ となる。$h^k\in(\alpha_m\cup\alpha_n)*H_2$ でかつ $h^k\oplus(\alpha_m-\alpha_n)\in H_1$ であるので定理は証明された。(証明終)

この定理を説明するための例をあげる。

[例題 3-2]

図 3-3 のグラフを考える。

$$E=\{e_1e_2e_3e_4e_5e_6\}$$
$$E_y=\{e_1e_2e_5e_6\},\qquad E_z=\{e_3e_4\}$$
$$HT=\{e_1e_2e_3e_4e_5,\ e_1e_2e_3e_4e_6,\ e_1e_3e_4e_5e_6,\ e_1e_2e_3,\ e_1e_2e_4,\ e_1e_3e_5,$$
$$e_1e_4e_6,\ e_2e_3e_5,\ e_2e_3e_6,\ e_2e_4e_5,\ e_2e_4e_6,\ e_3e_5e_6,\ e_4e_5e_6,\ e_1,\ e_5,\ e_6\}$$

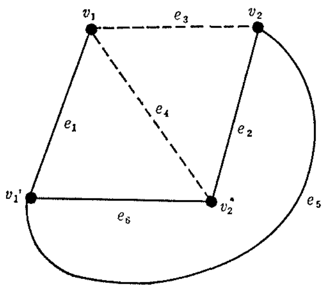

図 3-3　例題 3-2 のグラフ

Fig. 3-3　A hybrid graph of example 3-2

$e_1=(v_1, v_1')$, $e_2=(v_2, v_2')$ として定理 7 を用いて $HT^{v_1v_1'}$, $HT^{v_2v_2'}$ を求める。

$$HT^{v_1v_1'}=\{e_1e_2e_3e_5,\ e_1e_2e_3e_6,\ e_1e_2e_4e_5,\ e_1e_2e_4e_6,\ e_1e_3e_5e_6,\ e_1e_4e_5e_6,\ e_1e_5,\ e_1e_6\}$$

$$HT^{v_2v_2'}=\{e_1e_2e_3e_4e_5e_6,\ e_1e_2e_3e_5,\ e_1e_2e_4e_6,\ e_2e_3e_5e_6,\ e_2e_4e_5e_6,\ e_1e_2,\ e_2e_5,\ e_2e_6\}$$

$$HT^{v_1v_1'}\cap HT^{v_2v_2'}=\{e_1e_2e_3e_5,\ e_1e_2e_4e_6\}$$

ゆえに，

$$\{e_1e_2\}*(HT^{v_1v_1'}\cap HT^{v_2v_2'})=\{e_3e_5,\ e_4e_6\}$$

また，定理 6 を用いて $HT_{v_1,v_1'}$, $HT_{v_2,v_2'}$ を求める。

$$HT_{v_1,v_1'}=\{e_2e_3e_4e_5,\ e_2e_3e_4e_6,\ e_3e_4e_5e_6,\ e_2e_3e,\ {}_3e_5,\ e_4e_6,\ \phi\}$$

$$HT_{v_2,v_2'}=\{e_1e_3e_4e_5,\ e_1e_3e_4e_6,\ e_1e_3,\ e_1e_4,\ e_3e_5e_3e_6,\ e_4e_5,\ e_4e_6\}$$

$$HT_{v_1,v_1'}\cap HT_{v_2,v_2'}=\{e_3e_5,\ e_4e_6\}$$

ゆえに，

$$HT_{v_1,v_1'}\cap HT_{v_2,v_2'}=\{e_1e_2\}*(HT^{v_1v_1'}\cap HT^{v_2v_2'})$$

（例題終）

4. 結　　言

前論文において示した混成 2 木集合，混成 $\bar{2}$ 木集合の性質を混成 k 木集合，混成 $\bar{k}$ 木集合に拡張し，さらに混成 k 木集合と混成 $\bar{k}$ 木集合との関係を述べた。定理 6 を用いて混成木集合から混成 k 木集合が求まり，定理 7 を用いると混成木集合から混成 $\bar{k}$ 木集合が求まる。逆に定理 8 を用いて混成 k 木集合から混成木集合が，定理 9 によって混成 $\bar{k}$ 木集合が求まる。これを拡張して定理 10，定理 11 ではグラフの独立な閉路または独立なカットセットからそのグラフの混成木集合が求まることを示している。これは混成木集合の一生成法である。また定理 6，定理 7，定理 12，定理 13 を用いて種々の混成 k 木集合，混成 $\bar{k}$ 木集合を求めることができる。さらに，混成 $\bar{k}$ 木集合から混成 k 木集合および混成 k 木集合から混成 $\bar{k}$ 木集合の求め方を示し（定理 13，定理 14），定理 16 では，ある種の混成 k 木集合（部分集合）と混成 $\bar{k}$ 木集合の部分集合との関係を述べた。

文　　献

1）仙石正和，黒部貞一，小川吉彦，松本　正：“混成 k 木集合，混成 $\bar{k}$ 木集合とその性質 (I)” 北大工学部研究報告 No. 67，昭 48. 6.

（注）その他の文献は上記論文の文献欄に記してある。