# 一般化された標本化定理の諸例について

滝 沢 英 一* 謝 世 明** 洪 吉 成***

(1973年10月30日受理)

# On Some Examples of Generalized Sampling Theorem

Éi Iti TAKIZAWA*, Shih Ming HSIEH**, and Jyi Cherng HORNG***

(Received October 30, 1973)


### Abstract

New examples of the generalized sampling theorem are given, in which a function can be reconstructed from its sampled values and sampled derivatives. The formulae presented here can be used effectively as interpolation or extrapolation formulae. Especially, a sampling formula, which contains a generalized sampling function of polynomial form, can be used as an extrapolation formula.


## §1 は じ め に

標本化定理を一般化する研究，特に，或る一つの函数が有限帯域の週波数スペクトルを持つ場合に，函数の標本値と標本導函数値とを用いて，函数を再構成する研究は，Kohlenberg[1], Fogel[2], Jagerman と Fogel[3], Bond と Cahn[4], Linden と Abramson[5] 等によって行われた。Balakrishnan[6] は，連続パラメータの確率過程の場合に，標本化定理を一般化した。又，標本間隔は，一定でなくてもよいことも示されている[7]。

先の論文で[8-12]，著者の一人 Takizawa は，積分変換を考慮して，一般化された標本化定理を提案し，新しい標本化公式を提出した。

最近 Takizawa と Isigaki[26] は，積分変換を使わずに，標本化定理の一般化を行い，標本値と標本導函数値とを用いて，函数を構成する方法を提案し，新しい標本化定理の例にも触れている。本論文に於いては，Takizawa と Isigaki により提案された此の一般標本化定理に基づいて，若干の新しい標本化公式を提出した。本文中，§1～§3及び§5は滝沢，謝，洪により執筆され，§4は洪により計算された。

## §2 一般化された標本化定理

Takizawa と Isigaki によって提案された，一般化された標本化定理[26]の要点を下記しよう。

**[定理]** 次の三条件：

(I) $g(z)$ は整函数である，

(II) $g(z)$ は点 $z=z_n$ ($n$=整数) で $(m_n+1)$ 位の零点を持つ，

---


* Institute of Precision Mechanics, Faculty of Engineering, Hokkaidô University, Sapporo, Japan

** Department of Physics, Taiwan University (台湾大学), Taipei, China

*** Visiting Research Associate of Hokkaidô University, now on leave from Physics Section, Tatung Institute of Technology (大同工学院), Taipei, China

すなわち

$$\left.\begin{array}{l} g(z_n)=g'(z_n)=g''(z_n)=\dots=g^{(m_n)}(z_n)=0, \\ g^{(m_n+1)}(z_n)\neq 0, \quad (\text{但し，} m_n \text{ は } n \text{ に依存する整数，} m_n \geqq 0) \end{array}\right\} \tag{2-1}$$

及び

(III) $$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{g(z)}=0, \tag{2-2}$$

が満足されるとき，整函数 $f(z)$ は，

$$f(z)=\sum_n \sum_{k=0}^{m_n} \sum_{j=0}^{m_n-k} \frac{f_n^{(j)}}{j!} \frac{H_n^{(k)}}{k!}(z-z_n)^{j+k}\frac{g(z)}{(z-z_n)^{m_n+1}} \tag{2-3}$$

$$=\sum_n \sum_{s=0}^{m_n} \sum_{j=0}^{s} \frac{f_n^{(j)}}{j!} \frac{H_n^{(s-j)}}{(s-j)!}(z-z_n)^{s}\frac{g(z)}{(z-z_n)^{m_n+1}}, \tag{2-4}$$

と表わされる。ここで

$$f_n^{(j)}=\left[\frac{d^j}{dz^j}f(z)\right]_{z=z_n}, \quad h(z)=\frac{g(z)}{(z-z_n)^{m_n+1}}=\frac{1}{H(z)}, \tag{2-5}$$

$$H_n^{(k)}=\left[\frac{d^k}{dz^k}H(z)\right]_{z=z_n}=\left[\frac{d^k}{dz^k}\frac{(z-z_n)^{m_n+1}}{g(z)}\right]_{z=z_n}=$$

$$=\frac{(-1)^k}{h_n}\begin{vmatrix} \frac{h_n'}{h_n}, & 1, & 0 & & \\ \frac{h_n''}{h_n}, & {}_2C_1\frac{h_n'}{h_n}, & 1, & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \frac{h_n^{(k-1)}}{h_n}, & {}_{k-1}C_1\frac{h_n^{(k-2)}}{h_n}, & {}_{k-1}C_2\frac{h_n^{(k-3)}}{h_n}, & \dots, & 1 \\ \frac{h_n^{(k)}}{h_n}, & {}_kC_1\frac{h_n^{(k-1)}}{h_n}, & {}_kC_2\frac{h_n^{(k-2)}}{h_n}, & \dots, & {}_kC_{k-1}\frac{h_n'}{h_n} \end{vmatrix}, \tag{2-6}$$

である。また

$$\left.\begin{array}{l} {}_pC_q\dfrac{h_n^{(p-q)}}{h_n}=\dfrac{p!(m_n+1)!}{q!(m_n+1+p-q)!}\dfrac{g_n^{(m_n+1+p-q)}}{g_n^{(m_n+1)}}, \quad (p,\ q=0,\ 1,\ 2,\ \dots) \\ g_n^{(r)}=\left[\dfrac{d^r}{dz^r}g(z)\right]_{z=z_n}, \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \dots) \\ h_n^{(r)}=\left[\dfrac{d^r}{dz^r}h(z)\right]_{z=z_n}. \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \dots) \end{array}\right\} \tag{2-7}$$

式 (2-3) 及び (2-4) の中での $n$ についての和は，条件 (II) を満足するすべての**標本点** $z=z_n$ についての和を表わす。函数 $g(z)/(z-z_n)^{m_n+1}$ を**一般化された標本化函数**と呼ぶ。

**[注意]** 条件 (II) は次の条件 (II′) によって置き換え得る。

(II′) 函数 $f(z)/g(z)$ は，$z=z_n$ において，有限な正の整数 $(m_n-p_n+1)$ 位の極を持ち ($m_n=0$, $1, 2, \dots, n$)，且つ，函数 $f(z)$ が，$z=z_n$ で $p_n$ 位の零点を持つ。 (2-8)

もし式 (2-4) において，すべての $m_n$ が等しいとき，これを $m$ と書けば，次の系を得る。

**[系 1]** 次の三条件：

(I) $g(z)$ は整函数である，

(II) $$\left.\begin{array}{c} g_n=g_n'=g_n''=\dots=g_n^{(m)}=0, \\ g_n^{(m+1)}\neq 0, \end{array}\right\} \tag{2-9}$$

及び

(III) $$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{g(z)}=0, \tag{2-10}$$

が成立するとき，整函数 $f(z)$ は次式で表わされる：

$$f(z)=\sum_{n}\sum_{s=0}^{m}\sum_{j=0}^{s}\frac{f_n^{(j)}}{j!}\frac{H_n^{(s-j)}}{(s-j)!}(z-z_n)^s\frac{g(z)}{(z-z_n)^{m+1}}\,. \tag{2-11}$$

式 (2-11) より次の系を得る。

［系 2］ 整函数 $g(z)$ が，上の条件 (I), (II) 及び (III) を満たし，且つ函数 $g(z)$ が点 $z=z_n$ において，次の形の Taylor 級数：

(IV)
$$\left.\begin{aligned}&g(z)=A_{m+1}(z-z_n)^{m+1}+\sum_{s=1}^{\infty}A_{2m+1+s}(z-z_n)^{2m+1+s}\,,\\&A_{m+1}\neq 0,\end{aligned}\right\} \tag{2-12}$$

に展開出来るとき，式 (2-11) は次式の如く簡単化される：

$$f(z)=\sum_{n}\sum_{s=0}^{m}f_n^{(s)}\frac{(z-z_n)^s}{s!}\frac{1}{\dfrac{g_n^{(m+1)}}{(m+1)!}}\frac{g(z)}{(z-z_n)^{m+1}}\,, \tag{2-13}$$

特に，$m=0$ のときには，式 (2-11) は

$$f(z)=\sum_{n}f_nH_n\frac{g(z)}{(z-z_n)}=\sum_{n}f_n\frac{g(z)}{(z-z_n)h_n}=\sum_{n}f_n\frac{g(z)}{(z-z_n)g_n'}\,, \tag{2-14}$$

となる。

式 (2-14) は既に van der Pol[22] によって示唆されている。すなわち，整函数 $g(z)$ は $z=z_n$ において単根を持ち，$f(z)$ はそのフーリェ・スペクトルが有限な帯域を占める函数であり，函数 $f(z)$ と $g(z)$ とが共通の零点を持たないならば，式 (2-14) を得る。

又，$m\geqslant 1$ のときには

$$g(z)=\varphi^{m+1}(z), \tag{2-15}$$

と採れば，実用上有利である。但し，$\varphi(z)$ は一位の零点のみを持つ整函数である。このとき，標本化公式 (2-11) は

$$f(z)=\sum_{n}\sum_{s=0}^{m}\sum_{j=0}^{s}\frac{f_n^{(j)}}{j!}\frac{H_n^{(s-j)}}{(s-j)!}(z-z_n)^s\frac{\varphi^{m+1}(z)}{(z-z_n)^{m+1}}, \tag{2-16}$$

となる。但し，$H_n^{(k)}$ は式 (2-6) で与えられる。又

$$h_n=\frac{g_n^{(m+1)}}{(m+1)!}=(\varphi_n')^{m+1}, \tag{2-17}$$

$$\begin{aligned}{}_sC_r\frac{h_n^{(s-r)}}{h_n}&=\frac{s!(m+1)!}{r!(m+1+s-r)!}\frac{g_n^{(m+1+s-r)}}{g_n^{(m+1)}}=\frac{s!}{r!}\frac{1}{(\varphi_n')^{m+1}}\times\\&\times\sum_{\substack{p_1+p_2+\dots+p_{s-r+1}=m+1\\p_1+2p_2+\dots+(s-r+1)p_{s-r+1}=m+1+s-r}}\frac{(m+1)!}{p_1!p_2!\dots p_{s-r+1}!}\left(\frac{\varphi_n'}{1!}\right)^{p_1}\left(\frac{\varphi_n''}{2!}\right)^{p_2}\cdots\left(\frac{\varphi_n^{(s-r+1)}}{(s-r+1)!}\right)^{p_{s-r+1}},\end{aligned} \tag{2-18}$$

である。

## §3　$m=0$ なる場合の標本化公式の諸例

式 (2-11) は，$m=0$ の場合には，van der Pol[22] により示唆された標本化公式 (2-14) となる。

［例 1］ 区間 $a\leqslant z\leqslant b$ での $s$ 次の直交多項式を $\phi_s(z)$ としよう，即ち

$$\phi_s(z)\in\left\{\phi_k(z)\,|\,k=1,2,\dots;\ \int_a^b W(z)\phi_m(z)\phi_n(z)dz=\delta_{m,n}\right\}, \tag{3-1}$$

を考える。但し，$W(z)$ は重み函数である。式 (2-14) より $f(z)$ の近似式 $\bar{f}(z)$ は，

$$\bar{f}(z)=\sum_{n=1}^{s}f(z_n)\frac{\phi_s(z)}{(z-z_n)\phi_s'(z_n)}, \tag{3-2}$$

となる。式 (3-2) の右辺は，$(s-1)$ 次の多項式である。もし函数 $f(z)$ が $(s-1)$ 次の多項式ならば，式 (3-2) の $\bar{f}(z)$ は $s$ 個の点で，$f(z)$ と一致する。従って函数 $\bar{f}(z)$ は，恒等的に $f(z)$ と等しい。もし $f(z)$ が $(s-1)$ 次よりも高次の多項式ならば，式 (3-2) の $\bar{f}(z)$ は $f(z)$ 自身に等しくはないが，$f(z)$ の近似式を与えることになる。

さて，$f(z)$ が，$(2s-1)$ 次の多項式ならば，

$$\int_a^b w(z)f(z)dz=\int_a^b w(z)\bar{f}(z)dz, \tag{3-3}$$

が成立することが分る[23]。(但し，$w(z)$ は上述の重み函数である。) その理由は，函数 $f(z)-\bar{f}(z)$ は高々 $(2s-1)$ 次の多項式であり，又この函数の零点達の間に $\phi_s(z)$ の零点達があるからである。何んとなれば，$\phi_s(z_n)=0$ なる $z_n$ に対し，

$$f(z_n)=\bar{f}(z_n), \tag{3-4}$$

が成り立つ。従って，いま

$$f(z)-\bar{f}(z)=\phi_s(z)r(z), \tag{3-5}$$

と書く。此処で，$r(z)$ は高々 $(s-1)$ 次の多項式である。従って，

$$\int_a^b w(z)f(z)dz-\int_a^b w(z)\bar{f}(z)dz=\int_a^b w(z)\phi_s(z)r(z)dz=0, \tag{3-6}$$

を得る。何となれば，$s$ 次の直交多項式 $\phi_s(z)$ は，より低次の多項式と夫々直交しているからである。式 (3-2) を式 (3-3) に代入して，

$$\int_a^b w(z)f(z)dz=\sum_{n=1}^{s}f(z_n)\lambda_n, \tag{3-7}$$

を得る。但し，常数 $\lambda_n$ は **Christoffel 数**

$$\lambda_n=\int_a^b w(z)\frac{\phi_s(z)dz}{(z-z_n)\phi_s'(z_n)}, \tag{3-8}$$

である。

$f(z)$ が高々 $(2s-1)$ 次の多項式であるならば，$s$ 以下の個数の点で $f(z)$ の値が分っていれば，積分 (3-7) が計算出来る。$f(z)$ がその様な多項式でない場合にも，式 (3-7) により積分を近似的に計算することが出来る。この公式は **Gauss の求積公式** に他ならない。

**Lagrange の公式**を計算する為には，上記の $\phi_s(z)$ でなくて

$$g(z)=\prod_{k=1}^{s}(z-z_k), \tag{3-9}$$

と採ればよい。このとき

$$\bar{f}(z)=\sum_{n=1}^{s}f(z_n)L_n(z), \tag{3-10}$$

を得る。但し

$$L_n(z)=\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{s}\frac{(z-z_k)}{(z_n-z_k)}, \tag{3-11}$$

であり，函数 $L_n(z)$ は

$$L_n(z_p)=\delta_{n,p}, \qquad (1\leqslant p\leqslant s), \tag{3-12}$$

なる性質を持つ。

[例 2]　式 (2-14) で，Tchebycheff の多項式を用いて

$$g(z)=\cos(\alpha\cos^{-1}\beta z), \qquad (\alpha\beta\neq 0) \tag{3-13}$$

とすれば，$f(z)$ は次式によって近似される。但し $\alpha$, $\beta$, は常数とする。

$$\bar{f}(z)=\frac{1}{\alpha}\sum_{n}(-1)^n f(z_n)\sqrt{1-\beta^2 z_n^2}\,\frac{\cos(\alpha\cos^{-1}\beta z)}{\beta(z-z_n)}. \tag{3-14}$$

但し，$z_n$ は

$$\cos(\alpha\cos^{-1}\beta z_n)=0, \qquad (\alpha=\text{整数}) \tag{3-15}$$

の根である。即ち

$$\cos^{-1}\beta z_n=\frac{\pi}{2\alpha}+\frac{n\pi}{\alpha}. \qquad (n\ \text{は整数}) \tag{3-16}$$

もし函数 $f(z)$ が $(s-1)$ 次の多項式ならば，

$$f(z)=\frac{1}{s}\sum_{n=1}^{s}(-1)^n f(z_n)\sqrt{1-\beta^2 z_n^2}\,\frac{\cos(s\cos^{-1}\beta z)}{\beta(z-z_n)}, \tag{3-17}$$

である。但し，$z_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots, s)$ は $\cos(s\cos^{-1}\beta z)$ の零点である。

式 (3-14) において $\beta z=\cos\theta$, $\beta z_n=\cos\theta_n$, とおけば，次式を得る。

$$\bar{f}\left(\frac{\cos\theta}{\beta}\right)=\frac{1}{\alpha}\sum_{n}(-1)^n f\left(\frac{\cos\theta_n}{\beta}\right)\sin\theta_n\frac{\cos(\alpha\theta)}{\cos\theta-\cos\theta_n}. \tag{3-18}$$

上式を区間 $0\leqq\theta\leqq\pi$ にわたって積分すれば次式を得る。

$$\int_0^{\pi}\bar{f}\left(\frac{\cos\theta}{\beta}\right)d\theta=\frac{1}{\alpha}\sum_{n}(-1)^n f\left(\frac{\cos\theta_n}{\beta}\right)\sin\theta_n\oint_0^{\pi}\frac{\cos\alpha\theta}{\cos\theta-\cos\theta_n}d\theta. \tag{3-19}$$

但し積分 $\oint_0^{\pi}d\theta$ は，点 $\theta=\theta_n$ において Cauchy の主値を採ることを意味する。

$\alpha$ が正の整数なるとき，積分公式：

$$\oint_0^{\pi}\frac{\cos(\alpha\theta)}{\cos\theta-\cos\theta^*}d\theta=\pi\frac{\sin(\alpha\,\theta^*)}{\sin\theta^*},$$

を使えば，式 (3-19) は

$$\int_0^{\pi}\bar{f}\left(\frac{\cos\theta}{\beta}\right)d\theta=\frac{\pi}{\alpha}\sum_{n}(-1)^n f\left(\frac{\cos\theta_n}{\beta}\right)\sin(\alpha\,\theta_n), \tag{3-20}$$

となる。

式 (3-18), (3-20) は本質的には Multhopp[25] によって与えられた近似的な求積法の公式と同一である。

[例 3]　式 (2-14) に於いて

$$g(z)=\sin(\alpha z+\beta), \qquad (\alpha,\ \beta\ \text{は常数}) \tag{3-21}$$

とおけば，**染谷[13]の標本化公式**を得る。

すなわち

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{n\pi-\beta}{\alpha}\right)\frac{\sin(\alpha z+\beta-n\pi)}{(\alpha z+\beta-n\pi)}, \qquad (\alpha\neq 0) \tag{3-22}$$

である。$\sin(\alpha z+\beta-n\pi)/(\alpha z+\beta-n\pi)$ は**標本化函数**である。

いま函数 $f(z)$ のフーリェ・スペクトルが有限領域内に限られているとき，その最大周波数を $W$ と書けば

$$\frac{1}{|\alpha|}<\frac{1}{W}, \tag{3-23}$$

が成立すれば，式 (2-2) の条件 (III) が満足されることが知られている[3]。式 (3-22) で $\beta=0$ とおけば，よく知られた **Shannon の公式**[14,15]：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)\frac{\sin(\alpha z-n\pi)}{(\alpha z-n\pi)}, \qquad (\alpha\neq 0) \tag{3-24}$$

を得る[21]。また，式 (3-24) の特別な場合として，次式を得る。

$$\exp[-\gamma z^2]\cos\beta z=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp[-\gamma(n\pi/\alpha)^2]\cos\left(\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right)\frac{\sin(\alpha z-n\pi)}{(\alpha z-n\pi)},\quad(\gamma>0,\ \alpha\neq0)\quad(3\text{–}25)$$

及び

$$\exp[-\gamma z^2]\sin\beta z=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp[-\gamma(n\pi/\alpha)^2]\sin\left(\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right)\frac{\sin(\alpha z-n\pi)}{(\alpha z-n\pi)}.\quad(\gamma>0,\ \alpha\neq0)\quad(3\text{–}26)$$

［例 4］ $A$, $B$, $\alpha$ を常数として

$$g(z)=z\sin\alpha z-A\cos\alpha z,\qquad(\alpha A\fallingdotseq 0)\qquad(3\text{–}27)$$

或いは

$$g(z)=z\cos\alpha z-B\sin\alpha z,\qquad(\alpha B\fallingdotseq 0)\qquad(3\text{–}28)$$

と置けば，式 (2–14) より夫々次式を得る。

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(\lambda_n)\frac{1}{\lambda_n}\frac{\cos(\alpha\lambda_n)}{1+\dfrac{\sin(2\alpha\lambda_n)}{2\alpha\lambda_n}}\frac{z\sin\alpha z-A\cos\alpha z}{\alpha z-\alpha\lambda_n},\qquad(3\text{–}29)$$

或いは

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(\eta_n)\frac{(-1)}{\eta_n}\frac{\sin(\alpha\eta_n)}{1-\dfrac{\sin(2\alpha\eta_n)}{2\alpha\eta_n}}\frac{z\cos\alpha z-B\sin\alpha z}{\alpha z-\alpha\eta_n}.\qquad(3\text{–}30)$$

上式の $\lambda_n$, $\eta_n$ は夫々次の方程式の根である。この根を大きさの順序に並べ，$n>0$ なるとき $\lambda_n$, $\eta_n>0$, $n<0$ なるとき $\lambda_n$, $\eta_n<0$ とする。

$$\lambda_n\sin\alpha\lambda_n-A\cos\alpha\lambda_n=0,\qquad(3\text{–}31)$$

$$\eta_n\cos\alpha\eta_n-B\sin\alpha\eta_n=0.\qquad(3\text{–}32)$$

式 (3–29) の $f(z)$ が偶函数なるとき，$f(z)$ は次式[10-12]となる。

$$f(z)=\frac{2}{\alpha}\sum_{n=1}^{+\infty}f(\lambda_n)\frac{\cos(\alpha\lambda_n)}{1+\dfrac{\sin(2\alpha\lambda_n)}{2\alpha\lambda_n}}\frac{z\sin\alpha z-A\cos\alpha z}{z^2-\lambda_n^2}.\qquad(3\text{–}33)$$

上式の $\lambda_n$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) は，方程式 (3–31) の正根である。

式 (3–30) の $f(z)$ が奇函数なるとき，

$$f(z)=-\frac{2}{\alpha}\sum_{n=1}^{+\infty}f(\eta_n)\frac{\sin(\alpha\eta_n)}{1-\dfrac{\sin(2\alpha\eta_n)}{2\alpha\eta_n}}\frac{z\cos\alpha z-B\sin\alpha z}{z^2-\eta_n^2},\qquad(3\text{–}34)$$

となる。上式の $\eta_n$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) は，方程式 (3–32) の正根である。

式 (3–27), (3–28) において，$A\to0$, $B\to0$ の極限の場合には，夫々次式を得る。

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\fallingdotseq 0}}^{+\infty}\frac{1}{n}f\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)\frac{\alpha z\sin(\alpha z-n\pi)}{\alpha z-n\pi}+\{f(0)+zf'(0)\}\frac{\sin\alpha z}{\alpha z},\qquad(3\text{–}35)$$

及び

$$f(z)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}f\left(\frac{n\pi}{\alpha}+\frac{\pi}{2\alpha}\right)\frac{\alpha z\cos(\alpha z-n\pi)}{\alpha z-n\pi-(1/2)\pi}+f(0)\cos\alpha z.\qquad(3\text{–}36)$$

上式は Shannon の公式 (3–24) とは稍々異なる形をしている。

式 (3–35) と式 (3–36) との例は夫々次の如くである。

$$\sin(\beta z)=\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\fallingdotseq 0}}^{+\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right)\frac{\alpha z\sin(\alpha z-n\pi)}{\alpha z-n\pi}+\frac{\beta}{\alpha}\sin\alpha z,\qquad(3\text{–}37)$$

$$\cos(\beta z)=\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\fallingdotseq 0}}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right)\frac{\alpha z\sin(\alpha z-n\pi)}{\alpha z-n\pi}+\frac{\sin\alpha z}{\alpha z},\qquad(3\text{–}38)$$

$$J_0(\beta z)=\frac{1}{\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{n=+\infty}\frac{1}{n}J_0\left(\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right)\frac{\alpha z\sin(\alpha z-n\pi)}{\alpha z-n\pi}+\frac{\sin\alpha z}{\alpha z}, \tag{3-39}$$

及び

$$\sin(\beta z)=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin(n\pi\beta/\alpha+\beta\pi/2\alpha)}{n\pi+\pi/2}\ \frac{\alpha z\cos\alpha z}{\alpha z-n\pi-\pi/2} \tag{3-40}$$

$$\cos(\beta z)=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos(n\pi\beta/\alpha+\beta\pi/2\alpha)}{n\pi+\pi/2}\ \frac{\alpha z\cos\alpha z}{\alpha z-n\pi-\pi/2}+\cos\alpha z, \tag{3-41}$$

$$J_0(\beta z)=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n\frac{J_0(n\pi\beta/\alpha+\beta\pi/2\alpha)}{n\pi+\pi/2}\ \frac{\alpha z\cos\alpha z}{\alpha z-n\pi-\pi/2}+\cos\alpha z. \tag{3-42}$$

Wheelon[24] は (3-39) で $\alpha=\beta=1$ なる場合の式を示した。

［例 5］ 整数 $\nu$ 次の Bessel 函数 $J_\nu(z)$ を使って[12)16)17)18)]

$$g(z)=J_\nu(\alpha z),\qquad (\alpha\neq 0 \text{ は常数}) \tag{3-43}$$

と採る。$\nu=1$ の場合には，式 (2-14) は次式となる。

$$f(z)=+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(j_n)\frac{1}{J_1'(\alpha j_n)}\ \frac{J_1(\alpha z)}{\alpha z-\alpha j_n} \tag{3-44}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(j_n)\frac{1}{J_0(\alpha j_n)}\ \frac{J_1(\alpha z)}{\alpha z-\alpha j_n}. \tag{3-45}$$

此処に，$\alpha j_n$ は Bessel 函数 $J_1(z)$ の零点である。すなわち，$J_1(\alpha j_n)=0$ の根を大きさの順序に並べ，$n\geqslant 0$ なるときに $\alpha j_n\geqslant 0$, $n<0$ なるとき $\alpha j_n<0$ とする。

$f(z)$ が奇函数であるとき，式 (3-44) と式 (3-45) は夫々次式となる[10-12)]。

$$f(z)=+\frac{2}{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}\epsilon_n f(j_n)\frac{j_n}{J_1'(\alpha j_n)}\ \frac{J_1(\alpha z)}{z^2-j_n^2} \tag{3-46}$$

$$=\frac{4}{\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}\epsilon_n f(j_n)\frac{j_n}{J_0(\alpha j_n)-J_2(\alpha j_n)}\ \frac{J_1(\alpha z)}{z^2-j_n^2},\qquad (\nu=\text{整数}) \tag{3-47}$$

但し，$\epsilon_n=1/2$ ($n=0$ のとき)，$\varepsilon_n=1$ ($n\geqslant 1$ のとき)。

式 (3-43) で，$\nu=1/2$ 或いは $\nu=-1/2$ と置けば，式 (2-14) は夫々次式となる。

(i) $\nu=1/2$ の時，

$$\frac{f(z)}{\sqrt{z}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)\frac{1}{\sqrt{z}}\ \frac{\sin(\alpha z-n\pi)}{\alpha z-n\pi}, \tag{3-48}$$

(ii) $\nu=-1/2$ の時，

$$\frac{f(z)}{\sqrt{z}}=-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f\left(\frac{n\pi}{\alpha}+\frac{\pi}{2\alpha}\right)\frac{1}{\sqrt{z}}\ \frac{\cos(\alpha z-n\pi)}{\alpha z-n\pi-(\pi/2)}, \tag{3-49}$$

但し，$n\pi/\alpha$ 及び $(2n+1)\pi/2\alpha$ は夫々方程式

$$\left.\begin{aligned} J_{1/2}(\alpha z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha z}}\sin\alpha z=0,\\ J_{-1/2}(\alpha z)&=\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha z}}\cos\alpha z=0,\end{aligned}\right\} \tag{3-50}$$

の根である。

［例 6］ 今

$$g(z)=zJ_1'(\alpha z)+hJ_1(\alpha z),\qquad (\alpha h\neq 0) \tag{3-51}$$

と採れば[19)]，式 (2-14) は次式となる。

$$f(z)=-\alpha\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(\lambda_n)\frac{\lambda_n}{\{(\lambda_n+h^2)\alpha^2-1\}J_1(\alpha\lambda_n)}\ \frac{zJ_1'(\alpha z)+hJ_1(\alpha z)}{z-\lambda_n}. \tag{3-52}$$

但し，$\lambda_n$ は方程式

$$\lambda_n J_1'(\alpha\lambda_n)+hJ_1(\alpha\lambda_n)=0, \tag{3-53}$$

の根である。この根を大きさの順に並べ，$n\geqslant 0$ のとき $\alpha\lambda_n\geqslant 0$, $n<0$ のとき $\alpha\lambda_n<0$ とする。

$f(z)$ が奇函数のとき，式 (3-52) は次式となる[10-12]。

$$f(z)=-2\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}\epsilon_n f(\lambda_n)\frac{\lambda_n^2}{\{(\lambda_n^2+h^2)\alpha^2-1\}J_1(\alpha\lambda_n)}\frac{zJ_1'(\alpha z)+hJ_1(\alpha z)}{z^2-\lambda_n^2}. \tag{3-54}$$

但し，$\varepsilon_n=1/2$ ($n=0$ のとき)，$\varepsilon_n=1$ ($n\geqslant 1$ のとき)。

$h$ が極めて大きい場合には，式 (3-53)，(3-52) は夫々，

$$J_1(\alpha\lambda_n)=0, \tag{3-55}$$

及び

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(\lambda_n)\frac{1}{J_0(\alpha\lambda_n)}\frac{J_1(\alpha z)}{\alpha z-\alpha\lambda_n}, \tag{3-56}$$

に近づく。式 (3-56) は式 (3-45) に他ならない。

［例 7］ Bessel 函数 $J_\nu(z)$ と Neumann 函数 $Y_\nu(z)$ の線形結合 $T_\nu(x,z)$ を

$$T_\nu(x,z)=Y_\nu(x)J_\nu(z)-J_\nu(x)Y_\nu(z), \qquad (x>0,\ z>0) \tag{3-57}$$

と採る。但し，$\nu$ は整数 である。今

$$g(z)=T_\nu(\alpha z,\beta z), \qquad (0<\alpha<\beta) \quad (z>0) \tag{3-58}$$

とすれば，式 (2-14) は，

$$f(z)=-\frac{\pi}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_n\frac{\lambda_n J_\nu(\alpha\lambda_n)J_\nu(\beta\lambda_n)}{J_\nu^2(\alpha\lambda_n)-J_\nu^2(\beta\lambda_n)}\frac{T_\nu(\alpha z,\beta z)}{z-\lambda_n}, \tag{3-59}$$

となる[10-12]。但し，$\nu=$ 整数。また $\lambda_n$ は次式の根である。

$$T_\nu(\alpha\lambda_n,\beta\lambda_n)=0, \tag{3-60}$$

すなわち，

$$Y_\nu(\alpha\lambda_n)J_\nu(\beta\lambda_n)-J_\nu(\alpha\lambda_n)Y_\nu(\beta\lambda_n)=0. \tag{3-61}$$

この根を大きさの順に並べて，$n\geqslant 0$ のとき $\lambda_n\geqslant 0$, $n<0$ のとき $\lambda_n<0$ とする。

函数 $T_\nu(\alpha z,\beta z)$ は $z>0$ で定義されているが，$z<0$ の場合についても，$T_\nu(\alpha z,\beta z)$ を定義して，(i) $f(z)$ が偶函数なるとき，$T_\nu(\alpha z,\beta z)$ は偶函数，(ii) $f(z)$ が奇函数なるとき，$T_\nu(\alpha z,\beta z)$ は奇函数，とすれば，上記 (i) (ii) 何れの場合にも，式 (3-59) は下式となる[10-12]。

$$f(z)=-\pi\sum_{n=0}^{+\infty}\epsilon_n f_n\frac{\lambda_n^2 J_\nu(\alpha\lambda_n)J_\nu(\beta\lambda_n)}{J_\nu^2(\alpha\lambda_n)-J_\nu^2(\beta\lambda_n)}\frac{T_\nu(\alpha z,\beta z)}{z^2-\lambda_n^2}. \tag{3-62}$$

但し，$\varepsilon_n=1/2$ ($n=0$ のとき) 及び $\varepsilon_n=1$ ($n>0$ のとき)。

$f(z)$ の代りに $f(z)B(z)$ を使えば，函数 $f(z)B(z)$ の標本化公式 (3-59) は次式になる。

$$f(z)=-\frac{\pi}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f_nB(\lambda_n)\frac{\lambda_n J_\nu(\alpha\lambda_n)J_\nu(\beta\lambda_n)}{J_\nu^2(\alpha\lambda_n)-J_\nu^2(\beta\lambda_n)}\frac{T_\nu(\alpha z,\beta z)}{B(z)(z-\lambda_n)}, \tag{3-63}$$

此処に，$B(z)$ は与えられた函数とする。又 $f(z)B(z)$ は式 (2-2) の条件 (III) を満すものとする。すなわち

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)B(z)}{T_\nu(\alpha z,\beta z)}=0. \tag{3-64}$$

もし，式 (3-63) で

$$B(z)=J_\nu^2(\alpha z)+Y_\nu^2(\beta z), \tag{3-65}$$

と採れば，著者の一人が前論文[10-12]に於いて述べた標本化公式を得る[20]。

［例 8］ 式 (2-14) において

$$g(z)=\sin(\alpha z^2+\beta), \qquad (\alpha\neq 0) \tag{3-66}$$

とおけば，$f(z)$ は

$$f(z)=\sum_{n} f(z_n)\frac{\sin(\alpha z^2+\beta-n\pi)}{(\alpha z^2+\beta-n\pi)}, \tag{3-67}$$

となる。但し，上式で $n$ についての和は，方程式

$$\sin(\alpha z_n^2+\beta)=0, \tag{3-68}$$

のすべての根についての和を意味する。

## §4 $m=1$ なる場合の標本化公式の諸例

式 (2-11) で $m\geqslant 1$ の時，函数を

$$g(z)=\varphi^{m+1}(z), \tag{4-1}$$

と採ると有利である。但し，上式の $\varphi(z)$ は一位の零点 $z_n$ をもつ整函数である。このとき，標本化公式は式 (2-16)，である。今，式 (2-16) より標本化公式を導いて見よう。

［例 1］ 式 (4-1) を下の様に採る。

$$\varphi(z)=\phi_s(z). \tag{4-2}$$

上式 $\phi_s(z)$ は $s$ 次の直交多項式であり，式 (3-1) と同一である。$m=1$ のとき，$f(z)$ は

$$f(z)=\sum_{n}\sum_{s=0}^{1}\sum_{j=0}^{s}\frac{f_n^{(j)}}{j!}\frac{H_n^{(s-j)}}{(s-j)!}(z-z_n)^s\frac{\phi_s^2(z)}{(z-z_n)^2}, \tag{4-3}$$

となる。上式の $z_n$ は $\phi_s(z)$ の零点である。即ち，$\phi_s(z_n)=0$。

今，式 (4-1) の $\varphi(z)$ を

$$\varphi(z)=\prod_{k=1}^{s}(z-z_k), \tag{4-4}$$

に採れば，式 (4-3) は次式となる。

$$f(z)=\sum_{n=1}^{s}\left[f_n-2f_n\sum_{\substack{p=1\\ p\neq n}}^{s}\frac{1}{(z_n-z_p)}(z-z_n)+f_n^{(1)}(z-z_n)\right]\frac{1}{\prod\limits_{\substack{p=1\\ p\neq n}}^{s}(z_n-z_p)^2}\frac{\prod\limits_{k=1}^{s}(z-z_k)^2}{(z-z_n)^2}. \tag{4-5}$$

［例 2］ 式 (4-1) において，**Tchebycheff の多項式**を用いて

$$\varphi(z)=\cos(\alpha\cos^{-1}\beta z),\qquad (\alpha\beta\neq 0) \tag{4-6}$$

に採れば

$$f(z)=\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\sum_{n}[f_n(1-\beta^2\lambda_n^2)-f_n\beta^2\lambda_n(z-\lambda_n)+f_n^{(1)}(1-\beta^2\lambda_n^2)(z-\lambda_n)]\frac{\cos^2(\alpha\cos^{-1}\beta z)}{(z-\lambda_n)^2}. \tag{4-7}$$

上式の $\lambda_n$ は次式の根である。

$$\cos^2(\alpha\cos^{-1}\beta\lambda_n)=0. \tag{4-8}$$

函数 $f(z)$ が偶函数なる時，式 (4-7) の $f(z)$ は

$$f(z)=\frac{2}{\alpha^2\beta^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\epsilon_n[f_n(1-\beta^2\lambda_n^2)(z^2+\lambda_n^2)-f_n\beta^2\lambda_n^2(z^2-\lambda_n^2)$$

$$+f_n^{(1)}\lambda_n(1-\beta^2\lambda_n^2)(z^2-\lambda_n^2)]\frac{\cos^2(\alpha\cos^{-1}\beta z)}{(z-\lambda_n)^2(z+\lambda_n)^2}, \tag{4-9}$$

但し，$\varepsilon_n=1/2$ ($n=0$ のとき)，$\varepsilon_n=1$ ($n>0$ のとき)。

［例 3］ 式 (4-1) において

$$\varphi(z)=\sin(\alpha z+\beta),\qquad (\alpha,\ \beta \text{ は常数}) \tag{4-10}$$

と置けば

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[f_n\frac{1}{\alpha^2}+f_n^{(1)}\frac{(z-\lambda_n)}{\alpha^2}\right]\frac{\sin^2(\alpha z+\beta)}{(z-\lambda_n)^2},\qquad (\alpha\neq 0) \tag{4-11}$$

函数 $f(z)$ のフーリェ・スペクトルが有限の領域に限られるとき，その最大周波数を $W$ とする。いま

$$\frac{1}{|\alpha|} < \frac{2}{W}, \tag{4-12}$$

なる条件が満足されるならば，式 (2-2) の条件 (III) が成立する[3]。従って，条件 (4-12) は (4-11) が成り立つための充分条件である。

[例 4]　式 (4-1) で

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(z)=z\sin\alpha z - A\cos\alpha z, \qquad (\alpha A \neq 0)\\ &\text{或いは}\\ &\varphi(z)=z\cos\alpha z - B\sin\alpha z, \qquad (\alpha B \neq 0)\end{aligned}\right\} \tag{4-13}$$

と採る。$\alpha, A, B$ は常数である。函数 $f(z)$ は

$$\begin{aligned}f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big[&f_n\frac{\cos^2\alpha\lambda_n}{(\alpha\lambda_n+(1/2)\sin 2\alpha\lambda_n)^2}-f_n\frac{2\alpha\cos^4\alpha\lambda_n}{(\alpha\lambda_n+(1/2)\sin 2\alpha\lambda_n)^3}(z-\lambda_n)\\ &+f_n^{(1)}\frac{\cos^2\alpha\lambda_n}{(\alpha\lambda_n+(1/2)\sin 2\alpha\lambda_n)^2}(z-\lambda_n)\Big]\frac{(z\sin\alpha z-A\cos\alpha z)^2}{(z-\lambda_n)^2},\end{aligned} \tag{4-14}$$

或いは

$$\begin{aligned}f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big[&f_n\frac{\sin^2\alpha\mu_n}{((1/2)\sin 2\alpha\mu_n-\alpha\mu_n)^2}+f_n\frac{2\alpha\sin^4\alpha\mu_n}{((1/2)\sin 2\alpha\mu_n-\alpha\mu_n)^3}(z-\mu_n)\\ &+f_n^{(1)}\frac{\sin^2\alpha\mu_n}{((1/2)\sin 2\alpha\mu_n-\alpha\mu_n)^2}(z-\mu_n)\Big]\frac{(z\cos\alpha z-B\sin\alpha z)^2}{(z-\mu_n)^2},\end{aligned} \tag{4-15}$$

として夫々表わされる。

上式の $\lambda_n, \mu_n$ は夫々次式の根である。

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_n\sin\alpha\lambda_n - A\cos\alpha\lambda_n=0,\\ &\mu_n\cos\alpha\mu_n - B\sin\alpha\mu_n=0.\end{aligned}\right\} \tag{4-16}$$

[例 5]　式 (4-1) で 1 次の Bessel 函数 $J_1(z)$ を用いて

$$\varphi(z)=J_1(\alpha z), \qquad (\alpha \text{ は常数}) \tag{4-17}$$

と採れば，

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big[f_n+f_n\frac{\alpha J_2'(\alpha j_n)}{2J_1'(\alpha j_n)}(z-j_n)+f_n^{(1)}(z-j_n)\Big]\frac{1}{\alpha^2\{J_1'(\alpha j_n)\}^2}\ \frac{\{J_1(\alpha z)\}^2}{(z-j_n)^2}, \tag{4-18}$$

となる。$j_n$ は方程式 $J_1(\alpha j_n)=0$ の根である。

[例 6]　式 (4-1) において

$$\varphi(z)=zJ_1'(\alpha z)+hJ_1(\alpha z), \qquad (\alpha\ h \neq 0) \tag{4-19}$$

と置けば

$$\begin{aligned}f(z)=\alpha^2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big[&f_n\frac{\lambda_n^2}{(\alpha^2\lambda_n^2+\alpha^2h^2-1)^2J_1^2(\alpha\lambda_n)}+f_n\frac{\lambda_n(\alpha^2h^2-\alpha^2\lambda_n^2-1)J_1(\alpha\lambda_n)}{\{(\alpha^2h^2+\alpha^2\lambda_n^2-1)J_1(\alpha\lambda_n)\}^3}(z-\lambda_n)\\ &+f_n^{(1)}\frac{\lambda_n^2}{(\alpha^2\lambda_n^2+\alpha^2h^2-1)^2J_1^2(\alpha\lambda_n)}(z-\lambda_n)\Big]\frac{\{zJ_1'(\alpha z)+hJ_1(\alpha z)\}^2}{(z-\lambda_n)^2},\end{aligned} \tag{4-20}$$

となる。但し，$\lambda_n$ は方程式 $\lambda_nJ_1'(\alpha\lambda_n)+hJ_1(\alpha\lambda_n)=0$ の根である。

[例 7]　式 (4-1) において，

$$\varphi(z)=T_\nu(\alpha z, \beta z)=Y_\nu(\alpha z)J_\nu(\beta z)-J_\nu(\alpha z)Y_\nu(\beta z), \tag{4-21}$$

と置く。又，$\nu=$整数，及び，$0<\alpha<\beta$ とする。このとき

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Big[f_n+f_n\Big\{\frac{1-2\nu}{\lambda_n}+\frac{\pi\alpha\beta\lambda_nJ_\nu(\alpha\lambda_n)J_\nu(\beta\lambda_n)}{J_\nu^2(\alpha\lambda_n)-J_\nu^2(\beta\lambda_n)}(Y_{\nu+1}(\alpha\lambda_n)J_{\nu+1}(\beta\lambda_n)-$$

$$-J_{\nu+1}(\alpha\lambda_n)Y_{\nu+1}(\beta\lambda_n))\}\times(z-\lambda_n)+f_n^{(1)}(z-\lambda_n)\Big]\frac{\pi^2 J_\nu^2(\alpha\lambda_n)J_\nu^2(\beta\lambda_n)\lambda_n^2}{4(J_\nu^2(\alpha\lambda_n)-J_\nu^2(\beta\lambda_n))^2}\frac{T_\nu^2(\alpha z,\ \beta z)}{(z-\lambda_n)^2}, \tag{4-22}$$

となる。但し，$\lambda_n$ は方程式

$$T_\nu(\alpha\lambda_n,\ \beta\lambda_n)=0.$$

の根である。

［例 8］ 式 (4-1) において

$$\varphi(z)=\sin(\alpha z^2+\beta), \qquad (\alpha, \beta \text{ は常数}, \quad \alpha \neq 0) \tag{4-23}$$

とおけば，

$$f(z)=\sum_n\Big[2f_n(n\pi-\beta)+\sqrt{\frac{n\pi-\beta}{\alpha}}f_n^{(1)}(\alpha z^2+\beta-n\pi)\Big]\frac{\sin^2(\alpha z^2+\beta)}{2(n\pi-\beta)(\alpha z^2+\beta-n\pi)^2}, \tag{4-24}$$

となる。但し，$n$ についての和は方程式

$$\sin(\alpha z_n^2+\beta)=0, \tag{4-25}$$

のすべての根についての和を意味する。即ち，$z_n=\pm\sqrt{(n\pi-\beta)/\alpha}$ ($n$＝整数)。

## §5 結　　論

§3 及び §4 において述べた如く，定理 (2-11) を基礎として，若干の標本化公式を導いた。§3 においては，公式 (2-14) の例を示した。即ち，標本函数値を使う標本化公式を提出した。§4 においては，公式 (2-16) で $m=1$ の場合の例を述べた。即ち，標本函数値と標本導函数値とを使う標本化公式を提出した。

本論文で述べたすべての標本化公式は，内挿公式として利用することが出来る。しかし，標本化公式 (3-2), (3-10), (4-3), (4-5) 等は内挿公式としてのみではなく，外挿公式としても亦有用である。

標本化公式 (2-3), (2-4) 及び (2-11) の諸例のうち $m\geqslant 2$ の場合について，特に，式 (2-15) の $m$ が 2 以上の場合の標本化公式については，別の機会に公表したい。

## 参 考 文 献


1) Kohlenberg, A.: J. Appl. Phys. **24** (1953), 1432.
2) Fogel, L. J.: IRE Trans. on Information Theory **IT-1** (1955), 47.
3) Jagerman, D. L., and L. J. Fogel: IRE Trans. on Information Theory **IT-2** (1956), 139.
4) Bond, F. E., and C. R. Cahn: IRE Trans. on Information Theory **IT-4** (1958), 110.
5) Linden, D. A., and N. M. Abramson: Information and Control **3** (1960), 26.
6) Balakrishnan, A. V.: IRE Trans. on Information Theory **IT-3** (1957), 143.
7) Yen, J. L.: IRE Trans. on Circuit Theory **CT-3** (1956), 251.
8) Takizawa, É. I., K. Kobayasi, and J. -L. Hwang: Chinese Journ. Phys. **5** (1967), 21.
9) Takizawa, É. I.: *Information Theory and Its Exercises* (1966), Hirokawa Book Co., Tôkyô, p. 275. (in Japanese).
10) Takizawa, É. I., and K. Kobayasi: Memo. Fac. Engng., Nagoya Univ. **21** (1969), 153.
11) Takizawa, É. I., K. Kobayasi, and J. -L. Hwang: Memo. Institute of Math. Analysis, Kyôto Univ **No. 85** (April 1970), 16.
12) Takizawa, É. I., and J. -L. Hwang: Memo. Fac. Engng., Hokkaidô Univ. **13** (1971), 111.
13) Someya, I.: *Transmission of Wave-Forms* (1949), Syûkyôsya Book Co., Tôkyô. (in Japanese)
14) Shannon, C. E.: Bell System Techn. Journ. **27** (1948), 379, 623.
15) Shannon, C. E., and W. Weaver: *Mathematical Theory of Communication* (1949), Univ. of Illinois Press.
16) Isomiti, Y.: Research Group of Information Theory, Report **IT 67-36** Soc. of Electrocommunication (1967), 1. (in Japanese)

17) Kroll, W.: Chinese Journ. Phys. **5** (1967), 86.
18) Watson, G. N.: *Theory of Bessel Functions* (1944), Cambridge Univ. Press. p. 576.
19) Watson, G. N.: *Theory of Bessel Functions* (1944), Cambridge Univ. Press. p. 580.
20) Sneddon, I. N.: *Fourier Transforms* (1951), McGraw-Hill. p. 56.
Watson, G. N.: *Theory of Bessel Functions* (1944), Cambridge Univ. Press. p. 470.
Tranter, C. J.: *Integral Transforms in Mathematical Physics* (1956), Methuen, London. p. 89.
21) Collins, R. E.: *Mathematical Methods for Physicists and Engineers* (1968), Reinhold Book Corporation, New York. p. 356.
22) Reza, F. M.: *Introduction to Information Theory* (1961), McGraw-Hill, New York. p. 454,
23) Hochstadt,H.: *Special Functions of Mathematical Physics* (1961), Holt, Rinehart and Winston, New York. p. 14.
24) Wheelon, A. D.: *Tables of Summable Series and Integral Involving Bessel Functions* (1968), Holden-Day, San Francisco, California. p. 48 and 50.
25) Multhopp, H.: Luftfahrtforschung **15** (1938), 153.
26) Takizawa, É. I., and H. Isigaki: Memo. Fac. Engineering, Hokkaidô Univ. **13** (1974), 281.