



Title	ヒステリシス効果を考慮した磁界の一解法 : 時間, および空間変化のシュミレーション
Author(s)	戸田, 博; 深井, 一郎; 吉田, 則信; 福岡, 醇一
Citation	北海道大學工學部研究報告, 71, 89-98
Issue Date	1974-06-25
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/41209">http://hdl.handle.net/2115/41209</a>
Type	bulletin (article)
File Information	71_89-98.pdf



[Instructions for use](#)

# ヒステリシス効果を考慮した磁界の一解法

——時間, および空間変化のシュミレーション——

戸田 博 深井 一郎 吉田 則信 福岡 醇一

(昭和48年10月31日受理)

## A Method of Calculating a Magnetic Field Taking into Account the Hysteresis Effect

—Simulation of Variation in Time and Space—

Hiroshi TODA, Ichiro FUKAI, Norinobu YOSHIDA and Jun-ichi FUKUOKA

(Received October 31, 1973)

### Abstract

In the simulation by numerical computation of transient phenomena of a magnetic field in a magnetic medium, the hysteresis characteristics for each step of computation must be determined. In this paper we have presented an efficient algorithm for the computation of the hysteresis characteristics, led forth by approximating the hysteresis loop as a line which passes the follows two points namely the residual magnetic flux density and coercive force, on a B-H plane. Further we have presented the transient solution of a magnetic field distribution for a sinusoidal magnetizing input computed by this method.

### 1. ま え が き

磁性材料中の場の解析は電気機械, その他の中で重要なためにふるくから行われている。しかし, 非直線性のために解析が非常に困難である。そのため種々の仮定をおいて行われてきた。最近, 電子計算機の発達に伴い解析法も新しいものが出てきているが, ほとんどの場合ヒステリシスを考慮していない非直線性のみか, 又はヒステリシスを考慮しても磁界のピーク値に対応する固定されたヒステリシス曲線, たとえば, 楕円曲線による表現<sup>1)</sup>とか, 又は実験より求まるヒステリシス曲線等を用いている<sup>2)</sup>。後者の場合は特に計算機に多くのデータを与えなければならない。

しかし, 磁性学の立場からはヒステリシス曲線そのものよりも初期磁化曲線, 残留磁化, 保磁力というものの値が重要であり, それらの値を数値計算で十分利用することによって前述のように大量のデータを必要とすることなく定性的に十分精度を持つ結果を得ることが可能であるとの立場に立って, さらに渦電流損も考慮したアルゴリズムを決定し, それをプログラム化しシュミレーションを行った。その結果ヒステリシス曲線の直線近似の段階にもかかわらず, H, B 曲線, 渦電流損, ヒステリシス損等, 良い結果が得られたので報告するものである。

### 2. 解 析 手 法

#### 2.1 界 方 程 式

図1で示されるように振幅  $H_0$  の正弦波状の磁界が厚さ  $2d$  の磁性体無限平板の両面に加えら

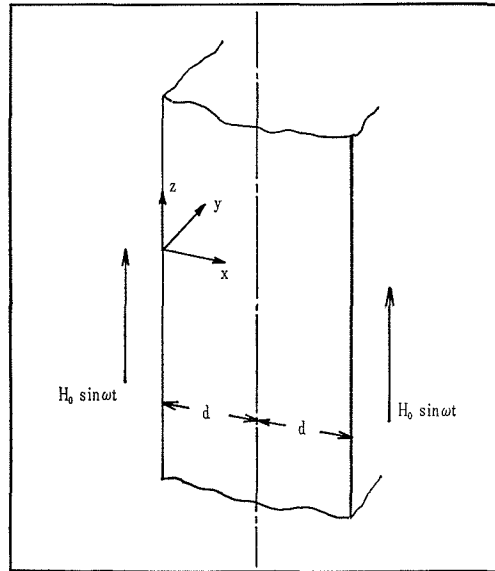


図1 磁性体無限平板

れると仮定する。座標軸は図1で示すように選び、加える磁界は  $z$  軸方向の磁界であり、磁性材料は  $z$  軸方向に沿って磁氣的に均質であり、 $y$  軸方向に沿って電氣的に均一であると仮定する。

一般に媒質中の電磁界はマクスウェルの方程式に支配され、次のように表わされる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{a-1})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{a-2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{a-3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{a-4})$$

ここで  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $t$  はそれぞれ、磁界強度、電界強度、磁束密度、誘電束密度、導電率、電荷密度、時間を表わす。

ここで、図1に示される媒質中において、変位電流は伝導電流に比して無視出来ること、自由電荷が存在しないことを考慮してマクスウェルの方程式を変形すると、

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{a-1}')$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{a-2}')$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (\text{a-3}')$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{a-4}')$$

(a-1'), (a-2') 式より

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times (\sigma \mathbf{E}) = \sigma \nabla \times \mathbf{E} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{b-1})$$

また、

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{H} - \nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla^2 \mathbf{H} \quad (\text{b-2})$$

(b-1), (b-2) 式より

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{b-3})$$

仮定により  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  は  $z$  軸方向成分のみもち、それを  $B$ ,  $H$  と書くことにする、又、 $y$  軸方向、 $z$  軸方向への界の変化はないということより (b-3) 式は

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \sigma \frac{\partial B}{\partial t} \quad (\text{b-3}')$$

(b-3') 式を変形すると界方程式が得られ、それは次のようになる。

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \sigma \frac{dB}{dH} \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1)$$

## 2.2 差分近似式

数値計算を行うために (1) 式に Dufort-Frankel の差分近似<sup>1)</sup> を適用する。図 2 に示されるものがそのための網目座標である。空間、時間分割幅を  $\Delta x$ ,  $\Delta t$  とすると、網目座標  $(i, j)$  が  $x = i\Delta x$ ,  $t = j\Delta t$  として変数  $(x, t)$  に対応し、その時、磁界強度  $H(x, t)$  は  $H(i, j)$  と表現される。

(1) 式の差分近似式を誘導する訳であるが、まず一次導関数は中心差分によって表現される。すなわち、

$$\left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{i,j} = \frac{1}{2\Delta t} \{H(i, j+1) - H(i, j-1)\} \quad (2)$$

また、二次導関数も同様にして、

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \{H(i-1, j) - 2H(i, j) + H(i+1, j)\} \quad (3)$$

そして、どのような点  $(i, j)$  においても関数値は隣接した時間列における値の平均としてとる、すなわち

$$H(i, j) = \frac{1}{2} \{H(i, j+1) + H(i, j-1)\} \quad (4)$$

(3), (4) 式より

$$\left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \{H(i-1, j) - H(i, j-1) - H(i, j+1) + H(i+1, j)\} \quad (5)$$

(2), (5) 式を用いることにより (1) 式の Dufort-Frankel の差分近似式は次のようになる。

$$H(i, j+1) = H(i, j-1) + \alpha \{H(i-1, j) - 2H(i, j-1) + H(i+1, j)\} \quad (6)$$

ここで

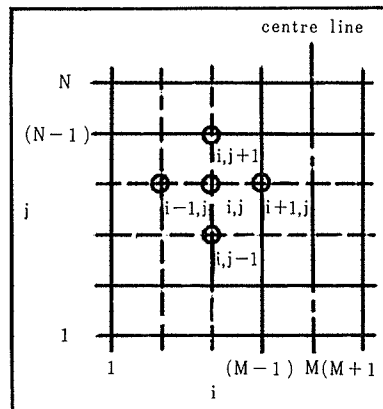


図 2 無限平板に対する網目座標

$$\alpha = \frac{2r}{2r+1} \quad (7)$$

$$r = \frac{\Delta t}{\sigma \left( \frac{dB}{dH} \right)_{i,j} (\Delta x)^2} \quad (8)$$

$(dB/dH)_{i,j}$  は  $B/H$  曲線によって各  $(i, j)$  に対して決められる。

初期条件は

$$H(i, 0) = 0.0 \quad 1 \leq i \leq M \quad (9)$$

$$H(i, 1) = 0.0 \quad 1 \leq i \leq M \quad (10)$$

$i=M$  は中心面を表わす, 又, 対称性より次のことが言える。

$$H(M-1, j) = H(M+1, j) \quad (11)$$

### 2.3 ヒステリシス曲線

初期磁化曲線はフレールリッヒの式を用いて表現出来ると仮定する。それは,

$$B = \frac{H}{a+b|H|} \quad (12)$$

ここで,  $1/a$  は初期透磁率を,  $1/b$  は飽和磁束密度を意味する。

厚さ  $\Delta x$  の磁性体板の各層で磁化は一樣であると仮定し, その各層で磁化は図3のように進行すると仮定する。以下図3に表わされる磁化特性を順を追って説明する。

(1) フレールリッヒの式で表わされる初磁化曲線に沿って  $0 \rightarrow a$  と磁化が進む。

(2)  $a$  で磁界が減少しはじめると  $a \rightarrow b$  と進む。

(3)  $b$  からさらに  $H < 0$  となって減少すると  $b \rightarrow c$  ( $\rightarrow a'$ ) と  $a'$  に向かって進む,  $a'$  は逆磁界が加わっている時の  $a$  に対応する点である。

(4)  $c$  で再び磁界が増加しはじめると  $c \rightarrow d$  と進む。

(5)  $d$  で  $H > 0$  となって, さらに  $H$  が増加すると  $d \rightarrow e(\rightarrow a)$  と  $a$  に向かって進む。

以下, 交流磁界に対して,  $e \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow h \rightarrow i \rightarrow$ , と進行する。そこで,  $a \rightarrow b, c \rightarrow d, e \rightarrow f, \dots$ , などの進行はその直線の傾きをデータとして与える。又, このことは残留磁化を具体的に導入できることを示す。その他の部分は  $a$  もしくは  $(a')$  をめざし進むと仮定する。なお  $a(a')$  は加わった最も強い磁界とそれによって生じた磁束密度, その両方に対応する点である。又, このような進行をとらせることは保磁力を考慮した取扱いである。

以上,  $B/H$  曲線を仮定した訳であるから, これによって (8) 式で明らかでない部分  $(dB/dH)_{i,j}$  についてその値を明らかにしたい。

第一に, 初期磁化過程においては

$$B = \frac{H}{a+bH}$$

であるから

$$\frac{dB}{dH} = \frac{a}{(a+bH)^2} \quad (13)$$

ここで

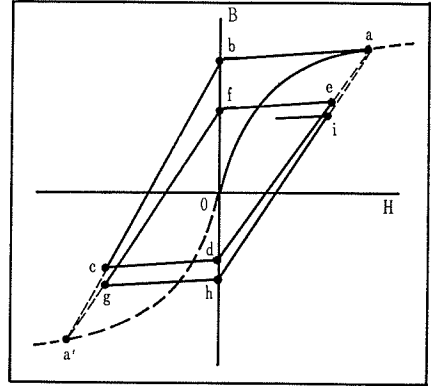


図3 ヒステリシス過程

$$H(i, j+1) = \frac{1}{2} \{H(i-1, j) + H(i+1, j)\} \quad (14)$$

という近似を行う。したがって初期磁化過程では

$$\frac{dB}{dH} \Big|_{i,j} = \frac{a}{\left\{ a + \frac{b}{4} \left| H(i-1, j) + 2H(i, j-1) + H(i+1, j) \right| \right\}^2} \quad (15)$$

又、ヒステリシス曲線上では以前に述べた通り私たちはヒステリシスを図3のように近似したために各ヒステリシス枝について、 $(dB/dH)_{i,j}$  の値は計算機内部で計算される。

#### 2.4 電力損失

電界強度圧は (1) 式を解いたのち次の関係によって決定される。 $E$  は  $y$  軸方向成分  $E$  のみであり、それは

$$E(i, j) = -\frac{1}{\sigma} \frac{H(i+1, j) - H(i, j)}{\Delta x} \quad (16)$$

として与えられる。

図1で示される平板の単位面積当りの全電力損失  $P$  はポインティングベクトルの考え方から、平板表面における  $E, H$  の値を  $E_s, H_s$  とすると

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T E_s \cdot H_s dt \quad (17)$$

となる。ここで  $T$  は加えられる磁界の周期である。全電力損失は渦電流損  $P_e$  とヒステリシス損  $P_h$  の和であると考えられるから

$$P = P_e + P_h$$

ここで  $P_e, P_h$  は次のように書くことができる。

$$P_e = \frac{1}{T} \int_0^d \int_0^T \sigma E^2 dt dx \quad (18)$$

$$P_h = \frac{1}{T} \int_0^d \int_{B(0)}^{B(T)} H dB dx \quad (19)$$

以上の量が界方程式 (1) を解くことにより決定される。

### 3. 計算結果

数値計算に用いた各量の値は次の通りである。

$$\Delta t = 19.53 \mu \text{ sec}$$

$$d = 2.5 \text{ mm}$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$b = 0.59$$

$$a = 30, 156, 450, 900$$

$$H_0 = 1000, 3000, 6000 \text{ A/m}$$

$$\Delta x = 0.1 \text{ mm}$$

$$\sigma = 5 \times 10^6 \text{ S}$$

$$T = \frac{1}{f}$$

なお図中で  $\bar{x} = x/d$  である。

図4は初磁化過程を経て過渡的な  $B/H$  曲線を描きながら定常的な  $B/H$  曲線へと移行する様

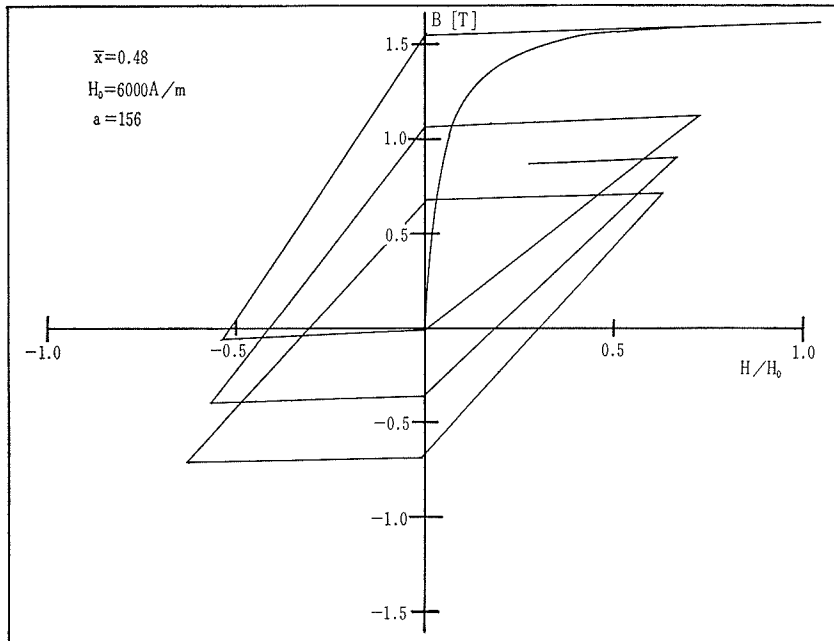


図4 B/H 曲線；過渡状態から定常状態へと移る過程

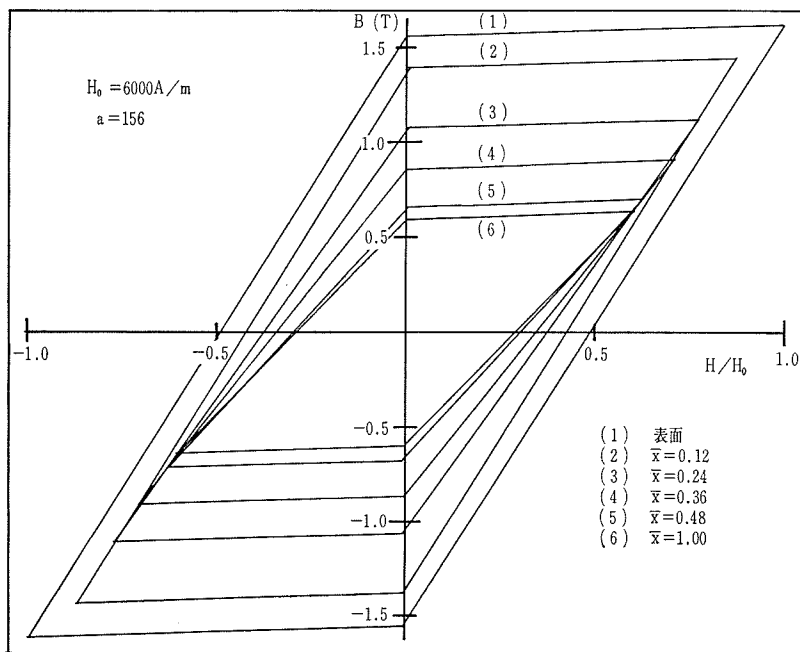


図5 異なった深さでのヒステリシスループ

子を示している。この例では数周期でほぼ定常状態に移った。

図5は平板中の異なった深さでの定常状態における B/H 曲線を示している。

図6は同じ深さにおける磁界強度，磁束密度，電界強度の定常状態における時間変化を示して

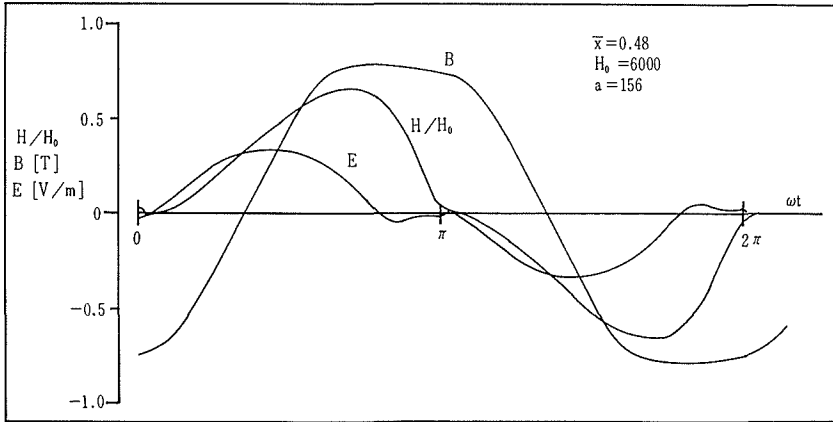


図6 H, B, E 波形

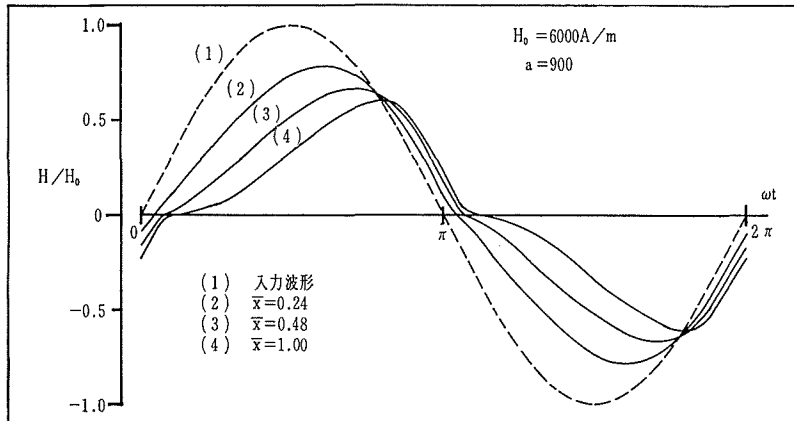


図7 深さによる H 波形の変化

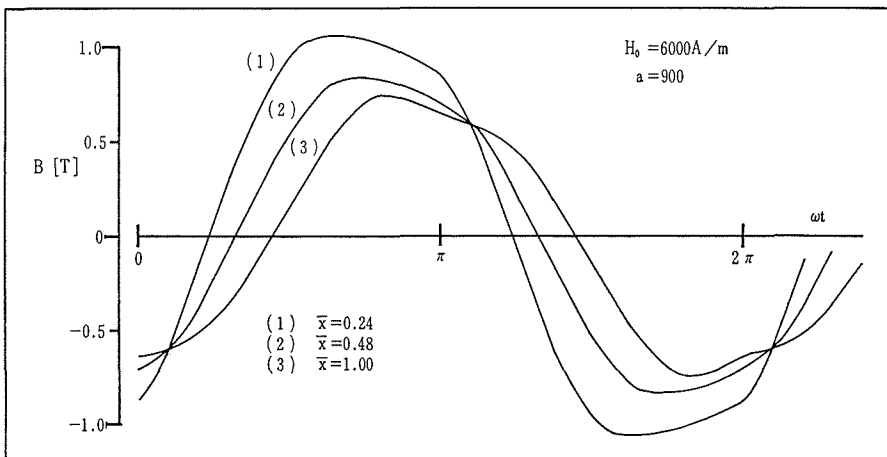


図8 深さによる B 波形の変化



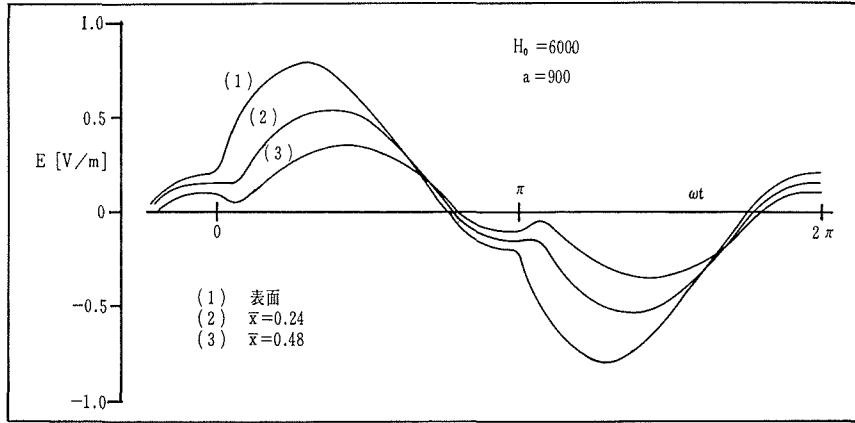


図9 深さによる  $E$  波形の変化

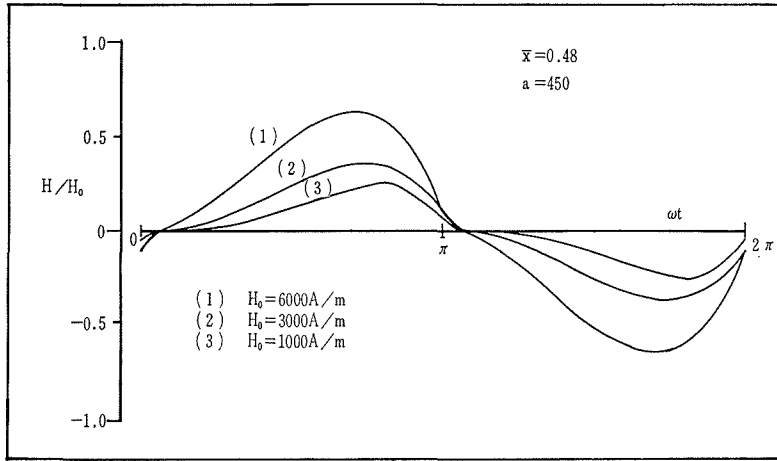


図10 入力振幅による  $H$  波形の変化

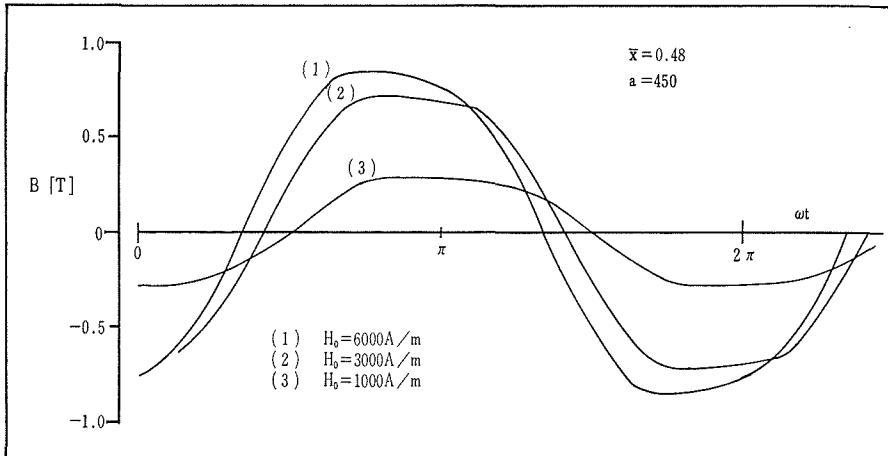
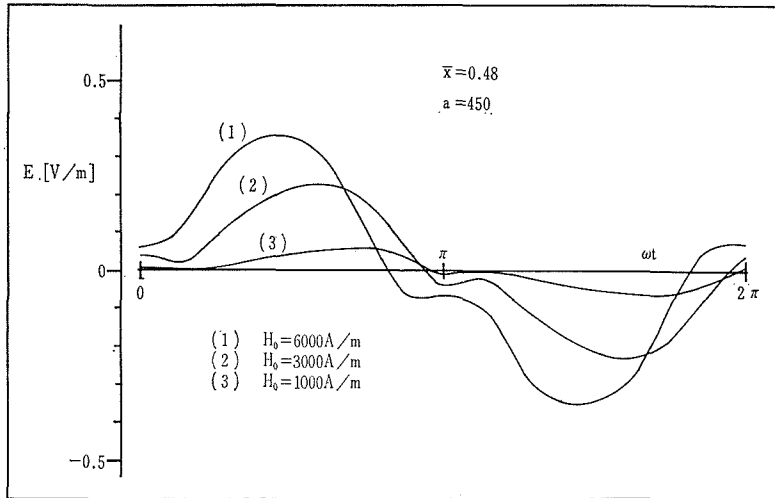
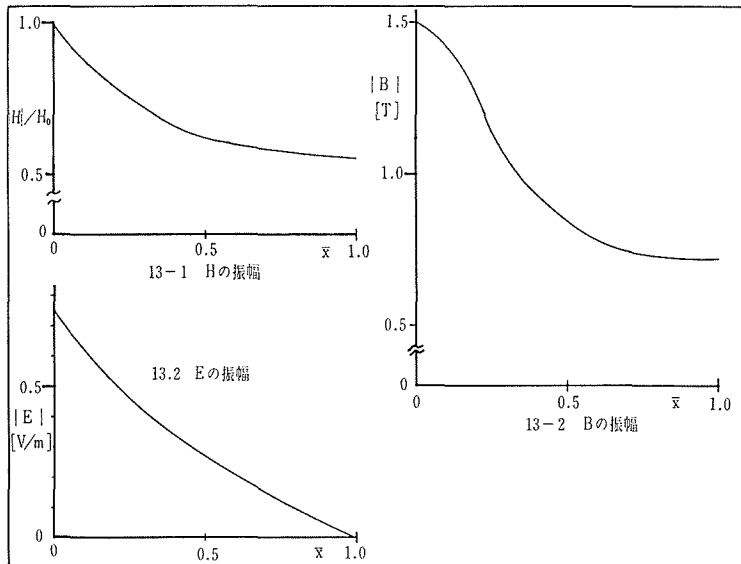


図11 入力振幅による  $B$  波形の変化

図12 入力振幅による  $E$  波形の変化図13  $H_0=6000$  A/m  $a=450$  での深さによる界の振幅の変化

いる。

図7, 図8, 図9は入力振幅  $H_0$  を一定として, それぞれ, 深さによって変化する磁界強度, 磁束密度, 電界強度の定常状態における時間変化を示している。

図10, 図11, 図12は深さを一定として, 入力振幅  $H_0$  を変えた時の磁界強度, 磁束密度, 電界強度の定常状態における時間変化を示している。

図13では磁界強度, 磁束密度, 電界強度が平板内部でどのように減衰するか振幅を用いて表わした。

図14は入力振幅  $H_0=6000$  A/m における単位面積当りの全電力損失と, そのヒステリシス損分, 渦電流損分を示している。この電力損失の計算にあたって平板表面においてポインティングベクトルの考え方を算出した単位面積当りの電力損失と内部界より求めたヒステリシス損と渦電流損

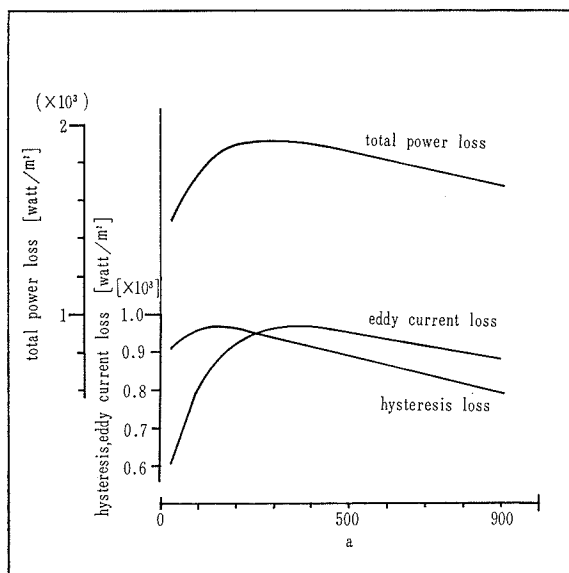


図 14  $H_0=6000$  A/m における電力損失とヒステリシス損、渦電流損分

の和として求まる電力損失は 1% に満たない差で一致した。

#### 4. あとがき

以上のようにヒステリシスループを仮定し、渦電流を考慮した磁性体中の磁界の解析について概略を説明し幾つかの数値例を示した。本方法で得られた結果は他の方法によって得られた結果とよい一致がみられた<sup>2)</sup>。今後、さらにヒステリシスループの近似度を上げることによってよりよい結果の得られることが期待できる。又、本方法は入力波形が時間的に任意の場合にも適用可能であり、2~3の結果も得られているが、そのことについては別の機会に発表する予定である。

終りに有益な御討論、御助言をいただいた本学電子工学科佐藤助教授に感謝致します。

計算にあたっては北大大型計算機センターの FACOM 230-60 を使用した。

#### 参 考 文 献

- 1) Lim, K.K., and Hammon, D. P.: Numerical method for determining the electromagnetic field in saturated steel plates, Proc. IEE, 1972, **119**, (11), pp. 1667-1674.
- 2) Zakrzewski, K., and Pietras, F.: Method of calculating the electromagnetic field and power losses in ferromagnetic materials, taking into account magnetic hysteresis, Proc. IEE, 1971, **118**, (11), pp. 1679-1685.
- 3) O'Kelly, D.: Flux penetration in a ferromagnetic material including hysteresis and eddy-current effects, J. Phys. D, 1972, **5**, pp. 203-213.