



Title	ある非線形ダイナミック・システムのパラメータ・アイデンティフィケーション
Author(s)	佐藤, 昭彦; 小山, 昭一
Citation	北海道大學工學部研究報告, 71, 79-88
Issue Date	1974-06-25
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/41213">http://hdl.handle.net/2115/41213</a>
Type	bulletin (article)
File Information	71_79-88.pdf



[Instructions for use](#)

# ある非線形ダイナミック・システムのパラメータ・アイデンティフィケーション

佐藤 昭彦\* 小山 昭一\*\*

(昭和48年10月31日受理)

## Parameter Identification of a Non-Linear Dynamic System

Akihiko SATO and Shoichi KOYAMA

(Received October 31, 1973)

### Abstract

This is a report on parameter identification of a non-linear dynamic system, which will describe a certain type of catalytic reaction system. This discussion was not made from a chemical point of view but by a technique which involves a reasonable set of parameters where the solution of least squares fit the experimental data by means of considering the mathematical model of a given reaction system. The main purpose of this paper is to find an efficient probing method for parameter identification of such non-linear dynamic systems dealt with here. For this reason we examined the contour lines of an error surface in detail of a given example. The model was simulated on a hybrid computer and a digital computer.

### 1. 緒 言

ある非線形ダイナミック・システムのパラメータ・アイデンティフィケーションを行ったので報告する。システムはある種の触媒反応系を記述するものであり、反応方程式および実測データは、本学合成化学工学科小林教授から提供されたものである。ここでは反応工学的な考察は行わず提供された反応方程式をシステムの数学モデルとし、その応答が実測データに2乗誤差最小の意味で適合するシステムパラメータを決定する手法を考察する。

この報告の主たる目的は、この種のシステムに対するパラメータ・アイデンティフィケーションのための能率のよい探索法を見つけることである。そのためここでは、システムの数学モデルの応答と実測データとの2乗誤差に関する詳細な等高線を求め、解析を行った。システムの応答を得るには、ハイブリッド計算機およびデジタル計算機の双方でシミュレートし比較検討した。

### 2. 問題の記述

ここでとりあげた非線形ダイナミックシステムの数学モデルを記述する微分方程式は次の通りである。

$$\frac{dx_1}{dt} = 40(u - x_1) - 1.98 \times 10^3 K_1(1 - x_4)x_1 \quad (1)$$

\* 工学部汎用シミュレータ室

\*\* 工学部精密工学科

$$\frac{dx_2}{dt} = -40x_2 + 1.98 \times 10^5 K_1 (1-x_4)x_1 \quad (2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -40x_3 + 1.98 \times 10^5 \left\{ K_2 x_4^2 - \frac{1}{2} K_3 x_3 (1-x_4)^2 \right\} \quad (3)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = 4.72 \times 10^4 \left\{ K_1 x_1 (1-x_4) + K_3 x_3 (1-x_4)^2 - 2K_2 x_4^2 \right\} \quad (4)$$

決定すべきパラメータは  $K_1, K_2, K_3$  であり、実測データからそれぞれ  $10^{-5}, 10^{-6}, 10^{-3}$  の程度と想定される。ここで  $u$  は、この系に外部から印加される入力である。

また初期値は次のように与えられる。

$$x_1(0) = 0.038 \times 10^{-2}$$

$$x_2(0) = 0.96 \times 10^{-3}$$

$$x_3(0) = 0.48 \times 10^{-3}$$

ただし  $x_4(0)$  は未知である。

実測データとしては  $x_3$  の値が与えられている。ここでの問題は上の数学モデルの  $x_3$  の応答と実測データとの2乗誤差をパラメータ・アイデンティフィケーションの評価関数とし、それを最小にするようにシステムパラメータ  $K_1, K_2, K_3$  を決定することである。

### 3. 定常値解析

実測データは、システムが十分定常状態にあるときに入力  $u$  をステップ状に変化させたときのシステムの応答として得られている。はじめに、 $x_4$  の初期値を求め、かつ決定するパラメータ  $K_1, K_2, K_3$  の関係を整理するために定常状態のもとにおけるシステムを解析する。

いまシステムが定常状態にあるとすると、 $\frac{dx_i}{dt} = 0 (i=1, 2, 3, 4)$  とおくことにより、変数とパラメータとの関係は次のようになる。

(1), (2) 式より

$$x_1 + x_2 = u \quad (5)$$

$$K_1 = \frac{40(u-x_1)}{1.98 \times 10^5 x_1} \times \frac{1}{1-x_4} = \frac{40x_2}{1.98 \times 10^5 x_1} \times \frac{1}{1-x_4} \quad (6)$$

(2), (3), (4) 式より

$$x_2 = 2x_3 \quad (7)$$

$$x_4 = \frac{K_3 - \sqrt{\frac{2K_2 K_3}{x_3} + \frac{8 \times 10^{-4} K_2}{x_3} - 4 \times 10^{-4} K_2}}{K_3 - \frac{2K_2}{x_3}} \quad (8)$$

(1) 式より

$$x_1 = \frac{40u}{40u + 1.98 \times 10^5 K_1 (1-x_4)} \quad (9)$$

結局、(8) 式から  $x_4$  の初期値は、 $x_3$  の初期値により決定され、パラメータ  $K_1$  は (6) 式から  $x_1, x_4$  の定常値により決定される。従って探索すべきパラメータは  $K_2, K_3$  の2つとなる。

### 4. ハイブリッド・シミュレーション

反応系の実測データにより、変数とパラメータの最大値の範囲を考慮し、次のようにスケールングを行う。スケールングされた変数およびパラメータを  $S_c$  で表わす。

$$\begin{aligned}
 S_{(x_1)} &= x_1 \\
 S_{(x_2)} &= 200 x_2 \\
 S_{(x_3)} &= 700 x_3 \\
 S_{(x_4)} &= x_4 \\
 S_{(K_1)} &= 10^5 K_1 \\
 S_{(K_2)} &= 8 \times 10^5 K_2 \\
 S_{(K_3)} &= 6 \times 10^2 K_3
 \end{aligned}$$

このようにスケーリングを行った値をあらためて  $x_i (i=1\sim 4)$ ,  $K_j (j=1\sim 3)$  と置きなおすと、方程式は次のように表わされる。

$$\frac{dx_1}{dt} = -40x_1 - 1.98K_1(1-x_4)x_1 + 40u \tag{10}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -40x_2 + 396K_1(1-x_4)x_1 \tag{11}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -40x_3 - 165K_3x_3(x_4^2+1) + 330K_3x_3x_4 + 173K_2x_4^2 \tag{12}$$

$$\frac{dx_4}{dt} = 0.472K_1x_1(1-x_4) + 0.112K_3x_3(x_4^2+1) - 0.225K_3x_4 - 0.118K_2x_4 \tag{13}$$

この非線形システム方程式がハイブリッド計算機のアナログ部にパッチングされる。結線図は図1に示したものである。

図2はシステムパラメータ  $K_2$ ,  $K_3$  と2乗誤差の関係を解析するために行ったハイブリッド・シミュレーションのフローチャートである。

$K_2$ ,  $K_3$  と2乗誤差の関係を求めるために、ここでは  $K_2$ ,  $K_3$  を逐次的に変化させ、 $K_1$ ,  $x_4(0)$  を計算し、非線形微分方程式の解法を行っているアナログ部に  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $x_4(0)$  を送っている。

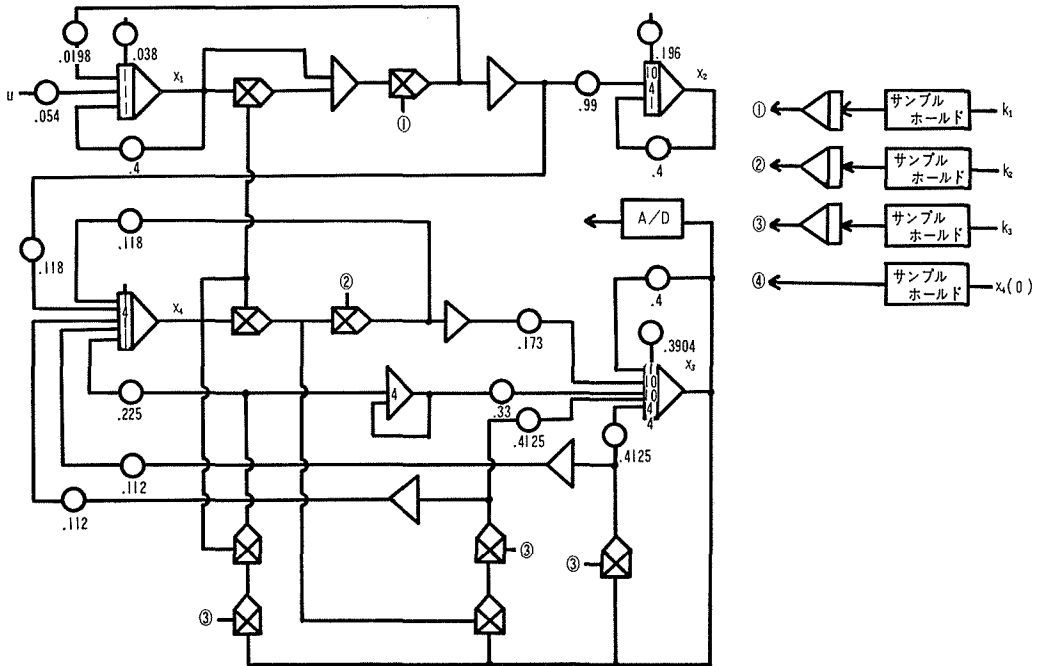
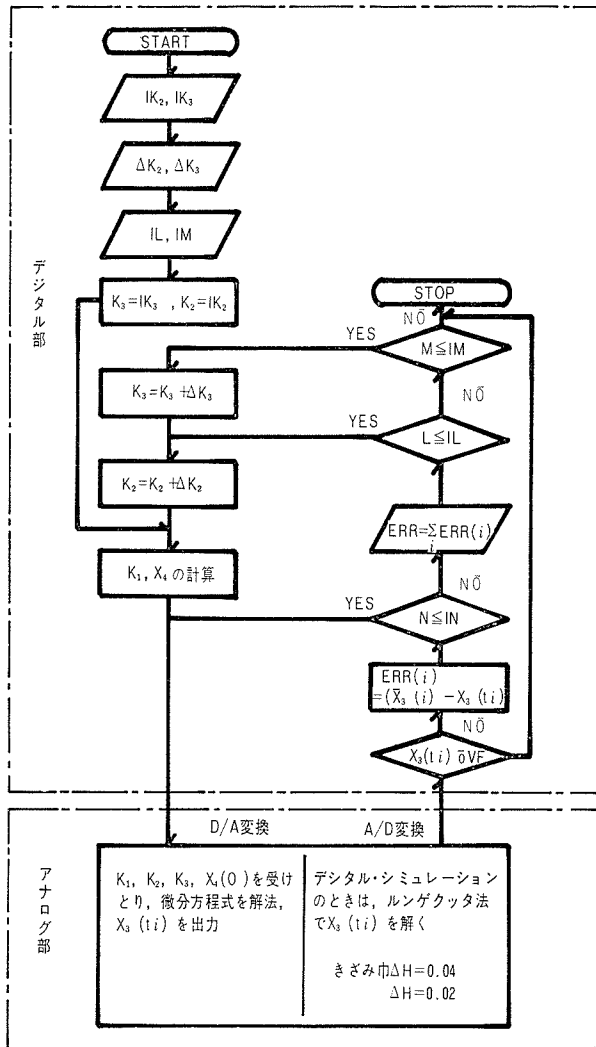


図1 ハイブリッド・シミュレーションにおけるアナログ部結線図



フローチャートの説明

- $IK_2$   $K_2$  の開始値
- $IK_3$   $K_3$  の開始値
- $\Delta K_2$   $K_2$  の増分
- $\Delta K_3$   $K_3$  の増分
- $IL$   $K_2$  の指定分割個数
- $IM$   $K_3$  の指定分割個数
- $IN$  サンプル指定回数
- $L$   $K_2$  の分割数
- $M$   $K_3$  の分割数
- $N$  サンプル回数
- $\hat{x}_3(i)$   $i$  番目の  $x_3$  の実測値
- $\tilde{x}_3(t_i)$   $t_i$  時刻の  $x_3$  のサンプリング値
- $ERR(i)$   $i$  番目の  $x_3$  の実測データとサンプリング値との2乗誤差
- $ERR$   $x_3$  の2乗誤差の総和

図2 ハイブリッド・シミュレーションによるフローチャート

る。アナログ部で計算した  $x_3$  を実測データの実測点と一致した時刻にサンプリングし、2乗誤差をとり、その総和をとっている。

ハイブリッド・シミュレーションによって得られた  $x_1, x_2, x_3, x_4$  の応答の例を図3に示す。実時間では40秒の応答であるが、ここでは時定数を1/10にして、応答1コあたり4秒で計算をしている。また図4は2乗誤差の等高線図である。等高線図中ハッチしてある部分はハイブリッド計算機の精度外のところである。従ってこのハッチされている内部については、計算を繰返す毎に多少の変動があり、またこの内部での等高線にはかなりの乱れが観察される。

この等高線図から、ハイブリッド計算機の誤差<sup>2)</sup>(A/D変換、D/A変換、アナログ部の時定数を速めている等による誤差)を考慮し、デジタル・シミュレーションにおいて求める等高線の  $K_2, K_3$  の範囲を選択した。

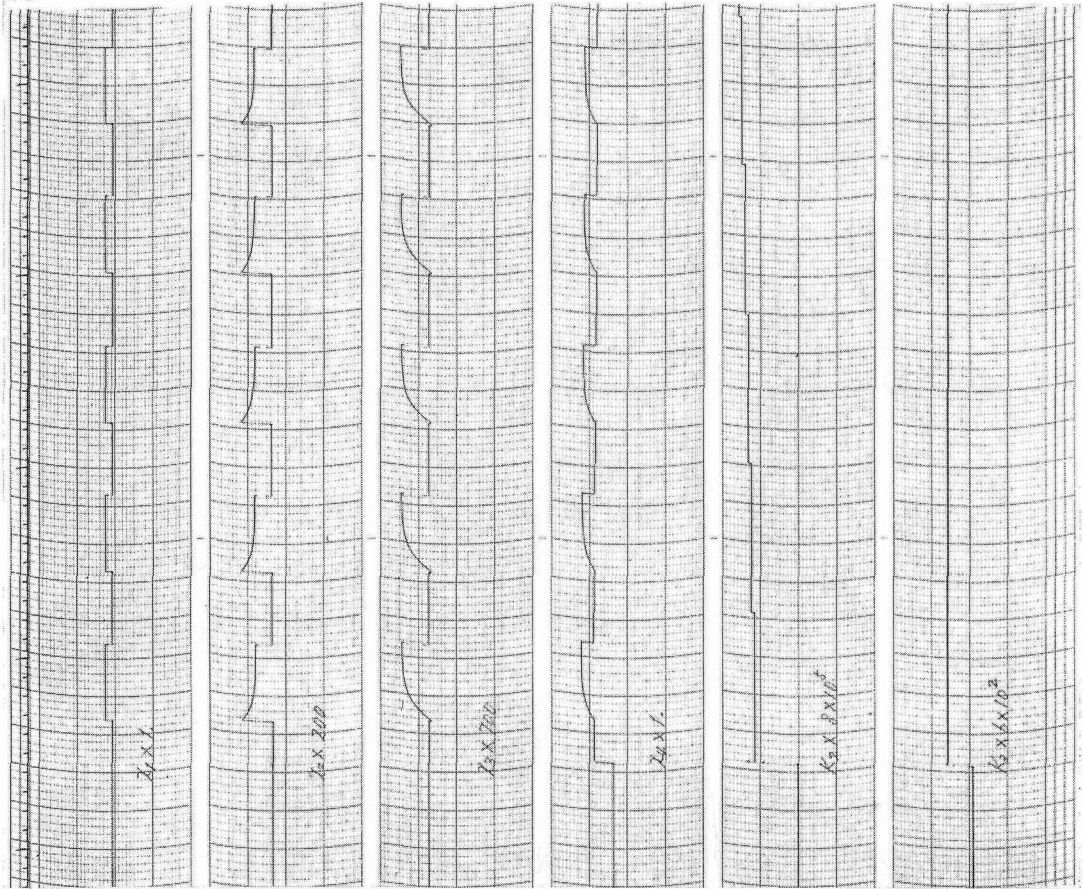


図3 ハイブリッド・シミュレーションのアナログ部出力

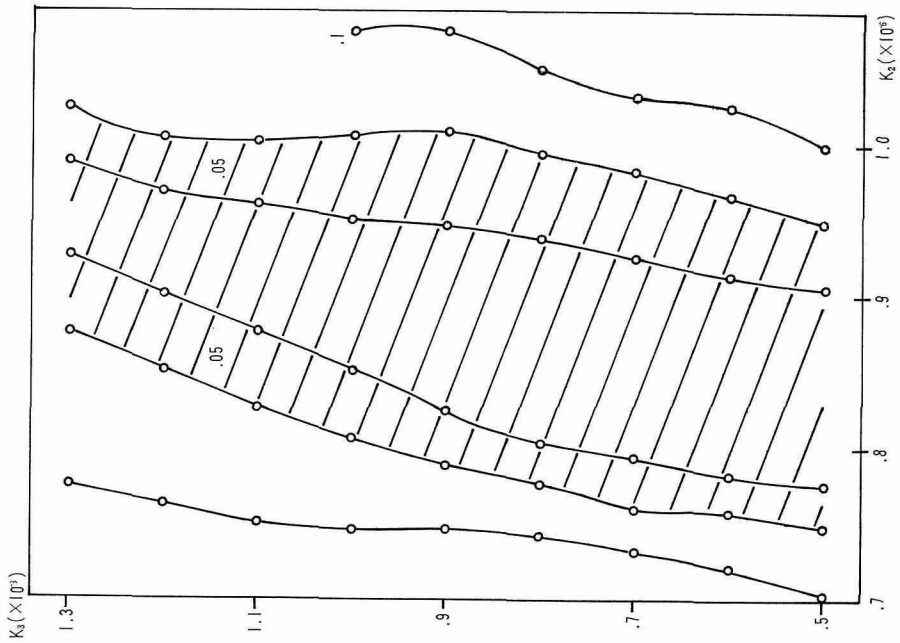


図4 ハイブリッドによる  $k_3$  の誤差の等高線図

## 5. デジタル・シミュレーション

デジタル・シミュレーションでは、非線形微分方程式の解にルンゲ・クッタ法を用いた。

ルンゲ・クッタ法における微分方程式の解法は、時間のきざみ巾 ( $\Delta H$ ) を大きくすると数値解が不安定になることが知られている。従って正確な数値解を得るためにはきざみ巾 ( $\Delta H$ ) をできるだけ小さくすることが望ましい。しかし、あまりきざみ巾 ( $\Delta H$ ) を小さくすると計算時間が増大する。このため適当なきざみ巾 ( $\Delta H$ ) の選択が必要となる。

われわれが行ったうちの特徴的な2つの例を次に示す。

### 1) $\Delta H=0.04$

このきざみ巾 ( $\Delta H$ ) による等高線図を図5に示す。図5からわかるように  $K_2=.75 \times 10^{-6} \sim 1 \times 10^{-6}$ ,  $K_3=.9 \times 10^{-3} \sim 1.26 \times 10^{-3}$  の範囲で誤差が急激に増加し、等高線に壁のようなものが表われている。しかしハイブリッド・シミュレーションで得られた等高線図には、このような壁が表われず、谷の方向が  $K_3$  の軸方向にほぼ平行な等高線になっている。

### 2) $\Delta H=0.02$

このきざみ巾で得られた等高線図を図6に示す。図6では、1)においてあらわれた異常現象はこのきざみ巾 ( $\Delta H=0.02$ ) では表われず、 $K_3$  の方向に長軸をもつ長楕円形の等高線図が示され、ハイブリッド・シミュレーションで得られた等高線図と一致した特性を示す等高線が得られた。

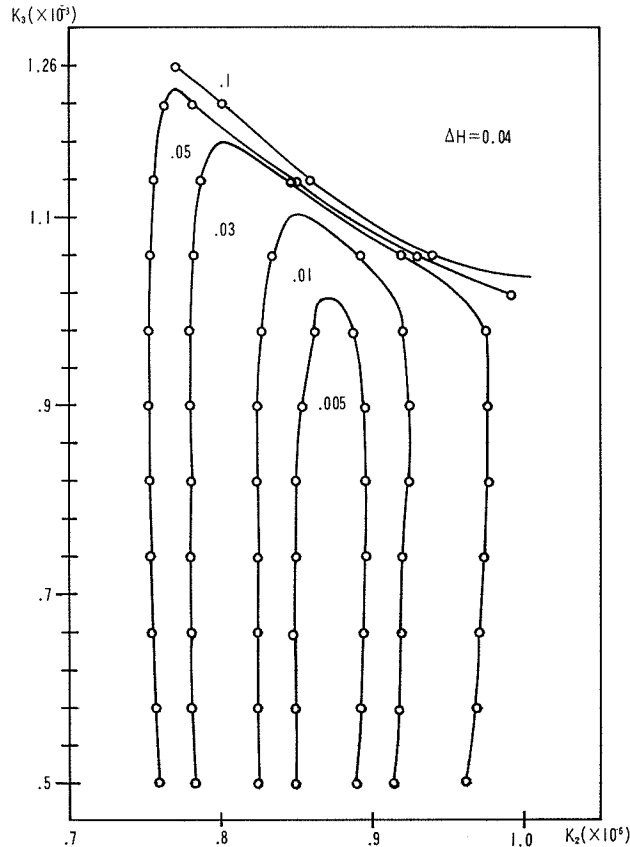


図5  $\Delta H=0.04$  のときの  $x_3$  の誤差に関する等高線図

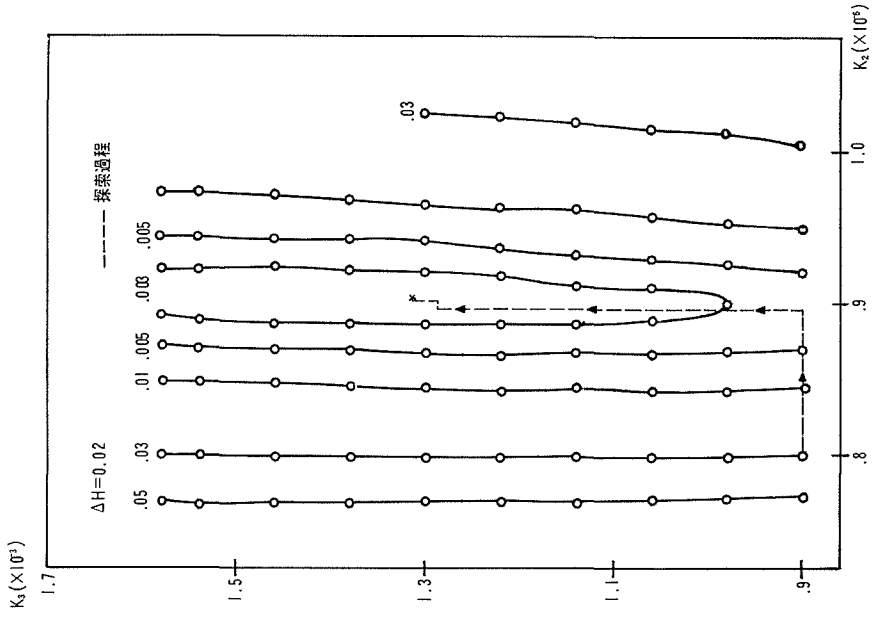


図6  $\Delta H=0.02$  のときの  $x_3$  に関する等高線図

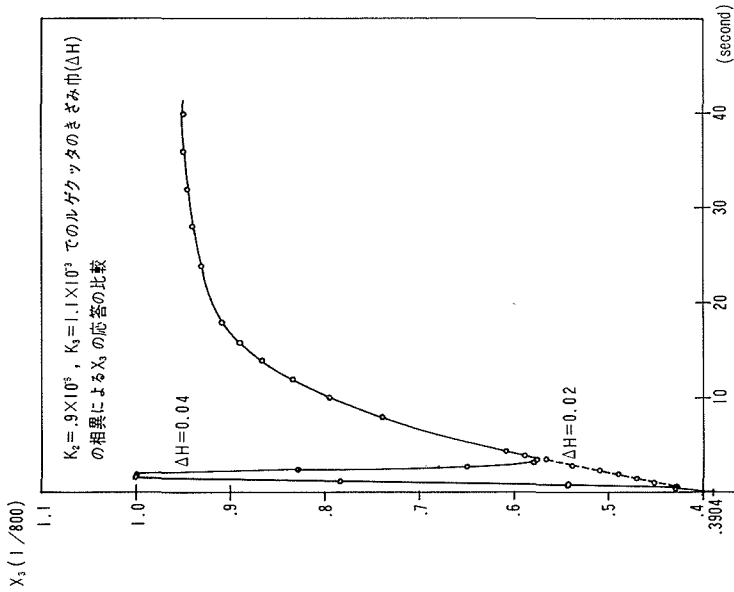


図7 ルンゲ・クッタの大きさみ巾 ( $\Delta H$ ) の相違による  $x_3$  の応答比較



きざみ巾 ( $\Delta H$ ) はこれ以下 ( $\Delta H=0.02$ ) にこまかくしてもほぼ同様の結果が得られた。

パラメータの探索の範囲の中で、1) のようなことがおこることにより、最適パラメータ探索をくるわせる可能性がある。

### 3) 壁の附近での応答曲線の比較

$\Delta H=0.04$  で現われた壁の附近  $K_2=.9 \times 10^{-6}$ ,  $K_3=1.1 \times 10^{-3}$  の応答曲線と、 $\Delta H=0.02$  の同じ地点での応答を比較したものが図 7 に示されている。 $\Delta H=0.04$  のときは応答曲線の初期の部分で立ち上がりの鋭い行き過ぎ応答が現われている。これは、きざみ巾が大きすぎるための数値計算の異常現象であり、この部分が 2 乗誤差に強い影響を与えているのが理解できる。計算には北大大型計算機センターの FACOM 230-60 を用いたが、1つの  $K_2, K_3$  の組に対し、40 秒間分の応答を計算するのに、 $\Delta H=0.04$  では約 2.5 秒、 $\Delta H=0.02$  では約 5 秒であった。

## 6. 極値探索法

図 6 からわかるように 2 乗誤差に関する等高線は非常に細長い楕円に近い形をしている。本例では、その長軸方向が  $K_3$  軸にほぼ平行になっているが、一般的には、必ずしも  $K_3$  軸方向に平行にあるとはいえず、むしろ軸に斜めになっていると考える方が妥当であろう。従って、この種の問題では、探索法としては最急降下法よりも PARTAN<sup>®</sup> (平行接続法) 等の尾根にそって探索する手法が適当である。ただし本例のように等高線の長軸、短軸方向が、それぞれ  $K_3, K_2$  軸に平行な場合は、より単純な、各軸方向に極値を交互に探索するいわゆる Axial-iteration 法で充分である。従ってここでは Axial-iteration 法を用いて探索を行った。図 6 中にその探索過程を示す。

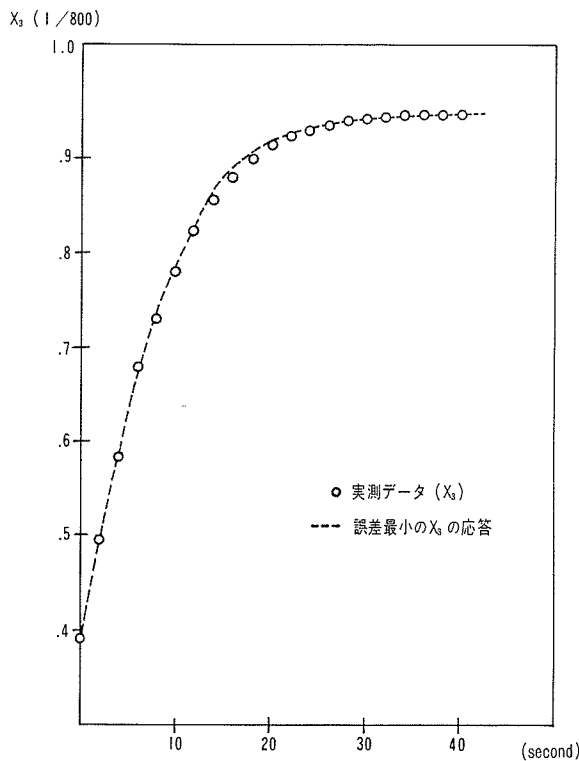


図 8 実測データと誤差最小の  $x_3$  の応答 ( $\mu=0.135$ )

探索結果は

$$K_1 = .9657 \times 10^{-5}$$

$$K_2 = .9036 \times 10^{-6}$$

$$K_3 = 1.364 \times 10^{-3}$$

である。図8にこのときの応答曲線と実測データを示す。

## 7. 考 察

ハイブリッド・シミュレーションおよびデジタル・シミュレーションを比較することにより、デジタル・シミュレーションの  $\Delta H = 0.04$  で表われた異常現象がルンゲ・クッタ法のきざみ巾によるものであることが確認され、さらに適当なきざみ巾 ( $\Delta H$ ) を選択することによって、システムの正確な応答が得られた。本例では  $\Delta H = 0.04$  の場合数値解は  $K_2, K_3$  がともに小さいところでは、ほぼ正確な応答を示しながら、図5の等高線に示される壁の部分で急激に数値解の異常現象が表われている。パラメータ探索範囲の中で、このようなことがおこることにより、探索をくわらせる可能性がある。デジタル・シミュレーションを行うとき、特にくりかえし計算の場合、計算時間が非常に長くかかるため、ルンゲ・クッタ法のきざみ巾を、異常現象のおこらない範囲で、できるだけ大きくとることが必要となるが、きざみ巾 ( $\Delta H$ ) を試験的に変えてみるか、ハイブリッド計算機等の結果と比較し、適当なきざみ巾を選択することが必要である。

図6によると、2乗誤差の等高線は  $K_3$  の軸に平行な非常に細長い長楕円になっている。これは評価関数としての  $x_3$  に関する2乗誤差のパラメータ  $K_3$  に対する感度が非常に低いことを意味している。この感度を高くするためには他の変数  $x_1, x_2$  あるいは  $x_4$  に対する実測データの2乗誤差を評価関数として考慮する必要がある。しかしその場合には、それらの誤差間の重みづけの問題が生ずる。この重みづけの問題は原システムの性質についての詳しい議論（ここでは触媒反応工学の見地からの議論）および実測データの精度、信頼度等から決定されるべきものであり、本報告ではとり上げなかった。

## 8. 結 言

ある種の触媒反応系に現われる非線形システムをモデルとし、実測データをもとにしてシステムのパラメータ・アイデンティフィケーションを行った。モデルの応答は、ハイブリッド計算機およびデジタル計算機の双方でシミュレーションし、詳細な等高線を求め解析した。その結果、この種の非線形システムのパラメータ・アイデンティフィケーションのための能率のよい探索法について一応の結論が得られた。

最後に反応方程式および実測データを提供して下さった合成化学工学科小林教授、また日頃御指導いただいている精密工学科三浦教授、さらにモデルの詳細な点を御指導いただいた合成化学工学科小林助手に感謝致します。なお本研究を積極的に支援して下さった建築工学科酒井教授またデータ処理を手伝っていただいた汎用シミュレータ研究室丸山技官、黒部さんにお礼申し上げます。

## 参 考 文 献

- 1) Kobayashi, Masayoshi and Haruo Kobayashi: Decomposition Mechanism of Nitrous Oxide on Manganese Dioxide Revealed by Transient Response method.; J. Chem. Eng. Jappon, 6, No.5 (1973)

- 2) Bekey and Karplus; Hybrid Computation.
- 3) Dixon, L. C. W.; Non-linear Optimisation.
- 4) Wilde, Douglass J.; Optimum Seeking Methods.