



Title	有限要素法による切削工具系の振動解析
Author(s)	秋山, 俊彦; 今野, 広; 岸浪, 建史; 斎藤, 勝政
Citation	北海道大學工學部研究報告, 70, 13-24
Issue Date	1974-02-20
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/41191">http://hdl.handle.net/2115/41191</a>
Type	bulletin (article)
File Information	70_13-24.pdf



[Instructions for use](#)

# 有限要素法による切削工具系の振動解析

秋山俊彦 今野 広  
岸浪建史 斎藤勝政

(昭和48年7月5日受理)

## Dynamic Analysis of Cutting Tools by the Finite Element Method

Toshihiko AKIYAMA Hiroshi KONNO\*  
Tateshi KISHINAMI Katsumasa SAITO

### Abstract

It is known that the phenomena of chatter vibration in metal cutting process gives unfavorable influences on the accuracy of required geometries and the finished surface of workpieces and the life of cutting tools. Various investigations have been made on the chatter vibration especially self-excited chatter of machine tools.

In this paper, an investigation on the dynamic behavior of cutting tools was made in an attempt to clarify the influences of the tool clearance angle on the chatter vibration in the metal cutting process and the effects of the overhang length of the cutting tool on the vibrational behaviors of the tool post by using the finite element method.

The main results obtained are as follows.

- (1) The natural frequency of chatter frequency of the cutting tool increases with the increase of tool clearance angle.
- (2) By increasing the overhang length of the cutting tool, the natural frequency of vibration of the tool post increases somewhat, but higher natural vibration frequencies decrease inversely.

### 1. 緒 論

切削作業中に生じるびびり現象は製品の加工精度、仕上面あらさ、および工具寿命に、悪影響を及ぼすことが知られている。このびびり現象の中で自励びびり振動と呼ばれる現象は、工作機械の動剛性すなわちその構造が有する固有振動特性と密接な関係のあることが H. E. Merrit<sup>1)</sup>らによって指摘された。

また有限要素法あるいは Reseptance 法を用いて佐田<sup>2)</sup>、星<sup>3)</sup>らによって、主に工作機械全体の動剛性とびびり振動との関連性についての研究がなされてきた。

しかし、工具突き出し長さが、びびり振動と密接な関係<sup>4)</sup>があることは明きらかにされているが、さらに、ある範囲のびびり振動は、工作機械の取り付け部まで、その解析範囲を広げなければならぬ。

このように、びびり振動においてみられる振動数の全てが同一の解析模型から説明できるも

\* 日本ビクター株式会社

のではなく、発生振動数の範囲の違いによって考えるべきである。またそれらの2次、3次等の高次の振動特性をも考えておかなければならない。

以上の観点から、びびり現象にかかわりを持つ系として、切削工具、工具台、工作機械の序列が考えられるが、本研究では、旋削作業における工具刃先と切削工具系すなわち、切削工具と工具台とを含めた系を2次元問題として扱い、その振動特性を有限要素法を用いて求め、工具刃先の形状の変化が切削工具の振動特性におよぼす影響について、模型実験を含めて解析を行なった。なお最後に、解析対象を3次元的に模型化する場合をとり上げ、その解析結果に若干の検討を加えた。

## 2. 振動解析への有限要素法の適用

### 2-1 系の運動方程式

構造物の振動解析を行なう場合、よく知られているように、D'Alembertの原理を用いて、質量と加速度の積に負符号を付けた慣性項を導入すれば問題を静的なものとして取り扱うことができる。また粘性減衰のない場合を考えると運動方程式は有限要素法による表現にしたがい次式のように表わされる<sup>5)</sup>。

$$[K] \cdot \{\delta\} = -[M] \cdot \{\ddot{\delta}\} + \{p\} \quad (1)$$

ここで、 $[K]$ は構造物全体の剛性マトリックス、 $[M]$ は構造物全体の質量マトリックスであり、次式で示される各要素の剛性マトリックス $[k]$ と質量マトリックス $[m]$ とによって構成される。また $\{\delta\}$ は節点変位ベクトル、 $\{p\}$ は節点荷重ベクトルである。

$$\left. \begin{aligned} [k] &= \int [B]^T \cdot [D] \cdot [B] d(\text{vol}) \\ [m] &= \int [N]^T \rho [N] d(\text{vol}) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし、 $[B]$ : ひずみ—変位マトリックス

$[D]$ : 応力—ひずみマトリックス

$[N]$ : 要素の節点座標によって構成されるマトリックス

$\rho$ : 単位体積当りの質量

今、系の減衰のない場合の自由振動すなわち固有振動数とそれに対応する固有振動モードを求めるためには、系に外力が作用しない場合、すなわち(1)式において $\{p\} = \{0\}$ とした場合の次の運動方程式(3)を解けばよい。

$$[K] \cdot \{\delta\} = -[M] \cdot \{\ddot{\delta}\} \quad (3)$$

この(3)式は有限自由度の振動方程式の典型的な形であり、自由振動においては系の全ての点と同位相で運動するので、

$$\{\delta\} = \{\delta_0\} \sin \omega t \quad (4)$$

と書くことができる。ここで $\{\delta_0\}$ は振幅ベクトル、 $\omega$ は角振動数である。この(4)式を(3)式に代入すると、次式が得られる。

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\delta_0\} = \{0\} \quad (5)$$

この式は典型的な固有値問題であり、一般にマトリックス $[M]$ および $[K]$ の次数だけ(5)式を満足する $\omega^2$ の値とそれに対応する $\{\delta_0\}$ が存在する。このような固有値問題を解くために、いくつかの方法<sup>6),7)</sup>があるが、本研究で用いた方法について以下に説明する。

## 2-2 Power Method による 2 次元振動解析

有限要素法によって 2 次元振動問題を解くためには、まず構造物を有限の広さを持つ有限個の 3 角形要素に分割して模型化を行ない、この有限個の要素について (5) 式を組み立てる。次にこの (5) 式で示される固有値問題を解くために、本研究では反復法の一つである、Power Method を用いた。

(5) 式を変形すると

$$\left( \frac{[I]}{\omega^2} - [K]^{-1} \cdot [M] \right) \cdot \{\delta_0\} = \{0\} \quad (6)$$

ただし、 $[I]$  は単位マトリックスである。(6) 式において  $[K]^{-1} \cdot [M]$  は、一般に対称マトリックスとならないために、解析手段として Power Method が有効に適用できない場合がある。しかし、次の操作<sup>8)</sup> すなわち  $[K]$  を (7) 式に示すように、三角マトリックス  $[A]$  の積の形で表わすと、(6) 式は対称マトリックスを含む固有値問題に変換され Power Method の適用が可能になる。

$$[K] = [A]^T \cdot [A] \quad (7)$$

ただし、 $[A]$  は対角要素より上側は全て 0 要素のマトリックスである。(7) 式を用い、さらに  $[I]/\omega^2 = \lambda$  と置くと (6) 式は次のようになる。

$$[[A]^{-1}]^T \cdot [M] \cdot \{\delta_0\} = \lambda \cdot [A] \cdot \{\delta_0\} \quad (8)$$

次に

$$[A] \cdot \{\delta_0\} = \{Z\} \quad (9)$$

と置くと (6) 式は次のようになる。

$$[H] \cdot \{Z\} = \lambda \cdot \{Z\} \quad (10)$$

ただし、

$$[H] = [[A]^{-1}]^T \cdot [M] \cdot [A]^{-1} = [[A]^T]^{-1} \cdot [M] \cdot [A]^{-1}$$

したがって (10) 式により、問題は実対称マトリックス  $[H]$  の固有値  $\lambda$  と、それに対応する固有ベクトル  $\{Z\}$  を求める問題に変換された。

そこで今、境界条件から剛体支持されている節点に対応する行と列とを  $[H]$  マトリックスより除いたマトリックスを  $[OH]$  とする。そして、(10) 式のマトリックス  $[H]$  の代わりに  $[OH]$  を用いて、この初期固有ベクトル  $\{Z_0\}$  を任意に仮定するそして  $\{v_0\} = [OH] \cdot \{Z_0\}$  なる  $\{v_0\}$  を計算し、 $\{v_0\}$  の成分中、絶対値最大の成分を 1 とするように、すなわち  $\{v_0\} = C_1 \{Z_1\}$  のような  $C_1$  および  $\{Z_1\}$  を求める。以後同様に、 $[OH]$  と  $\{Z_i\}$  の積から  $\{v_i\}$ ,  $C_2$  を求める手順を繰り返すと  $[OH]$  の固有値  $C_i$  とそれに対応する固有ベクトル  $\{Z_i\}$  が求められる。最終的には (9) 式より、

$$\{\delta_0\} = [A]^{-1} \cdot \{Z_i\} \quad (11)$$

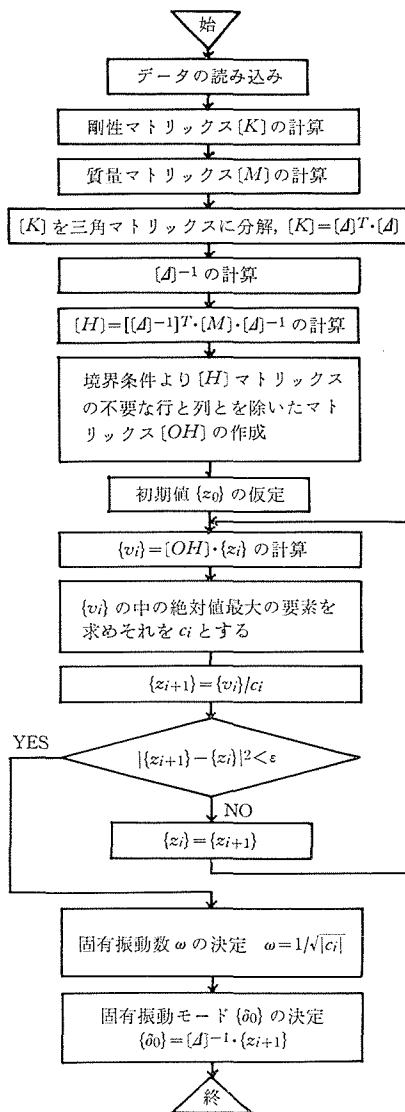


図1 2次元振動解析のためのプログラムフローチャート

として固有ベクトル(固有振動モード)  $\{\delta_0\}$  が求められる。なお2次, 3次の固有振動数と固有振動モードを求めるためには, すでに求められている基本固有振動モードとの直交条件を考慮に入れて, 前と同様な計算を行なえばよい。しかし実際の旋削作業で生じるびびり振動には高次の振動は現われてこないで, 本解析においては, 3次までの特性を求めるにとどめた。この Power Method は仮定する初期固有ベクトルの値および分割要素の数に関係なく計算時間の短かいのが特徴であるが, しかし系全体の剛性マトリックスおよび質量マトリックスを記憶しなければならないため, これらのマトリックスの次数が大きくなる場合は電算機の記憶容量の点から Power Method の適用が不可能になる。図1に, この場合の電算機プログラム, フローチャートを示した。計算は北海道大学大型計算機センターの FACOM 230-60 で行なった。

### 3. 切削工具刃先の振動特性

#### 3-1 解析のための切削工具刃先の模型化

まず, 工具刃先の形状, 特に工具にげ角の大きさが切削工具の振動特性におよぼす影響を求めるために, 図2に示した工具刃先の模型化を行なった。工具すくい角を一定( $0^\circ$ )とし, 工具にげ角を $0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ と変化させ工具の上部は剛体支持とした。切削工具の弾性係数を $21,000 \text{ kg/mm}^2$ , ポアソン比を0.3, 密度を $8 \text{ g/cm}^3$ とした。

#### 3-2 刃先形状の変化が切削工具の振動特性におよぼす影響

Power Method によって求めた工具にげ角の変化による工具刃先の基本固有振動数と基本固有振動モードの変化を図2に示した。

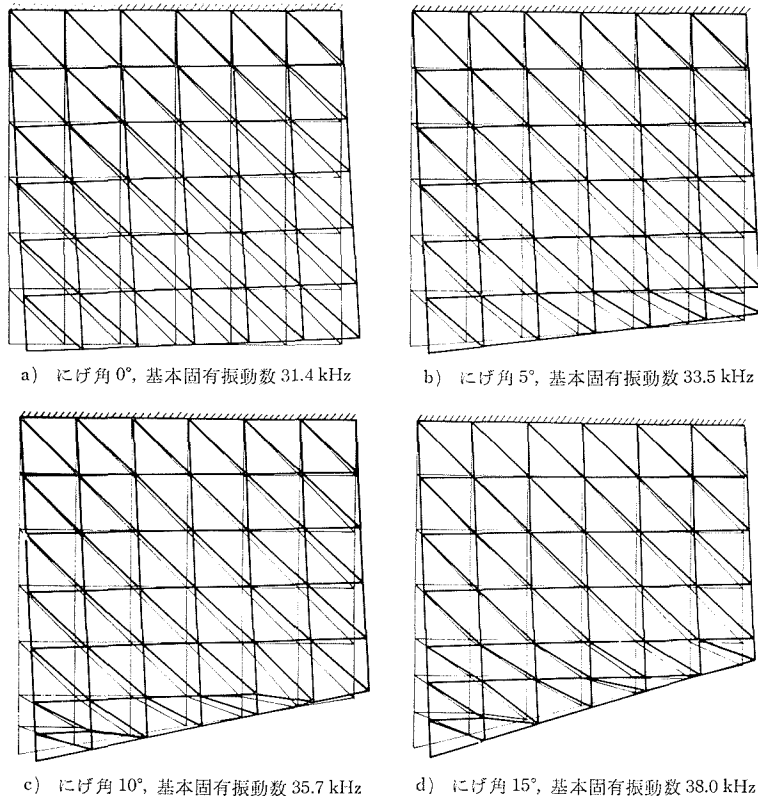


図2 工具刃先の基本固有振動モード

基本固有振動モードは、一端固定の片持ちはりの振動に近いものであるが、工具にげ角を大きくすると基本固有振動数は増加する。このように、切削工具の2次元的な振動解析の結果、びびり振動が最も生じ易いと考えられる基本固有振動数が(30~40) kHzとかなり高いことから、旋削作業中に生じるびびり振動と切削工具の振動特性との関連は、びびり振動の高振動数の場合しか考えられない。また、工具にげ角が大きくなるにしたがって、基本固有振動数が増加することからも、切削工具の振動特性とびびり振動との相関は小さいものと考えられる。工具にげ角が小さい場合のびびり振動防止の効果は工具にげ面と被削材仕上面との接触による減衰作用によるものと考えられる。また切削工具を単純に一端固定の片持ちはりと仮定して、工具の突き出し長さに対する基本固有振動数の厳密解を求め、その変化をみると、図4の①印で示したように、有限要素法による解析結果とほぼ一致することがわかる。

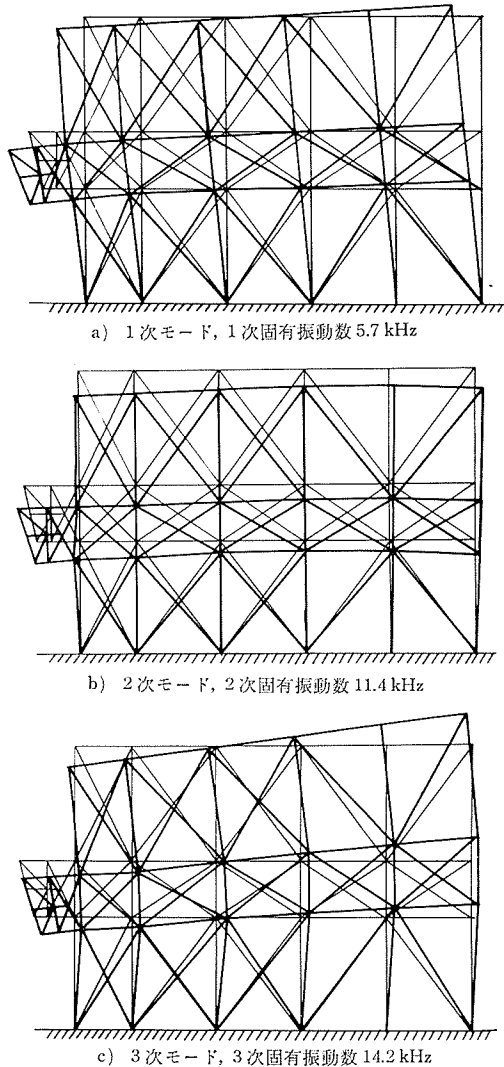


図3 切削工具系の振動モード

表1 工具の突き出し長さに対する固有振動数の変化 (Power Method による計算結果)

次数	工具の突き出し長さ		
	20 mm	30 mm	40 mm
1次	5.7 kHz	5.87 kHz	6.13 kHz
2次	11.4 kHz	11.5 kHz	9.13 kHz
3次	14.2 kHz	14.0 kHz	13.2 kHz

か考えられない。また、工具にげ角が大きくなるにしたがって、基本固有振動数が増加することからも、切削工具の振動特性とびびり振動との相関は小さいものと考えられる。工具にげ角が小さい場合のびびり振動防止の効果は工具にげ面と被削材仕上面との接触による減衰作用によるものと考えられる。また切削工具を単純に一端固定の片持ちはりと仮定して、工具の突き出し長さに対する基本固有振動数の厳密解を求め、その変化をみると、図4の①印で示したように、有限要素法による解析結果とほぼ一致することがわかる。

#### 4. 切削工具系の振動特性

##### 4-1 解析のための切削工具系の模型化

切削工具を工具台に保持した状態の切削工具系の振動特性と、工具の突き出し長さが工具台の振動特性におよぼす影響を検討するために、次のような切削工具系の模型化を行なった。まず図3に示すような要素分割模型を用い、工具台の底面は剛体支持とし、また工具の締結状態は考慮せず、工具と工具台は一体であるとした。そして工具の突き出し長さを20, 30, 40 mmと変化させた場合の解析を行なった。用いた材料定数は工具刃先の場合と同じである。

##### 4-2 工具の突き出し長さが切削工具系の振動特性に与える影響

図3および表1に、Power Methodによって得られた切削工具系の振動特性を示した。図3には、工具の突き出し長さが20 mmの場合の第1次から第3次までの固有振動数と固有振動モードの結果を示し、工具の突き出し長さを30 mm, 40 mmとした場合の結果は表1にまとめて示した。

図3および表1から、切削工具系の基本固有振動数は工具の突き出し長さによらず、約6 kHzの値を示しているが、工具の突き出し長

さが大きくなると基本固有振動数は僅か増加するが、逆に第2次、第3次の固有振動数は減少する傾向を示している。

また、普通炭素鋼の丸棒の外周旋削実験を行ない、工具の突き出し長さを変化させて、びびり振動が生じやすいようにした場合の実験結果を+印で、工具の突き出し長さを30mmとした場合の工具台の軟鋼平板模型(図5-1参照)による基本固有振動の測定結果を△印で、さらに比較のために有限要素法による解析結果を●印で示して図4にまとめた。この図から明らかのように、工具の突き出し長さが30mmの場合は3者の結果はほぼ一致するが、工具の突き出し長さが大きくなると、解析結果と旋削実験の結果との間に約6kHzを境として差が生じはじめている。これは旋削実験の場合、工具の突き出し長さの影響が振動特性に大きく現われて、工具を含めた工具台全体の振動特性が、結果として現われていないのに対し、解析による結果は、工具の突き出し長さの大きさによらず、系全体の振動特性を示すためであると考えられる。さらに同図から、工具の突き出し長さを変えた場合の旋削実験による結果と、上述したように、切削工具を一端固定の片持ちはりとして行なった厳密解とが、工具の突き出し長さの大きさによらず、よく一致していることから、旋削実験の結果には、工具の突き出し部のみの振動特性が現われていることがわかる。

##### 5. 考察(切削工具系の模型化に伴う解析手法の相異と解析結果との関連性について)

有限要素法を用いて、振動解析を行なう場合、解析対象物の模型化(要素分割)を行なう必要がある。模型化の方式によってその解析方法が異なってくるから、切削工具系の振動解析に有限要素法を用いる場合には、その模型化に伴う解析手法の相異と解析結果との関連性を検討しなければならない。

3次元的な構造を有する切削工具系(切削工具+工具台)の振動解析の方法として、まず2次元的な模型化による解析が考えられる。この場合は前述したように、Power Methodによる解析が可能であるが模型の単純化に問題がある。したがって次に3次元的な模型化による解析の方法が考えられるが、これに関しては、次数の大きいマトリックスを扱うために、通常の方法では解析が不可能である。本研究では、次の(12)式で定義されるRayleigh商を共役傾斜法によって最小化することで、最低次の固有値(固有振動数)と固有ベクトル(固有振動モード)を求める方法で解析を行なった。

$$R(\{X\}) = \frac{\{X\}^T \cdot [K] \cdot \{X\}}{\{X\}^T \cdot [M] \cdot \{X\}} \quad (12)$$

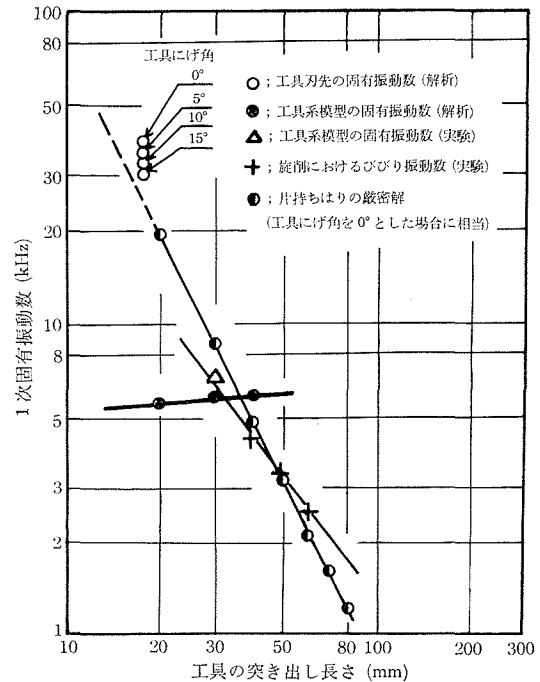


図4 工具の突き出し長さに対する基本固有振動数の変化

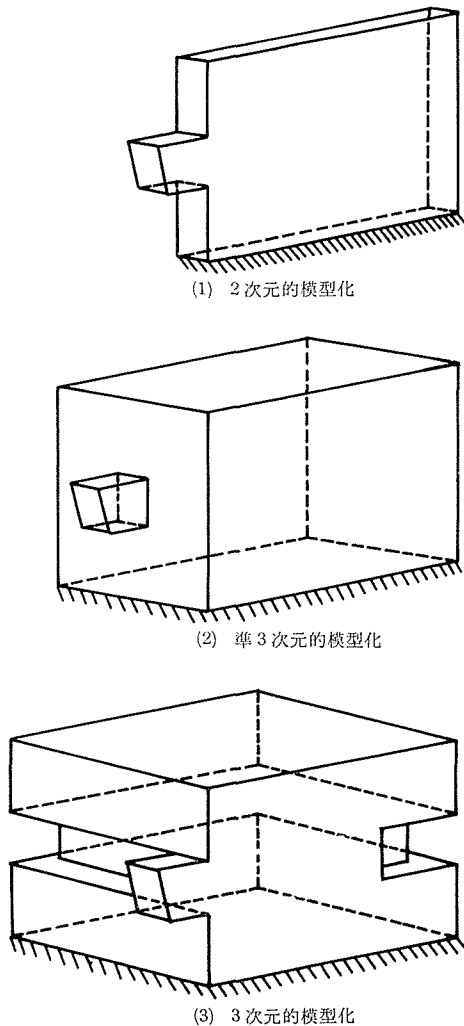


図5 切削工具系の模型化

工具取り付け部の締結による弾性および減衰の影響の取り扱いの問題、第二に、3次元模型解析によって得られた結果の解釈の問題である。すなわち、振動問題を固有値問題として解析し、得られた固有値（すなわち固有振動数）が物理的にどのような意味を有するかの問題である。したがって、3次元模型解析による結果と2次元模型による解析結果との単純な比較を行なうこと、あるいはまた、実験に関しても、その測定結果が、ある限られた面内における2次元的なものである以上、それらの比較を行なうことは物理的な意味を持たないものと考えられる。

以上のことから、構造物の3次元的な振動解析を行なう場合は、得られた結果の実験的あるいは解析的な検証が不可能であるため、その結果の物理的な意味を的確に把握する必要がある。したがって、より有効な解を得るためには、必要と思われる方向を含む面内に関する構造物の忠実な2次元の模型化を行ない、その模型に基づいて2次元解析を行なう方が、そのまま3次元解析を行なうよりも有効で、かつ意味のある解が得られるものと考えられる。

この方法は近年、R. L. Fox<sup>9)</sup>らによって開発されたものであり、その適用法については、附録に詳細を述べた。

次に、もう一つの模型化の方法として、厚さの異なる部分では、厚さと材料定数（弾性係数、密度）とが、見かけ上、比例するように考え、その模型に基づいて2次元的な解析を行なう方法（この方法を仮に準3次元的方法と呼ぶ）を用いた。すなわち本研究では、工具台の弾性係数と密度とを厚さに比例して、切削工具の部分の値の10倍とおいた。この方法によると、実際の構造物を単純に、2次元的な平板として扱う解析に比べて、構造の厚さの差による違いが、ある程度考慮されているので、より実際に近い解析が行なわれると考えられる。以上の3種の模型化の相異をまとめて模式的に図5に示した。

以上の方法によって解析した、工具突き出し長さが30 mmの場合の工具系の基本固有振動数と基本固有振動モードとを図6に示した。

振動モードについて比較してみると、2次元および準3次元的な解析による結果はほぼ同じで、工具系全体が単純な曲げ振動の様相を示しているが、3次元解析では、工具台自体には、ほとんど振動変位はみられず、工具の取り付け部および工具のみが複雑な振動モードを示した。

一方、固有振動数については、3次元解析によって得られた値は、外2つの解析に比べて非常に高い値を示している。ここで考えなければならないのは、第一に、工具台底面、中央穴部および



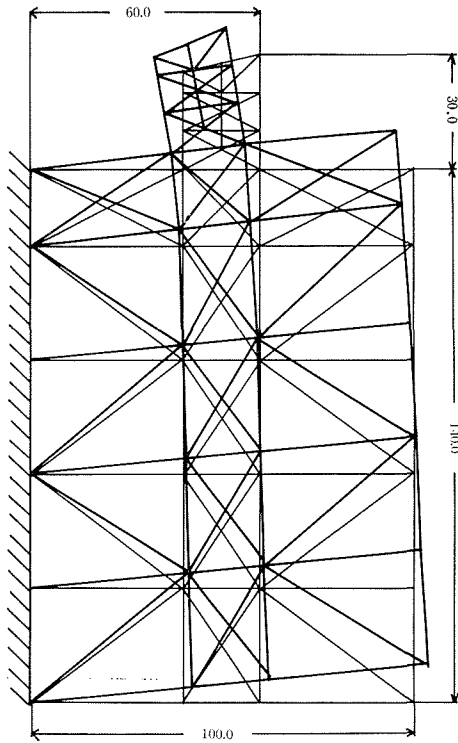


図 6 a 2次元モデルによる振動モード  
(固有振動数 5.87 kHz)

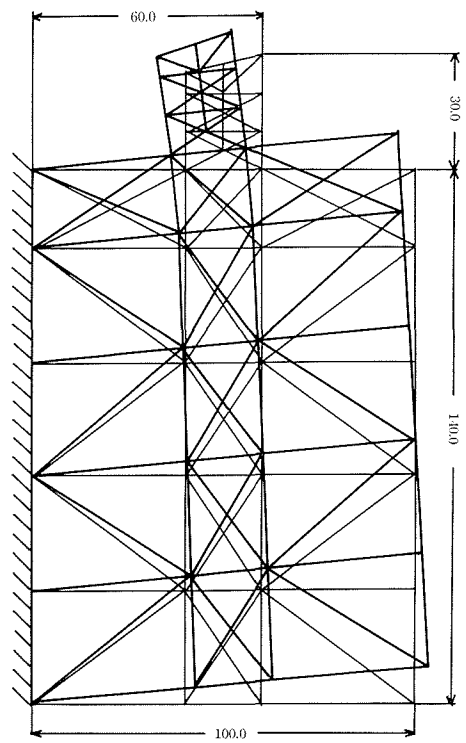


図 6 b 準3次元モデルによる振動モード  
(固有振動数 6.46 kHz)

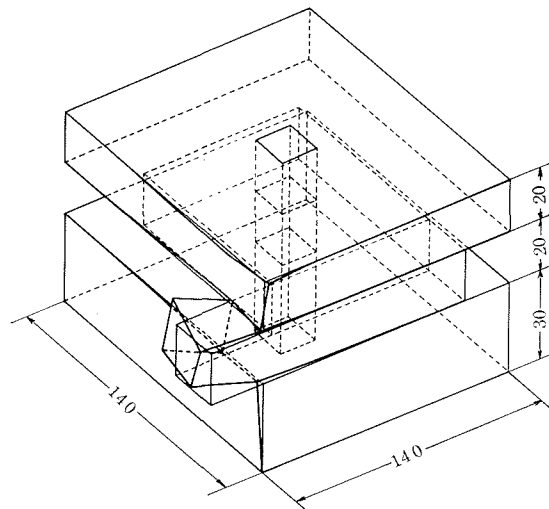


図 6 c 3次元モデルによる振動モード解析結果  
(固有振動数 22.2 kHz)

## 6. 結 論

有限要素法を用いて、切削工具刃先および切削工具系の振動解析を行ない、次の結論を得た。

(1) 切削工具刃先の2次元的な振動解析から、工具形状とくに工具にげ角を大きくすると基本固有振動数は増加するが、その振動数は(30~40) kHzであり、びびり振動数に比べて非常に高いことがわかった。したがって切削作業中に生じるびびり振動と切削工具刃先の振動特性との関連性は極めて小さいと考えられる。

(2) 切削工具を工具台に保持した切削工具系の2次元的な振動解析の結果、工具の突き出し長さを大きくすると、基本固有振動数は僅か減少するが、逆に高次の固有振動数は増加した。しかし解析の結果からは工具台の振動特性におよぼす工具突き出し長さの影響は顕著でない。また旋削実験および模型振動実験との比較から、振動数が6 kHz以下では、工具の突き出し部がびびり振動に与える影響が大きい、これ以上では、工具台自身の振動特性が現われてくるものと考えられる。

(3) 切削工具系の模型化に伴う解析手法の相異と解析結果との比較から、構造物の振動特性を求める場合、3次元的な解析を行なって得られた結果は、その物理的な意味の解釈が困難であり、そのために実際の解析においては、構造物を2次元的に模型化し、その模型に基づいて2次元的な解析を行なう方が、物理的により意味のある結果の得られることが期待される。

## 7. 附録 (3次元振動解析のための計算手順)

前述した2次元振動解析に比べて3次元的な振動解析を行なう場合、系の剛性および質量マトリックスの次元数が大きくなるために通常の方法では解析が不可能である。そこで本研究においては共役傾斜法によってRayleigh商を最小化する方法を採用した。

用いた要素は図7に示すように、まず構造物を任意形状の8節点6面体要素に分割し、その後これらの要素を電算機内でそれぞれ5コノ4節点4面体要素に分割し、実際の計算は、これらの4面体要素を用いて行なう。

前述した(12)式のRayleigh商の分子は系のひずみエネルギーの2倍に、また分母は系の最大

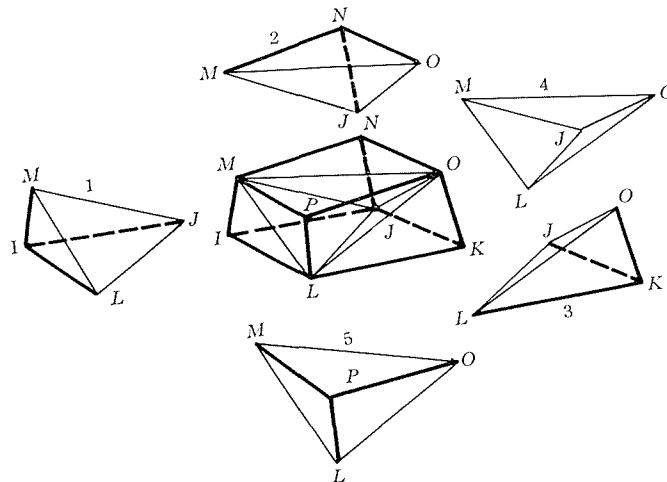


図7 3次元振動解析における8節点4面体要素から4節点4面体要素への分割方法

運動エネルギーの2倍に対応しているので、数値的には、各要素のポテンシャルエネルギーと運動エネルギーを加え合わせることによって系全体の Rayleigh 商を計算することができる。

すなわち

$$R(\{x\}) = \frac{\sum_{i=1}^n \{x_i\}^T \cdot [k_i] \cdot \{x_i\}}{\sum_{i=1}^n \{x_i\}^T \cdot [m_i] \cdot \{x_i\}} \quad (13)$$

ここで  $n$ : 4面体の要素数

$\{x_i\}$ :  $i$ 番目の4面体要素の節点変位ベクトル

$[k_i]$ :  $i$ 番目の4面体要素の剛性マトリックス

$[m_i]$ :  $i$ 番目の4面体要素の質量マトリックス

したがって、この方法では系全体の剛性および質量マトリックスを構成する必要がなく、取り扱える要素の数を著しく増すことができる。

まず最低次の固有値と固有ベクトルを求めるために、適当な初期変位ベクトル  $\{X_0\}$  を仮定し、(13)式に代入し Rayleigh 商を計算する。次に Rayleigh 商の最急勾配方向の負の方向に  $\{X_0\}$  を修正するために(13)式を微分した傾斜ベクトル  $\{G\}$  ( $=\nabla R$ ) を次式によって計算する。

$$\{G\} = \nabla R = \frac{2([K] \cdot \{X\} - R(\{X\}) \cdot [M] \cdot \{X\})}{\{X\}^T \cdot [M] \cdot \{X\}} \quad (14)$$

この傾斜ベクトル  $\{G\}$  の負の方向、すなわち  $\{S\} = -\{G\}$  に  $\{X_0\}$  を修正する。

$$\{X_1\} = \{X_0\} + \alpha \cdot \{S\}$$

ここで  $\alpha$  は方向ベクトル  $\{S\}$  の修正幅を決定するスカラー量であり、次の条件式より決定される。すなわち

$$\frac{\partial R(\{X_1\} + \alpha \{S\})}{\partial \alpha} = 0$$

この式より、 $\alpha$  を次式によって計算する。

$$\alpha = \frac{(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a}$$

ただし

$$a = (S, KS)(X, MS) - (X, KS)(S, MS)$$

$$b = (S, KS)(X, MX) - (X, KX)(S, MS)$$

$$c = (X, KS)(X, MX) - (X, KX)(X, MS)$$

次に、修正された  $\{X_1\}$  に関して Rayleigh 商を計算し、計算の各段階毎に精度の判定を行い、精度が不十分であれば、方向ベクトル  $\{S\}$  を改良し、前と同じ手順で変位ベクトルを修正し、計算を続ける。ここで方向ベクトル  $\{S\}$  の改良については次の式に従う。

$$\{S_{i+1}\} = -\{G_{i+1}\} + B_i \cdot \{S_i\}$$

ただし

$$B_i = \frac{|\{G_{i+1}\}|^2}{|\{G_i\}|^2}$$

図8に、3次元解析に用いた電算機プログラムフローチャートを示した。

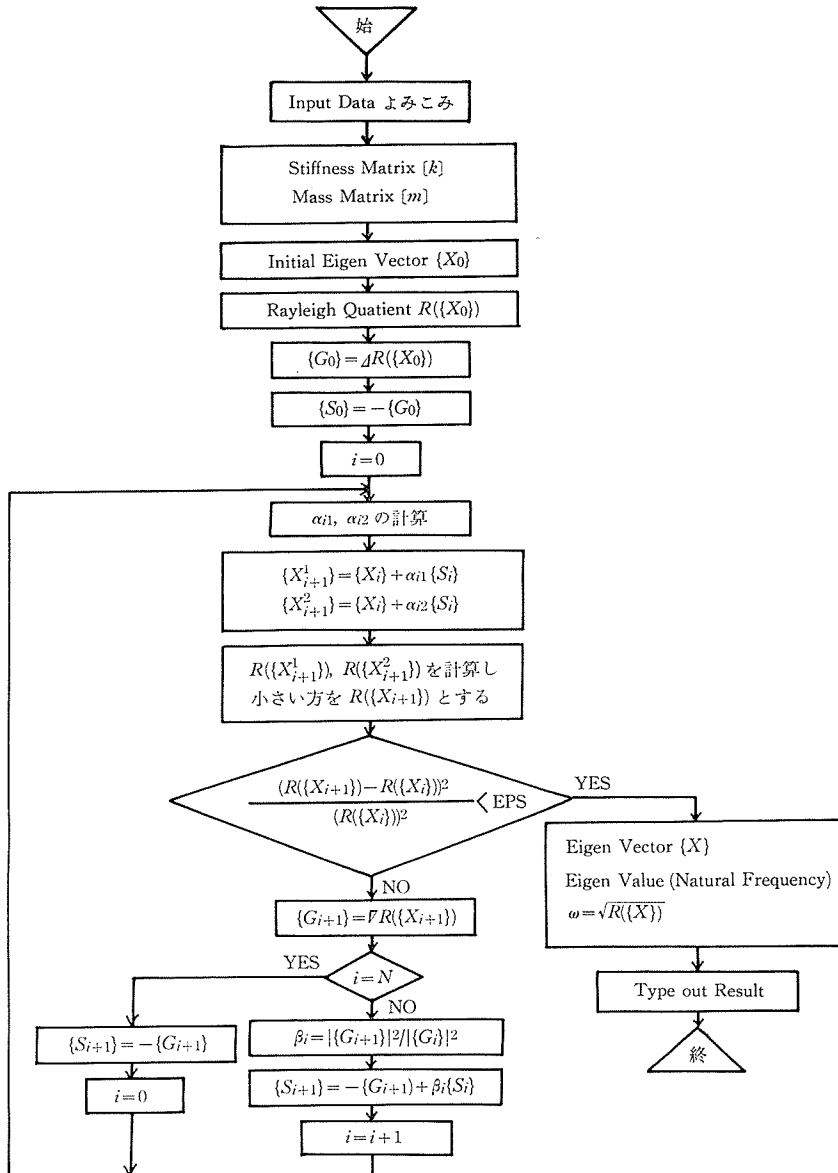


図8 3次元振動解析のための共役傾斜法による Rayleigh 商最小化の計算手順

### 参考文献

- 1) H. E. Merritt: Theory of Self Excited Machine-Tool Chatter, Trans. ASME., Vol. 87, Series B, No. 4 (1965), p. 447.
- 2) 佐田登志夫他: 有限要素法による工作機械の動剛性解析, 精密機械, 37巻, 3号, 1966, p. 54.
- 3) 吉村允孝, 星鉄太郎: 工作機械の動剛性予知法の研究(第一報), 昭和44年度精機学会春季学術講演会前刷集.
- 4) 土井静雄, 加藤 仁: バイトのたわみに関するびりについて, 日本機械学会論文集, 19巻, 86号, 1953, p. 28.
- 5) O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, 1967.

- 6) 宇野利雄： 計算機のための数値計算，応用数学力学講座 14，朝倉書店。
- 7) 戸川隼人： マトリックス構造解析法講座 14，JSSC，Vol. 4，No. 35，1968。
- 8) 新谷尚義： 数値計算 I（線形計算），基礎数学シリーズ 16，朝倉書店。
- 9) R. L. Fox, M. P. Kapoor: A Minimization Method for the Solution of the Eigen Problem Arising in Structural Dynamics, A. I. A. A., 1968.