



Title	一般化された標本化定理の諸例について
Author(s)	滝沢, 英一; 謝, 世明; 洪, 吉成
Citation	北海道大學工學部研究報告, 71, 57-68
Issue Date	1974-06-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/41205
Type	bulletin (article)
File Information	71_57-68.pdf



[Instructions for use](#)

一般化された標本化定理の諸例について

滝沢 英一* 謝 世明** 洪 吉成***

(1973年10月30日受理)

On Some Examples of Generalized Sampling Theorem

Êi Iti TAKIZAWA*, Shih Ming HSIEH**, and Jyi Cherng HORNG***

(Received October 30, 1973)

Abstract

New examples of the generalized sampling theorem are given, in which a function can be reconstructed from its sampled values and sampled derivatives. The formulae presented here can be used effectively as interpolation or extrapolation formulae. Especially, a sampling formula, which contains a generalized sampling function of polynomial form, can be used as an extrapolation formula.

§1 はじめに

標本化定理を一般化する研究, 特に, 或る一つの函数が有限帯域の週波数スペクトルを持つ場合に, 函数の標本値と標本導函数値とを用いて, 函数を再構成する研究は, Kohlenberg¹⁾, Fogel²⁾, Jagerman と Fogel³⁾, Bond と Cahn⁴⁾, Linden と Abramson⁵⁾ 等によって行われた。Balakrishnan⁶⁾ は, 連続パラメータの確率過程の場合に, 標本化定理を一般化した。又, 標本間隔は, 一定でなくてもよいことも示されている⁷⁾。

先の論文で⁸⁻¹²⁾, 著者の一人 Takizawa は, 積分変換を考慮して, 一般化された標本化定理を提案し, 新しい標本化公式を提出した。

最近 Takizawa と Isigaki²⁰⁾ は, 積分変換を使わずに, 標本化定理の一般化を行い, 標本値と標本導函数値とを用いて, 函数を構成する方法を提案し, 新しい標本化定理の例にも触れている。本論文に於いては, Takizawa と Isigaki により提案された此の一般標本化定理に基づいて, 若干の新しい標本化公式を提出した。本文中, §1~§3 及び §5 は滝沢, 謝, 洪により執筆され, §4 は洪により計算された。

§2 一般化された標本化定理

Takizawa と Isigaki によって提案された, 一般化された標本化定理²⁰⁾の要点を下記しよう。

[定理] 次の三条件:

- (I) $g(z)$ は整函数である,
- (II) $g(z)$ は点 $z=z_n$ (n =整数) で (m_n+1) 位の零点を持つ,

* Institute of Precision Mechanics, Faculty of Engineering, Hokkaidô University, Sapporo, Japan

** Department of Physics, Taiwan University (台湾大学), Taipei, China

*** Visiting Research Associate of Hokkaidô University, now on leave from Physics Section, Tatung Institute of Technology (大同工学院), Taipei, China

すなわち

$$\left. \begin{aligned} g(z_n) = g'(z_n) = g''(z_n) = \dots = g^{(m_n)}(z_n) = 0, \\ g^{(m_n+1)}(z_n) \neq 0, \quad (\text{但し, } m_n \text{ は } n \text{ に依存する整数, } m_n \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

及び

$$(III) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = 0, \quad (2-2)$$

が満足されるとき、整函数 $f(z)$ は、

$$f(z) = \sum_n \sum_{k=0}^{m_n} \sum_{j=0}^{m_n-k} \frac{f_n^{(j)}}{j!} \frac{H_n^{(k)}}{k!} (z-z_n)^{j+k} \frac{g(z)}{(z-z_n)^{m_n+1}} \quad (2-3)$$

$$= \sum_n \sum_{s=0}^{m_n} \sum_{j=0}^s \frac{f_n^{(j)}}{j!} \frac{H_n^{(s-j)}}{(s-j)!} (z-z_n)^s \frac{g(z)}{(z-z_n)^{m_n+1}}, \quad (2-4)$$

と表わされる。ここで

$$f_n^{(j)} = \left[\frac{d^j}{dz^j} f(z) \right]_{z=z_n}, \quad h(z) = \frac{g(z)}{(z-z_n)^{m_n+1}} = \frac{1}{H(z)}, \quad (2-5)$$

$$\begin{aligned} H_n^{(k)} &= \left[\frac{d^k}{dz^k} H(z) \right]_{z=z_n} = \left[\frac{d^k}{dz^k} \frac{(z-z_n)^{m_n+1}}{g(z)} \right]_{z=z_n} = \\ &= \frac{(-1)^k}{h_n} \begin{vmatrix} \frac{h'_n}{h_n} & 1 & 0 & & 0 \\ \frac{h''_n}{h_n} & 2C_1 \frac{h'_n}{h_n} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \frac{h_n^{(k-1)}}{h_n} & k-1 C_1 \frac{h_n^{(k-2)}}{h_n} & k-1 C_2 \frac{h_n^{(k-3)}}{h_n} & \dots & 1 \\ \frac{h_n^{(k)}}{h_n} & k C_1 \frac{h_n^{(k-1)}}{h_n} & k C_2 \frac{h_n^{(k-2)}}{h_n} & \dots & k C_{k-1} \frac{h'_n}{h_n} \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (2-6)$$

である。また

$$\left. \begin{aligned} {}_p C_q \frac{h_n^{(p-q)}}{h_n} &= \frac{p!(m_n+1)!}{q!(m_n+1+p-q)!} \frac{g_n^{(m_n+1+p-q)}}{g_n^{(m_n+1)}}, \quad (p, q=0, 1, 2, \dots) \\ g_n^{(r)} &= \left[\frac{d^r}{dz^r} g(z) \right]_{z=z_n}, \quad (r=0, 1, 2, \dots) \\ h_n^{(r)} &= \left[\frac{d^r}{dz^r} h(z) \right]_{z=z_n}, \quad (r=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

式 (2-3) 及び (2-4) の中で n についての和は、条件 (II) を満足するすべての標本点 $z=z_n$ についての和を表わす。函数 $g(z)/(z-z_n)^{m_n+1}$ を一般化された標本化函数と呼ぶ。

[注意] 条件 (II) は次の条件 (II') によって置き換え得る。

(II') 函数 $f(z)/g(z)$ は、 $z=z_n$ において、有限な正の整数 (m_n-p_n+1) 位の極を持ち ($m_n=0, 1, 2, \dots, n$)、且つ、函数 $f(z)$ が、 $z=z_n$ で p_n 位の零点を持つ。 (2-8)

もし式 (2-4) において、すべての m_n が等しいとき、これを m と書けば、次の系を得る。

[系 1] 次の三条件:

(I) $g(z)$ は整函数である、

$$(II) \quad \left. \begin{aligned} g_n = g'_n = g''_n = \dots = g_n^{(m)} = 0, \\ g_n^{(m+1)} \neq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

及び

$$(III) \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{g(z)} = 0, \quad (2-10)$$

が成立するとき、整函数 $f(z)$ は次式で表わされる：

$$f(z) = \sum_n \sum_{s=0}^m \sum_{j=0}^s \frac{f_n^{(j)}}{j!} \frac{H_n^{(s-j)}}{(s-j)!} (z-z_n)^s \frac{g(z)}{(z-z_n)^{m+1}}. \quad (2-11)$$

式 (2-11) より次の系を得る。

[系 2] 整函数 $g(z)$ が、上の条件 (I), (II) 及び (III) を満たし、且つ函数 $g(z)$ が点 $z=z_n$ において、次の形の Taylor 級数：

$$(IV) \quad \left. \begin{aligned} g(z) &= A_{m+1}(z-z_n)^{m+1} + \sum_{s=1}^{\infty} A_{2m+1+s}(z-z_n)^{2m+1+s}, \\ A_{m+1} &\neq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

に展開出来るとき、式 (2-11) は次式の如く簡単化される：

$$f(z) = \sum_n \sum_{s=0}^m f_n^{(s)} \frac{(z-z_n)^s}{s!} \frac{1}{\frac{g_n^{(m+1)}}{(m+1)!}} \frac{g(z)}{(z-z_n)^{m+1}}, \quad (2-13)$$

特に、 $m=0$ のときには、式 (2-11) は

$$f(z) = \sum_n f_n H_n \frac{g(z)}{(z-z_n)} = \sum_n f_n \frac{g(z)}{(z-z_n) h_n} = \sum_n f_n \frac{g(z)}{(z-z_n) g_n'}, \quad (2-14)$$

となる。

式 (2-14) は既に van der Pol²²⁾ によって示唆されている。すなわち、整函数 $g(z)$ は $z=z_n$ において単根を持ち、 $f(z)$ はそのフーリエ・スペクトルが有限な帯域を占める函数であり、函数 $f(z)$ と $g(z)$ とが共通の零点を持たないならば、式 (2-14) を得る。

又、 $m \geq 1$ のときには

$$g(z) = \varphi^{m+1}(z), \quad (2-15)$$

と採れば、実用上有利である。但し、 $\varphi(z)$ は一位の零点のみを持つ整函数である。このとき、標本化公式 (2-11) は

$$f(z) = \sum_n \sum_{s=0}^m \sum_{j=0}^s \frac{f_n^{(j)}}{j!} \frac{H_n^{(s-j)}}{(s-j)!} (z-z_n)^s \frac{\varphi^{m+1}(z)}{(z-z_n)^{m+1}}, \quad (2-16)$$

となる。但し、 $H_n^{(k)}$ は式 (2-6) で与えられる。又

$$h_n = \frac{g_n^{(m+1)}}{(m+1)!} = (\varphi_n')^{m+1}, \quad (2-17)$$

$$\begin{aligned} {}_s C_r \frac{h_n^{(s-r)}}{h_n} &= \frac{s!(m+1)!}{r!(m+1+s-r)!} \frac{g_n^{(m+1+s-r)}}{g_n^{(m+1)}} = \frac{s!}{r!} \frac{1}{(\varphi_n')^{m+1}} \times \\ &\times \sum_{\substack{p_1+p_2+\dots+p_{s-r+1}=m+1 \\ p_1+2p_2+\dots+(s-r+1)p_{s-r+1}=m+1+s-r}} \frac{(m+1)!}{p_1! p_2! \dots p_{s-r+1}!} \left(\frac{\varphi_n'}{1!}\right)^{p_1} \left(\frac{\varphi_n''}{2!}\right)^{p_2} \dots \left(\frac{\varphi_n^{(s-r+1)}}{(s-r+1)!}\right)^{p_{s-r+1}}, \end{aligned} \quad (2-18)$$

である。

§3 $m=0$ なる場合の標本化公式の諸例

式 (2-11) は、 $m=0$ の場合には、van der Pol²²⁾ により示唆された標本化公式 (2-14) となる。

[例 1] 区間 $a \leq z \leq b$ での s 次の直交多項式を $\phi_s(z)$ としよう、即ち

$$\phi_s(z) \in \left\{ \phi_k(z) \mid k=1, 2, \dots; \int_a^b W(z) \phi_m(z) \phi_n(z) dz = \delta_{m,n} \right\}, \quad (3-1)$$

を考える。但し、 $W(z)$ は重み函数である。式 (2-14) より $f(z)$ の近似式 $\bar{f}(z)$ は、

$$\bar{f}(z) = \sum_{n=1}^s f(z_n) \frac{\phi_s(z)}{(z-z_n)\phi_s'(z_n)}, \quad (3-2)$$

となる。式 (3-2) の右辺は、 $(s-1)$ 次の多項式である。もし函数 $f(z)$ が $(s-1)$ 次の多項式ならば、式 (3-2) の $\bar{f}(z)$ は s 個の点で、 $f(z)$ と一致する。従って函数 $\bar{f}(z)$ は、恒等的に $f(z)$ と等しい。もし $f(z)$ が $(s-1)$ 次よりも高次の多項式ならば、式 (3-2) の $\bar{f}(z)$ は $f(z)$ 自身に等しくはないが、 $f(z)$ の近似式を与えることになる。

さて、 $f(z)$ が、 $(2s-1)$ 次の多項式ならば、

$$\int_a^b w(z)f(z)dz = \int_a^b w(z)\bar{f}(z)dz, \quad (3-3)$$

が成立することが分る²⁹⁾。(但し、 $w(z)$ は上述の重み函数である。) その理由は、函数 $f(z) - \bar{f}(z)$ は高々 $(2s-1)$ 次の多項式であり、又この函数の零点達の中に $\phi_s(z)$ の零点達があるからである。何となれば、 $\phi_s(z_n) = 0$ なる z_n に対し、

$$f(z_n) = \bar{f}(z_n), \quad (3-4)$$

が成り立つ。従って、いま

$$f(z) - \bar{f}(z) = \phi_s(z)r(z), \quad (3-5)$$

と書く。此処で、 $r(z)$ は高々 $(s-1)$ 次の多項式である。従って、

$$\int_a^b w(z)f(z)dz - \int_a^b w(z)\bar{f}(z)dz = \int_a^b w(z)\phi_s(z)r(z)dz = 0, \quad (3-6)$$

を得る。何となれば、 s 次の直交多項式 $\phi_s(z)$ は、より低次の多項式と夫々直交しているからである。式 (3-2) を式 (3-3) に代入して、

$$\int_a^b w(z)f(z)dz = \sum_{n=1}^s f(z_n)\lambda_n, \quad (3-7)$$

を得る。但し、常数 λ_n は **Christoffel 数**

$$\lambda_n = \int_a^b w(z) \frac{\phi_s(z) dz}{(z-z_n)\phi_s'(z_n)}, \quad (3-8)$$

である。

$f(z)$ が高々 $(2s-1)$ 次の多項式であるならば、 s 以下の個数の点で $f(z)$ の値が分っていれば、積分 (3-7) が計算出来る。 $f(z)$ がその様な多項式でない場合にも、式 (3-7) により積分を近似的に計算することが出来る。この公式は **Gauss の求積公式** に他ならない。

Lagrange の公式 を計算する為には、上記の $\phi_s(z)$ でなくて

$$g(z) = \prod_{k=1}^s (z - z_k), \quad (3-9)$$

と採ればよい。このとき

$$\bar{f}(z) = \sum_{n=1}^s f(z_n)L_n(z), \quad (3-10)$$

を得る。但し

$$L_n(z) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^s \frac{(z - z_k)}{(z_n - z_k)}, \quad (3-11)$$

であり、函数 $L_n(z)$ は

$$L_n(z_p) = \delta_{n,p}, \quad (1 \leq p \leq s), \quad (3-12)$$

なる性質を持つ。

[例 2] 式 (2-14) で、Tchebycheff の多項式を用いて

$$g(z) = \cos(\alpha \cos^{-1} \beta z), \quad (\alpha \beta \neq 0) \quad (3-13)$$

とすれば, $f(z)$ は次式によって近似される。但し α, β , は常数とする。

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{\alpha} \sum_n (-1)^n f(z_n) \sqrt{1 - \beta^2 z_n^2} \frac{\cos(\alpha \cos^{-1} \beta z)}{\beta(z - z_n)}. \quad (3-14)$$

但し, z_n は

$$\cos(\alpha \cos^{-1} \beta z_n) = 0, \quad (\alpha = \text{整数}) \quad (3-15)$$

の根である。即ち

$$\cos^{-1} \beta z_n = \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{n\pi}{\alpha}. \quad (n \text{ は整数}) \quad (3-16)$$

もし函数 $f(z)$ が $(s-1)$ 次の多項式ならば,

$$f(z) = \frac{1}{s} \sum_{n=1}^s (-1)^n f(z_n) \sqrt{1 - \beta^2 z_n^2} \frac{\cos(s \cos^{-1} \beta z)}{\beta(z - z_n)}, \quad (3-17)$$

である。但し, z_n ($n=1, 2, 3, \dots, s$) は $\cos(s \cos^{-1} \beta z)$ の零点である。

式 (3-14) において $\beta z = \cos \theta$, $\beta z_n = \cos \theta_n$, とおけば, 次式を得る。

$$\bar{f}\left(\frac{\cos \theta}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha} \sum_n (-1)^n f\left(\frac{\cos \theta_n}{\beta}\right) \sin \theta_n \frac{\cos(\alpha \theta)}{\cos \theta - \cos \theta_n}. \quad (3-18)$$

上式を区間 $0 \leq \theta \leq \pi$ にわたって積分すれば次式を得る。

$$\int_0^\pi \bar{f}\left(\frac{\cos \theta}{\beta}\right) d\theta = \frac{1}{\alpha} \sum_n (-1)^n f\left(\frac{\cos \theta_n}{\beta}\right) \sin \theta_n \oint_0^\pi \frac{\cos \alpha \theta}{\cos \theta - \cos \theta_n} d\theta. \quad (3-19)$$

但し積分 $\oint_0^\pi d\theta$ は, 点 $\theta = \theta_n$ において Cauchy の主値を採ることを意味する。

α が正の整数なるとき, 積分公式:

$$\oint_0^\pi \frac{\cos(\alpha \theta)}{\cos \theta - \cos \theta^*} d\theta = \pi \frac{\sin(\alpha \theta^*)}{\sin \theta^*},$$

を使えば, 式 (3-19) は

$$\int_0^\pi \bar{f}\left(\frac{\cos \theta}{\beta}\right) d\theta = \frac{\pi}{\alpha} \sum_n (-1)^n f\left(\frac{\cos \theta_n}{\beta}\right) \sin(\alpha \theta_n), \quad (3-20)$$

となる。

式 (3-18), (3-20) は本質的には Multihopp²⁵⁾ によって与えられた近似的な求積法の公式と同一である。

[例 3] 式 (2-14) に於いて

$$g(z) = \sin(\alpha z + \beta), \quad (\alpha, \beta \text{ は常数}) \quad (3-21)$$

とおけば, 染谷¹³⁾の標準化公式を得る。

すなわち

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi - \beta}{\alpha}\right) \frac{\sin(\alpha z + \beta - n\pi)}{(\alpha z + \beta - n\pi)}, \quad (\alpha \neq 0) \quad (3-22)$$

である。 $\sin(\alpha z + \beta - n\pi)/(\alpha z + \beta - n\pi)$ は標準化函数である。

いま函数 $f(z)$ のフーリエ・スペクトルが有限領域内に限られているとき, その最大周波数を W と書けば

$$\frac{1}{|\alpha|} < \frac{1}{W}, \quad (3-23)$$

が成立すれば, 式 (2-2) の条件 (III) が満足されることが知られている³⁾。式 (3-22) で $\beta = 0$ とおけば, よく知られた Shannon の公式^{14, 15)}:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right) \frac{\sin(\alpha z - n\pi)}{(\alpha z - n\pi)}, \quad (\alpha \neq 0) \quad (3-24)$$

を得る²¹⁾。また, 式 (3-24) の特別な場合として, 次式を得る。

$$\exp[-\gamma z^2] \cos \beta z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp[-\gamma(n\pi/\alpha)^2] \cos\left(\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right) \frac{\sin(\alpha z - n\pi)}{(\alpha z - n\pi)}, \quad (\gamma > 0, \alpha \neq 0) \quad (3-25)$$

及び

$$\exp[-\gamma z^2] \sin \beta z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp[-\gamma(n\pi/\alpha)^2] \sin\left(\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right) \frac{\sin(\alpha z - n\pi)}{(\alpha z - n\pi)}. \quad (\gamma > 0, \alpha \neq 0) \quad (3-26)$$

[例 4] A, B, α を常数として

$$g(z) = z \sin \alpha z - A \cos \alpha z, \quad (\alpha A \neq 0) \quad (3-27)$$

或いは

$$g(z) = z \cos \alpha z - B \sin \alpha z, \quad (\alpha B \neq 0) \quad (3-28)$$

と置けば、式 (2-14) より夫々次式を得る。

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\lambda_n) \frac{1}{\lambda_n} \frac{\cos(\alpha \lambda_n)}{1 + \frac{\sin(2\alpha \lambda_n)}{2\alpha \lambda_n}} \frac{z \sin \alpha z - A \cos \alpha z}{\alpha z - \alpha \lambda_n}, \quad (3-29)$$

或いは

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\eta_n) \frac{(-1)}{\eta_n} \frac{\sin(\alpha \eta_n)}{1 - \frac{\sin(2\alpha \eta_n)}{2\alpha \eta_n}} \frac{z \cos \alpha z - B \sin \alpha z}{\alpha z - \alpha \eta_n}. \quad (3-30)$$

上式の λ_n, η_n は夫々次の方程式の根である。この根を大きさの順序に並べ、 $n > 0$ なるとき $\lambda_n, \eta_n > 0, n < 0$ なるとき $\lambda_n, \eta_n < 0$ とする。

$$\lambda_n \sin \alpha \lambda_n - A \cos \alpha \lambda_n = 0, \quad (3-31)$$

$$\eta_n \cos \alpha \eta_n - B \sin \alpha \eta_n = 0. \quad (3-32)$$

式 (3-29) の $f(z)$ が偶函数なるとき、 $f(z)$ は次式¹⁰⁻¹²⁾となる。

$$f(z) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} f(\lambda_n) \frac{\cos(\alpha \lambda_n)}{1 + \frac{\sin(2\alpha \lambda_n)}{2\alpha \lambda_n}} \frac{z \sin \alpha z - A \cos \alpha z}{z^2 - \lambda_n^2}. \quad (3-33)$$

上式の $\lambda_n (n=1, 2, 3, \dots)$ は、方程式 (3-31) の正根である。

式 (3-30) の $f(z)$ が奇函数なるとき、

$$f(z) = -\frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} f(\eta_n) \frac{\sin(\alpha \eta_n)}{1 - \frac{\sin(2\alpha \eta_n)}{2\alpha \eta_n}} \frac{z \cos \alpha z - B \sin \alpha z}{z^2 - \eta_n^2}, \quad (3-34)$$

となる。上式の $\eta_n (n=1, 2, 3, \dots)$ は、方程式 (3-32) の正根である。

式 (3-27), (3-28) において、 $A \rightarrow 0, B \rightarrow 0$ の極限の場合には、夫々次式を得る。

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right) \frac{\alpha z \sin(\alpha z - n\pi)}{\alpha z - n\pi} + \{f(0) + zf'(0)\} \frac{\sin \alpha z}{\alpha z}, \quad (3-35)$$

及び

$$f(z) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} f\left(\frac{n\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{2\alpha}\right) \frac{\alpha z \cos(\alpha z - n\pi)}{\alpha z - n\pi - (1/2)\pi} + f(0) \cos \alpha z. \quad (3-36)$$

上式は Shannon の公式 (3-24) とは少々異なる形をしている。

式 (3-35) と式 (3-36) との例は夫々次の如くである。

$$\sin(\beta z) = \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right) \frac{\alpha z \sin(\alpha z - n\pi)}{\alpha z - n\pi} + \frac{\beta}{\alpha} \sin \alpha z, \quad (3-37)$$

$$\cos(\beta z) = \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right) \frac{\alpha z \sin(\alpha z - n\pi)}{\alpha z - n\pi} + \frac{\sin \alpha z}{\alpha z}, \quad (3-38)$$

$$J_0(\beta z) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} J_0\left(\frac{n\pi\beta}{\alpha}\right) \frac{\alpha z \sin(\alpha z - n\pi)}{\alpha z - n\pi} + \frac{\sin \alpha z}{\alpha z}, \quad (3-39)$$

及び

$$\sin(\beta z) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\pi\beta/\alpha + \beta\pi/2\alpha)}{n\pi + \pi/2} \frac{\alpha z \cos \alpha z}{\alpha z - n\pi - \pi/2} \quad (3-40)$$

$$\cos(\beta z) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(n\pi\beta/\alpha + \beta\pi/2\alpha)}{n\pi + \pi/2} \frac{\alpha z \cos \alpha z}{\alpha z - n\pi - \pi/2} + \cos \alpha z, \quad (3-41)$$

$$J_0(\beta z) = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{J_0(n\pi\beta/\alpha + \beta\pi/2\alpha)}{n\pi + \pi/2} \frac{\alpha z \cos \alpha z}{\alpha z - n\pi - \pi/2} + \cos \alpha z. \quad (3-42)$$

Wheelon²⁴⁾ は (3-39) で $\alpha = \beta = 1$ なる場合の式を示した。

[例 5] 整数 ν 次の Bessel 函数 $J_\nu(z)$ を使って¹²⁾¹⁶⁾¹⁷⁾¹⁸⁾

$$g(z) = J_\nu(\alpha z), \quad (\alpha \neq 0 \text{ は常数}) \quad (3-43)$$

と採る。 $\nu = 1$ の場合には、式 (2-14) は次式となる。

$$f(z) = + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(j_n) \frac{1}{J_1(\alpha j_n)} \frac{J_1(\alpha z)}{\alpha z - \alpha j_n} \quad (3-44)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(j_n) \frac{1}{J_0(\alpha j_n)} \frac{J_1(\alpha z)}{\alpha z - \alpha j_n}. \quad (3-45)$$

此処に、 αj_n は Bessel 函数 $J_1(z)$ の零点である。すなわち、 $J_1(\alpha j_n) = 0$ の根を大きさの順序に並べ、 $n \geq 0$ なるときに $\alpha j_n \geq 0$ 、 $n < 0$ なるとき $\alpha j_n < 0$ とする。

$f(z)$ が奇函数であるとき、式 (3-44) と式 (3-45) は夫々次式となる¹⁰⁻¹²⁾。

$$f(z) = + \frac{2}{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon_n f(j_n) \frac{j_n}{J_1'(\alpha j_n)} \frac{J_1(\alpha z)}{z^2 - j_n^2} \quad (3-46)$$

$$= \frac{4}{\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon_n f(j_n) \frac{j_n}{J_0(\alpha j_n) - J_2(\alpha j_n)} \frac{J_1(\alpha z)}{z^2 - j_n^2}, \quad (\nu = \text{整数}) \quad (3-47)$$

但し、 $\epsilon_n = 1/2$ ($n=0$ のとき)、 $\epsilon_n = 1$ ($n \geq 1$ のとき)。

式 (3-43) で、 $\nu = 1/2$ 或いは $\nu = -1/2$ と置けば、式 (2-14) は夫々次式となる。

(i) $\nu = 1/2$ の時、

$$\frac{f(z)}{\sqrt{z}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi}{\alpha}\right) \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{\sin(\alpha z - n\pi)}{\alpha z - n\pi}, \quad (3-48)$$

(ii) $\nu = -1/2$ の時、

$$\frac{f(z)}{\sqrt{z}} = - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{n\pi}{\alpha} + \frac{\pi}{2\alpha}\right) \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{\cos(\alpha z - n\pi)}{\alpha z - n\pi - (\pi/2)}, \quad (3-49)$$

但し、 $n\pi/\alpha$ 及び $(2n+1)\pi/2\alpha$ は夫々方程式

$$\left. \begin{aligned} J_{1/2}(\alpha z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha z}} \sin \alpha z = 0, \\ J_{-1/2}(\alpha z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha z}} \cos \alpha z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3-50)$$

の根である。

[例 6] 今

$$g(z) = zJ_1'(\alpha z) + hJ_1(\alpha z), \quad (ah \neq 0) \quad (3-51)$$

と採れば¹⁹⁾、式 (2-14) は次式となる。

$$f(z) = -\alpha \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\lambda_n) \frac{\lambda_n}{\{(\lambda_n + h^2)\alpha^2 - 1\} J_1(\alpha \lambda_n)} \frac{zJ_1'(\alpha z) + hJ_1(\alpha z)}{z - \lambda_n}. \quad (3-52)$$

但し、 λ_n は方程式

$$\lambda_n J_1(\alpha \lambda_n) + h J_1(\alpha \lambda_n) = 0, \quad (3-53)$$

の根である。この根を大きさの順に並べ、 $n \geq 0$ のとき $\alpha \lambda_n \geq 0$, $n < 0$ のとき $\alpha \lambda_n < 0$ とする。 $f(z)$ が奇函数のとき、式 (3-52) は次式となる¹⁰⁻¹²⁾。

$$f(z) = -2\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon_n f(\lambda_n) \frac{\lambda_n^2}{\{(\lambda_n^2 + h^2)\alpha^2 - 1\} J_1(\alpha \lambda_n)} \frac{z J_1(\alpha z) + h J_1(\alpha z)}{z^2 - \lambda_n^2}. \quad (3-54)$$

但し、 $\epsilon_n = 1/2$ ($n=0$ のとき)、 $\epsilon_n = 1$ ($n \geq 1$ のとき)。

h が極めて大きい場合には、式 (3-53), (3-52) は夫々、

$$J_1(\alpha \lambda_n) = 0, \quad (3-55)$$

及び

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\lambda_n) \frac{1}{J_0(\alpha \lambda_n)} \frac{J_1(\alpha z)}{\alpha z - \alpha \lambda_n}, \quad (3-56)$$

に近づく。式 (3-56) は式 (3-45) に他ならない。

[例 7] Bessel 函数 $J_\nu(z)$ と Neumann 函数 $Y_\nu(z)$ の線形結合 $T_\nu(x, z)$ を

$$T_\nu(x, z) = Y_\nu(x) J_\nu(z) - J_\nu(x) Y_\nu(z), \quad (x > 0, z > 0) \quad (3-57)$$

と採る。但し、 ν は整数である。今

$$g(z) = T_\nu(\alpha z, \beta z), \quad (0 < \alpha < \beta) \quad (z > 0) \quad (3-58)$$

とすれば、式 (2-14) は、

$$f(z) = -\frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \frac{\lambda_n J_\nu(\alpha \lambda_n) J_\nu(\beta \lambda_n)}{J_\nu^2(\alpha \lambda_n) - J_\nu^2(\beta \lambda_n)} \frac{T_\nu(\alpha z, \beta z)}{z - \lambda_n}, \quad (3-59)$$

となる¹⁰⁻¹²⁾。但し、 $\nu =$ 整数。また λ_n は次式の根である。

$$T_\nu(\alpha \lambda_n, \beta \lambda_n) = 0, \quad (3-60)$$

すなわち、

$$Y_\nu(\alpha \lambda_n) J_\nu(\beta \lambda_n) - J_\nu(\alpha \lambda_n) Y_\nu(\beta \lambda_n) = 0. \quad (3-61)$$

この根を大きさの順に並べて、 $n \geq 0$ のとき $\lambda_n \geq 0$, $n < 0$ のとき $\lambda_n < 0$ とする。

函数 $T_\nu(\alpha z, \beta z)$ は $z > 0$ で定義されているが、 $z < 0$ の場合についても、 $T_\nu(\alpha z, \beta z)$ を定義して、(i) $f(z)$ が偶函数なるとき、 $T_\nu(\alpha z, \beta z)$ は偶函数、(ii) $f(z)$ が奇函数なるとき、 $T_\nu(\alpha z, \beta z)$ は奇函数、とすれば、上記 (i) (ii) 何れの場合にも、式 (3-59) は下式となる¹⁰⁻¹²⁾。

$$f(z) = -\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon_n f_n \frac{\lambda_n^2 J_\nu(\alpha \lambda_n) J_\nu(\beta \lambda_n)}{J_\nu^2(\alpha \lambda_n) - J_\nu^2(\beta \lambda_n)} \frac{T_\nu(\alpha z, \beta z)}{z^2 - \lambda_n^2}. \quad (3-62)$$

但し、 $\epsilon_n = 1/2$ ($n=0$ のとき) 及び $\epsilon_n = 1$ ($n > 0$ のとき)。

$f(z)$ の代りに $f(z)B(z)$ を使えば、函数 $f(z)B(z)$ の標準化公式 (3-59) は次式になる。

$$f(z) = -\frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n B(\lambda_n) \frac{\lambda_n J_\nu(\alpha \lambda_n) J_\nu(\beta \lambda_n)}{J_\nu^2(\alpha \lambda_n) - J_\nu^2(\beta \lambda_n)} \frac{T_\nu(\alpha z, \beta z)}{B(z)(z - \lambda_n)}, \quad (3-63)$$

此処に、 $B(z)$ は与えられた函数とする。又 $f(z)B(z)$ は式 (2-2) の条件 (III) を満すものとする。すなわち

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)B(z)}{T_\nu(\alpha z, \beta z)} = 0. \quad (3-64)$$

もし、式 (3-63) で

$$B(z) = J_\nu^2(\alpha z) + Y_\nu^2(\beta z), \quad (3-65)$$

と採れば、著者の一人が前論文¹⁰⁻¹²⁾に於いて述べた標準化公式を得る²⁰⁾。

[例 8] 式 (2-14) において

$$g(z) = \sin(\alpha z^2 + \beta), \quad (\alpha \neq 0) \quad (3-66)$$

とおけば, $f(z)$ は

$$f(z) = \sum_n f(z_n) \frac{\sin(\alpha z^2 + \beta - n\pi)}{(\alpha z^2 + \beta - n\pi)}, \quad (3-67)$$

となる。但し, 上式で n についての和は, 方程式

$$\sin(\alpha z_n^2 + \beta) = 0, \quad (3-68)$$

のすべての根についての和を意味する。

§4 $m=1$ なる場合の標本化公式の諸例

式 (2-11) で $m \geq 1$ の時, 函数を

$$g(z) = \varphi^{m+1}(z), \quad (4-1)$$

と採ると有利である。但し, 上式の $\varphi(z)$ は一位の零点 z_n をもつ整函数である。このとき, 標本化公式は式 (2-16), である。今, 式 (2-16) より標本化公式を導いて見よう。

[例 1] 式 (4-1) を下の様に採る。

$$\varphi(z) = \phi_s(z). \quad (4-2)$$

上式 $\phi_s(z)$ は s 次の直交多項式であり, 式 (3-1) と同一である。 $m=1$ のとき, $f(z)$ は

$$f(z) = \sum_n \sum_{s=0}^1 \sum_{j=0}^s \frac{f_n^{(j)} H_n^{(s-j)}}{j! (s-j)!} (z-z_n)^s \frac{\phi_s^2(z)}{(z-z_n)^2}, \quad (4-3)$$

となる。上式の z_n は $\phi_s(z)$ の零点である。即ち, $\phi_s(z_n) = 0$ 。

今, 式 (4-1) の $\varphi(z)$ を

$$\varphi(z) = \prod_{k=1}^s (z-z_k), \quad (4-4)$$

に採れば, 式 (4-3) は次式となる。

$$f(z) = \sum_{n=1}^s \left[f_n - 2f_n \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^s \frac{1}{(z_n - z_p)} (z-z_n) + f_n^{(1)} (z-z_n) \right] \frac{1}{\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^s (z_n - z_p)^2} \frac{\prod_{k=1}^s (z-z_k)^2}{(z-z_n)^2}. \quad (4-5)$$

[例 2] 式 (4-1) において, **Tchebycheff** の多項式を用いて

$$\varphi(z) = \cos(\alpha \cos^{-1} \beta z), \quad (\alpha\beta \neq 0) \quad (4-6)$$

に採れば

$$f(z) = \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \sum_n \left[f_n (1 - \beta^2 \lambda_n^2) - f_n \beta^2 \lambda_n (z - \lambda_n) + f_n^{(1)} (1 - \beta^2 \lambda_n^2) (z - \lambda_n) \right] \frac{\cos^2(\alpha \cos^{-1} \beta z)}{(z - \lambda_n)^2}. \quad (4-7)$$

上式の λ_n は次式の根である。

$$\cos^2(\alpha \cos^{-1} \beta \lambda_n) = 0. \quad (4-8)$$

函数 $f(z)$ が偶函数なる時, 式 (4-7) の $f(z)$ は

$$f(z) = \frac{2}{\alpha^2 \beta^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon_n \left[f_n (1 - \beta^2 \lambda_n^2) (z^2 + \lambda_n^2) - f_n \beta^2 \lambda_n^2 (z^2 - \lambda_n^2) + f_n^{(1)} \lambda_n (1 - \beta^2 \lambda_n^2) (z^2 - \lambda_n^2) \right] \frac{\cos^2(\alpha \cos^{-1} \beta z)}{(z - \lambda_n)^2 (z + \lambda_n)^2}, \quad (4-9)$$

但し, $\epsilon_n = 1/2$ ($n=0$ のとき), $\epsilon_n = 1$ ($n > 0$ のとき)。

[例 3] 式 (4-1) において

$$\varphi(z) = \sin(\alpha z + \beta), \quad (\alpha, \beta \text{ は常数}) \quad (4-10)$$

と置けば

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[f_n \frac{1}{\alpha^2} + f_n \frac{\alpha(z - \lambda_n)}{\alpha^2} \right] \frac{\sin^2(\alpha z + \beta)}{(z - \lambda_n)^2}, \quad (\alpha \neq 0) \quad (4-11)$$

函数 $f(z)$ のフーリエ・スペクトルが有限の領域に限られるとき、その最大周波数を W とする。いま

$$\frac{1}{|\alpha|} < \frac{2}{W}, \quad (4-12)$$

なる条件が満足されるならば、式 (2-2) の条件 (III) が成立する³⁾。従つて、条件 (4-12) は (4-11) が成り立つための充分条件である。

[例 4] 式 (4-1) で

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= z \sin \alpha z - A \cos \alpha z, & (\alpha A \neq 0) \\ \text{或いは} \\ \varphi(z) &= z \cos \alpha z - B \sin \alpha z, & (\alpha B \neq 0) \end{aligned} \right\} \quad (4-13)$$

と採る。 α, A, B は常数である。函数 $f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[f_n \frac{\cos^2 \alpha \lambda_n}{(\alpha \lambda_n + (1/2) \sin 2\alpha \lambda_n)^2} - f_n \frac{2\alpha \cos^4 \alpha \lambda_n}{(\alpha \lambda_n + (1/2) \sin 2\alpha \lambda_n)^3} (z - \lambda_n) + f_n^{(1)} \frac{\cos^2 \alpha \lambda_n}{(\alpha \lambda_n + (1/2) \sin 2\alpha \lambda_n)^2} (z - \lambda_n) \right] \frac{(z \sin \alpha z - A \cos \alpha z)^2}{(z - \lambda_n)^2}, \quad (4-14)$$

或いは

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[f_n \frac{\sin^2 \alpha \mu_n}{((1/2) \sin 2\alpha \mu_n - \alpha \mu_n)^2} + f_n \frac{2\alpha \sin^4 \alpha \mu_n}{((1/2) \sin 2\alpha \mu_n - \alpha \mu_n)^3} (z - \mu_n) + f_n^{(1)} \frac{\sin^2 \alpha \mu_n}{((1/2) \sin 2\alpha \mu_n - \alpha \mu_n)^2} (z - \mu_n) \right] \frac{(z \cos \alpha z - B \sin \alpha z)^2}{(z - \mu_n)^2}, \quad (4-15)$$

として夫々表わされる。

上式の λ_n, μ_n は夫々次式の根である。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n \sin \alpha \lambda_n - A \cos \alpha \lambda_n &= 0, \\ \mu_n \cos \alpha \mu_n - B \sin \alpha \mu_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

[例 5] 式 (4-1) で 1 次の Bessel 函数 $J_1(z)$ を用いて

$$\varphi(z) = J_1(\alpha z), \quad (\alpha \text{ は常数}) \quad (4-17)$$

と採れば、

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[f_n + f_n \frac{\alpha J_1'(\alpha j_n)}{2 J_1'(\alpha j_n)} (z - j_n) + f_n^{(1)} (z - j_n) \right] \frac{1}{\alpha^2 \{J_1'(\alpha j_n)\}^2} \frac{\{J_1(\alpha z)\}^2}{(z - j_n)^2}, \quad (4-18)$$

となる。 j_n は方程式 $J_1(\alpha j_n) = 0$ の根である。

[例 6] 式 (4-1) において

$$\varphi(z) = z J_1'(\alpha z) + h J_1(\alpha z), \quad (\alpha h \neq 0) \quad (4-19)$$

と置けば

$$f(z) = \alpha^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[f_n \frac{\lambda_n^2}{(\alpha^2 \lambda_n^2 + \alpha^2 h^2 - 1)^2 J_1^2(\alpha \lambda_n)} + f_n \frac{\lambda_n (\alpha^2 h^2 - \alpha^2 \lambda_n^2 - 1) J_1(\alpha \lambda_n)}{\{(\alpha^2 h^2 + \alpha^2 \lambda_n^2 - 1) J_1(\alpha \lambda_n)\}^3} (z - \lambda_n) + f_n^{(1)} \frac{\lambda_n^2}{(\alpha^2 \lambda_n^2 + \alpha^2 h^2 - 1)^2 J_1^2(\alpha \lambda_n)} (z - \lambda_n) \right] \frac{\{z J_1'(\alpha z) + h J_1(\alpha z)\}^2}{(z - \lambda_n)^2}, \quad (4-20)$$

となる。但し、 λ_n は方程式 $\lambda_n J_1(\alpha \lambda_n) + h J_1(\alpha \lambda_n) = 0$ の根である。

[例 7] 式 (4-1) において、

$$\varphi(z) = T_\nu(\alpha z, \beta z) = Y_\nu(\alpha z) J_\nu(\beta z) - J_\nu(\alpha z) Y_\nu(\beta z), \quad (4-21)$$

と置く。又、 ν は整数、及び、 $0 < \alpha < \beta$ とする。このとき

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[f_n + f_n \left\{ \frac{1-2\nu}{\lambda_n} + \frac{\pi \alpha \beta \lambda_n J_\nu(\alpha \lambda_n) J_\nu(\beta \lambda_n)}{J_\nu^2(\alpha \lambda_n) - J_\nu^2(\beta \lambda_n)} (Y_{\nu+1}(\alpha \lambda_n) J_{\nu+1}(\beta \lambda_n) - \right. \right.$$

$$-J_{\nu+1}(\alpha\lambda_n)Y_{\nu+1}(\beta\lambda_n)\} \times (z-\lambda_n) + f_n^{(1)}(z-\lambda_n) \left] \frac{\pi^2 J_\nu^2(\alpha\lambda_n) J_\nu^2(\beta\lambda_n) \lambda_n^2}{4(J_\nu^2(\alpha\lambda_n) - J_\nu^2(\beta\lambda_n))^2} \frac{T_\nu^2(\alpha z, \beta z)}{(z-\lambda_n)^2}, \quad (4-22)$$

となる。但し、 λ_n は方程式

$$T_\nu(\alpha\lambda_n, \beta\lambda_n) = 0.$$

の根である。

[例 8] 式 (4-1) において

$$\varphi(z) = \sin(\alpha z^2 + \beta), \quad (\alpha, \beta \text{ は常数}, \quad \alpha \neq 0) \quad (4-23)$$

とおけば、

$$f(z) = \sum_n \left[2f_n(n\pi - \beta) + \sqrt{\frac{n\pi - \beta}{\alpha}} f_n^{(1)}(\alpha z^2 + \beta - n\pi) \right] \frac{\sin^2(\alpha z^2 + \beta)}{2(n\pi - \beta)(\alpha z^2 + \beta - n\pi)^2}, \quad (4-24)$$

となる。但し、 n についての和は方程式

$$\sin(\alpha z_n^2 + \beta) = 0, \quad (4-25)$$

のすべての根についての和を意味する。即ち、 $z_n = \pm \sqrt{(n\pi - \beta)/\alpha}$ ($n = \text{整数}$)。

§ 5 結 論

§ 3 及び § 4 において述べた如く、定理 (2-11) を基礎として、若干の標本化公式を導いた。§ 3 においては、公式 (2-14) の例を示した。即ち、標本函数値を使う標本化公式を提出した。§ 4 においては、公式 (2-16) で $m=1$ の場合の例を述べた。即ち、標本函数値と標本導函数値とを使う標本化公式を提出した。

本論文で述べたすべての標本化公式は、内挿公式として利用することが出来る。しかし、標本化公式 (3-2), (3-10), (4-3), (4-5) 等は内挿公式としてのみではなく、外挿公式としても亦有用である。

標本化公式 (2-3), (2-4) 及び (2-11) の諸例のうち $m \geq 2$ の場合について、特に、式 (2-15) の m が 2 以上の場合の標本化公式については、別の機会に公表したい。

参 考 文 献

- 1) Kohlenberg, A.: J. Appl. Phys. **24** (1953), 1432.
- 2) Fogel, L. J.: IRE Trans. on Information Theory **IT-1** (1955), 47.
- 3) Jagerman, D. L., and L. J. Fogel: IRE Trans. on Information Theory **IT-2** (1956), 139.
- 4) Bond, F. E., and C. R. Cahn: IRE Trans. on Information Theory **IT-4** (1958), 110.
- 5) Linden, D. A., and N. M. Abramson: Information and Control **3** (1960), 26.
- 6) Balakrishnan, A. V.: IRE Trans. on Information Theory **IT-3** (1957), 143.
- 7) Yen, J. L.: IRE Trans. on Circuit Theory **CT-3** (1956), 251.
- 8) Takizawa, É. I., K. Kobayasi, and J. -L. Hwang: Chinese Journ. Phys. **5** (1967), 21.
- 9) Takizawa, É. I.: *Information Theory and Its Exercises* (1966), Hirokawa Book Co., Tôkyô, p. 275. (in Japanese).
- 10) Takizawa, É. I., and K. Kobayasi: Memo. Fac. Engng., Nagoya Univ. **21** (1969), 153.
- 11) Takizawa, É. I., K. Kobayasi, and J. -L. Hwang: Memo. Institute of Math. Analysis, Kyôto Univ. **No. 85** (April 1970), 16.
- 12) Takizawa, É. I., and J. -L. Hwang: Memo. Fac. Engng., Hokkaidô Univ. **13** (1971), 111.
- 13) Someya, I.: *Transmission of Wave-Forms* (1949), Syûkyôsyû Book Co., Tôkyô. (in Japanese)
- 14) Shannon, C. E.: Bell System Techn. Journ. **27** (1948), 379, 623.
- 15) Shannon, C. E., and W. Weaver: *Mathematical Theory of Communication* (1949), Univ. of Illinois Press.
- 16) Isomiti, Y.: Research Group of Information Theory, Report **IT 67-36** Soc. of Electrocommunication (1967), 1. (in Japanese)

- 17) Kroll, W. : Chinese Journ. Phys. 5 (1967), 86.
- 18) Watson, G. N. : *Theory of Bessel Functions* (1944), Cambridge Univ. Press. p. 576.
- 19) Watson, G. N. : *Theory of Bessel Functions* (1944), Cambridge Univ. Press. p. 580.
- 20) Sneddon, I. N. : *Fourier Transforms* (1951), McGraw-Hill. p. 56.
Watson, G. N. : *Theory of Bessel Functions* (1944), Cambridge Univ. Press. p. 470.
Tranter, C. J. : *Integral Transforms in Mathematical Physics* (1956), Methuen, London. p. 89.
- 21) Collins, R. E. : *Mathematical Methods for Physicists and Engineers* (1968), Reinhold Book Corporation, New York. p. 356.
- 22) Reza, F. M. : *Introduction to Information Theory* (1961), McGraw-Hill, New York. p. 454,
- 23) Hochstadt, H. : *Special Functions of Mathematical Physics* (1961), Holt, Rinehart and Winston, New York. p. 14.
- 24) Wheelon, A. D. : *Tables of Summable Series and Integral Involving Bessel Functions* (1968), Holden-Day, San Francisco, California. p. 48 and 50.
- 25) Multhopp, H. : *Luftfahrtforschung* 15 (1938), 153.
- 26) Takizawa, É. I., and H. Isigaki : Memo. Fac. Engineering, Hokkaidô Univ. 13 (1974), 281.