北海道大学工学部研究報告
第72号(昭和49年)

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 72 (1974)

出力観測可能な節点集合が与えられている場合のシステムの故障診断

田原米起* 仙石正和**

(昭和49年3月30日受理)

System Diagnosis Under a Given Set of Observable Vertices

Yoneki TAHARA* Masakazu SENGOKU**

(Received March 30, 1974)

Abstract

Some systems (for example, computer structures, computer programs and control systems) can be represented by blocks and links where a block performs a certain function and a link transmits information between two blocks. Linear graphs corresponding to a system are obtained by using vertices for blocks and edges for links. The purpose of system diagnosis is to find the fault vertices in the graph. In some systems, the output signal of all vertices in the graph cannot be always monitored. For a set T of observable vertices, some subsets of T give the same D-partition as T. In this paper, an algorithm giving the optimum internal test terminals T_0. which is a subset of T giving the same D-partition as T in which the number of elements is minimal is presented.

1. 緒　　言

システムを構成するユニットを節点に，ユニット間の信号伝搬路を枝に対応させると一般のシステムは有向グラフとなる。このような有向グラフを基礎に置いてシステムの故障診断を行なおうとする研究は最近始められたばかりであるが[1),他]，従来の個々のシステムにおける故障診断に比べて(この研究は)種々のシステムに対して適用できるより汎用性のある議論を展開しようとするものである。研究の目的は，システムのユニットに故障を生じた場合どのユニットに異常があるかを見出すことにあるが，そのためにはいかなるユニットを観測したらよいかが問題となる。これはユニットとユニット間をどのように信号が伝搬するか，つまり有向グラフの構造によって決定されるものである。今までの研究では各ユニットの出力がすべて観測可能な場合が取扱われてきた。しかし，システムによっては，観測可能なユニットが限られている場合がある。本論文は，まずすべてユニットの出力が観測可能な場合に故障ユニットを求めるアルゴリズムを示し，さらに観測可能なユニットが限定された場合のシステムの故障診断について述べたものである。

* 日本電信電話公社

** 電子工学科 電波伝送工学講座
Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo, Japan

2. 準　　備

ここでは，システムのユニットに付加される条件および本論文で用いる用語について述べる。

2.1 ユニットに要求される条件

グラフ理論によってシステム故障診断を行なう場合，節点と枝を単純につぎのように対応させる。

節点：　システムを構成するユニット

枝：　ユニット間の信号伝搬線

このように対応させると一般のシステムは有向グラフとなる。

節点にシステムを構成するユニットを対応させた時，ユニットはつぎの条件を満足すると考える。

(i) 規定入力が入った時，規定出力を出していれば，そのユニットは正常状態にある。

(ii) 規定入力が入っても，規定出力を出さない時，そのユニットは故障状態にある。

(iii) ユニットが正常状態でも規定入力が入らなければ規定出力を出さない。

(iv) ユニットに故障が生じたらその故障は恒久的でそのユニットをとりかえない限り故障状態にある（間欠故障はない）

以上 (i)〜(iv) がユニットに課せられる条件であるが，システムに対しては，同時に高々一個のユニットしか故障しないとする。

また，システムを有向グラフでとらえた場合，システムの故障診断という観点からするとシステムを acyclic SEC グラフ (acyclic single entry single exit connected graph) としてとらえて十分である。何故ならば，複数の入力，出力端子を持つ場合は新たに節点を加えることによって SEC グラフに変換でき，また閉路を含むシステムでは，閉路の部分の故障をまず検出し（閉路中の枝を切離すなどして）正常状態にしてから（その閉路の節点を一つの節点と見なして acyclic グラフにできる)，全体のシステムの故障診断を行なえば良いからである。そのため本文では acyclic SEC グラフでシステムを表現した場合の故障診断について述べることにする。

2.2 用語および記号の定義

以下本文で用いる用語と記号の定義をしておく，扱うグラフの節点集合を V，枝集合を E とし，$G=G(V, E)$, $|V|=n$, $|E|=b$ とする。

(1) 到達可能と到達可能行列 $\boldsymbol{R}$

2 節点 v_r, v_s に対して，v_r から v_s へ道が存在するとき，v_r から v_s へ到達可能といい

$$v_r \geq v_s \tag{2-1}$$

とかき，道がないならば v_r から v_s へは到達不可能で，

$$v_r \ngeq v_s \tag{2-2}$$

とかく。

到達可能行列 R は (n, n) 行列で任意の要素 r_{ij} は，

$$r_{ij} = \begin{cases} 1: & v_i \geq v_j \\ 0: & v_i \ngeq v_j \end{cases} \tag{2-3}$$

で表わされる行列である。

(2) 接続行列 $\boldsymbol{A}$，節点行列 $\boldsymbol{C}$

A は (n, b) 行列でその要素 a_{ij} は，

$$a_{ij}=\begin{cases} 1: & 枝\ e_j\ と節点\ v_i\ に対して, \quad f(e_j)=v_i \\ -1: & \quad〃 \qquad , \quad s(e_j)=v_i \\ 0: & f(e_j)\neq v_i, \quad s(e_j)\neq v_i \end{cases}$$

ここで，$f(e_j)$, $s(e_j)$ はそれぞれ枝 e_j の始点，終点を示す。

C は (n, n) 行列でその要素 C_{ij} は,

$$C_{ij}=\begin{cases} 1: & v_i\ から\ v_j\ へ枝があるとき \\ 0: & v_i\ から\ v_j\ へ枝がないとき \end{cases} \tag{2-5}$$

(3) 入度数，出度数

節点 v の入度数とは v に入る枝の総数をいい，出度数とは出る枝の総数をいう，一般に入度数は $id(v)$, 出度数は $od(v)$ と書く。

(4) transmitter, receiver, Carrier

$od(v)=0$, $id(v)=0$ および $id(v)=od(v)=1$ なる節点をそれぞれ receiver, transmitter および Carrier という，普通それぞれ r, t, C と略記する。

(5) $v_r \geq v_s$ なる2節点間の範囲とその部分グラフ

$v_r \geq v_s$ なる節点対の範囲とは，v_r から v_s へのすべての道にある節点集合で，$V(v_r, v_s)$ と示される。この範囲の部分グラフとは，$V(v_r, v_s)$ の節点集合と枝の始点，終点が $V(v_r, v_s)$ に含まれる枝集合からなるグラフで，$G'(V(v_r, v_s))$ で表わす。また，acyclic SEC グラフ（入力節点 i, 出力節点 j）において，$V(i, v)$ を略記して $Q(v)$, $V(v, j)$ を $R(v)$ とかく場合もある。

(6) 上方有向カットセット，下方有向カットセット

節点 v の上方有向カットセット S_v は次式を満足する枝集合である。

$$S_v=\{e|e\in E, \quad f(e)\in V(i, v), \quad s(e)\in \overline{V(i, v)}\} \tag{2-6}$$

節点 v の下方有向カットセット S'_v は次式で定義する

$$S'_v=\{e|e\in E, \quad f(e)\in \overline{V(v, j)}, \quad S(e)\in V(v, j)\} \tag{2-7}$$

節点集合 $V'=\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$, $V'\subset V$ に対し，V' の上方有向カットセット $S_{V'}$ を次のように定義する

$$S_{V'}=S_{v_1}\cup S_{v_2}\cup\cdots\cup S_{v_k} \tag{2-8}$$

上方有向カットセット (upper directed cut set) を u. d. c. と略記する。

(7) 節点集合 V' により被覆される枝集合

$V'=\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ とするとき，枝集合 E' が $E'\subset S_{V'}$ ならば E' は V' により被覆されるという，または E' は V' の u. d. c. に含まれるという。

(8) T による D 分割

acyclic SEC グラフにおいて故障診断に必要な端子集合を $T=\{v'_1, v'_2, \cdots, v'_k\}$, $v'_i\in V$ $(i=1, 2, \cdots, k)$ とすると，T による D 分割 D_T とは,

$D_T=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$

$$\alpha_1\cup\alpha_2\cup\cdots\cup\alpha_p=V, \quad \alpha_i\cap\alpha_j=\phi\,(i\neq j, \quad i, j=1, 2, \cdots, p)$$

と示され，$\alpha_j\,(j=1, 2, p)$ は V の部分集合で,

$$\alpha_j=\widetilde{V(i, v'_1)}\cap\widetilde{V(i, v'_2)}\cap\cdots\cap\widetilde{V(i, v'_k)} \tag{2-7}$$

と表わされる。ただし $\widetilde{V(i, v)}$ は $V(i, v)$ または $\overline{V(i, v)}$ を示す。

(9) **k-識別可能**

T のもとで D 分割したとき，$D_T=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$ で

$$\mathrm{Max}\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \cdots, |\alpha_p|\}=k \tag{2-10}$$

ならば，このシステムは T のもとで k-識別可能という。

(10) **k-ターミナルテスト**

$G=G(V, E)$ から適当な節点部分集合 T を取り，D 分割が，

$D_T=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\}$

$$\mathrm{Max}\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \cdots, |\alpha_p|\}=k$$

となったとする。このとき T がつぎの条件を満足する場合，T を k-ターミナルテストという。

(i) T から任意の節点を除くと上の D 分割は D_T にならない。

(ii) T から任意の節点を除くと k-識別可能にならない。

この k-ターミナルテストのうち最小のものを最小 k-ターミナルテストという。以下本文では 1-ターミナルテストを問題にするため 1-ターミナルテストを単にターミナルテストとよぶ。ただし，1-識別可能のターミナルテストの場合 (i) のみで十分で T に対しが (i) 成立すると (ii) は必然的に成立する。

3. 1-識別可能なるための内部端子の決定法

3.1 故障表と到達可能行列

故障診断に際しては，故障したユニットを発見するために故障表なるものを利用している。故障表は，行にユニットを対応させ，列のテストがそのユニットの故障を検出することが出来れば“1”，そうでなければ“0”とかかれるものである。そして各々のユニットの故障を確定的に抽出するには故障表から相異表なるものを作って，pirme implicant 法等で最小テスト群を求めるのが普通であるが，相異表が非常に大きくなって実際には大変な手間となる。このような状況を解決するためには，システムが acyclic SEC グラフで表わされる事を使ってグラフ構造上の性質からテスト群を求める方法を考える必要がある。acyclic SEC グラフのグラフ構造から故障表を作ってみると故障表は到達可能行列 R に対応している事がわかる。つまり故障表の要素 t_{ij} は，

$$t_{ij}=\begin{cases}0: & v_i \ngeq v_j \\ 1: & v_i \geq v_j\end{cases}$$

と示される。故障表と到達可能行列の対応から，グラフ理論的に故障診断をする場合到達可能行列が基本となる。従って，二つの acyclic SEC グラフがあって適当な節点の対応づけによって到達可能行列が等しいときこの二つのグラフは故障診断に関して同等ということができる。そこで，有向グラフ $G=G(V, E)$ の到達可能行列 $R(G)$ と等しい到達可能行列を持ち，E の最小限の枝からなるスパニングサブグラフ (spanning subgraph) を G_H(Hasse グラフ) と表わすことにする。$G_H=G_H(V, E')$ において枝集合 E' は E の部分集合であるが，$e\in(E-E')$ を満足するような G の枝 e は推移枝と呼ばれる。

このように，故障診断という点にのみ注目した場合 G_H のみを考えればよく，acyclic SEC グラフの G_H の一意性も明らかであるから非常に簡単になる。

3.2 1-識別可能の必要，十分条件

V' を V の部分集合とした場合，V' の出力を観測することでシステムが 1-識別可能となる条件はつぎのようになる。

〔**補題 3-1**〕[4)]

$V'\subset V$ に対する V' のもとで，システムが 1-識別可能となるための必要十分条件は，V に属する任意の節点対 v_r, v_s に対して，

$$\{R(v_r)\oplus R(v_s)\}\cap V'=\phi \tag{3-1}$$

となることである。

(**証明**)　任意の 2 点 v_r, v_s を識別する節点は，$v_r\geq v$, $v_s\gneq v$ かまたは，$v_r\gneq v$, $v_s\geq v$ を満足する節点 u であるから，この様な節点が必ず V' になければならない (証明終)。

補題 3-1 はターミナルテストのアルゴリズムを求める場合には漠然とし過ぎている。ここでは，V の節点対で一方へ到達可能な場合つぎの補題が成立する。

〔**補題 3-2**〕 acyclic SEC グラフ $G=G(V, E)$ において，一方へ到達可能な任意の節点対が V' のもとで $(V'\subset V)$ 識別可能となるのは，$S_{V'}=E$ の時である。逆も成立する。

(**証明略**)

〔補題 3-2〕は 1-識別可能になるための必要条件であって，十分条件ではないがアルゴリズム作成の際には有効な指示を与えるものである。補題 3-1，補題 3-2 をまとめてつぎの定理を得る。

〔**定理 3-1**〕

$V'\subset V$ に対する V' のもとで，システムが 1-識別可能となるための必要十分条件は，

(a)　$S_{V'}=E$　(3-2)

(b)　$v_r\gneq v_s$, $v_r\lneq v_s$ なる節点対 v_r, v_s にして，$\{R\,v_r)\oplus R(v_s)\}\cap V'\neq\phi$　(3-3)

(定理終)

(3-2) の条件は一方へ到達可能な節点対に対して識別可能となるための必要十分条件であるが，相互に到達できない節点対に対しては (3-3) が必要である。ここで注意すべきことは，(3-3) がすべての節点対に対して成立すれば (3-2) は必然的に成立するということである。

3.3　ターミナルテスト決定のためのアルゴリズム

〔定理 3-1〕はターミナルテストを定めるためのアルゴリズムに対する指針を与えている。3.1 から故障表は到達可能行列に対応することが明らかになり，しかも扱うグラフは推移枝を除いたグラフで良いことがわかった。つぎにアルゴリズムを求める際に必要な定理と定義を述べておく。

〔**定理 3-2**〕 $G=G(V, E)$ か推移枝を除いたグラフ $G_H=G_H(V, E')$ において出度数 $(od(v)=1)$ なる節点は必ずシステムが 1-識別可能になるためのターミナルテストに含まれる。

(**証明**)　推移枝を除いたグラフ G_H の上方有向カットセットを考える，$od(v)=1$ なる節点を v_η とし，v_η から出る枝を $f^{-1}(v_\eta)=e'$ とする。$f(e')=v_\eta$, $s(e')=v_{\eta'}$ とすると，v_η, $v_{\eta'}$ を識別する u. d. c. を考えると $v_{\eta'}$ しかない。この時，

$S_{v_\eta}(e)=\{e|f(e)\in V(i, v_\eta),\ s(e)\in\overline{V(i, v_\eta)}\}$ となり，$v_\eta\in V(i, v_\eta)$, $v_{\eta'}\in\overline{V(i, v_\eta)}$ となって明らかに v_η と $v_{\eta'}$ は識別される。　(証明終)

つぎに，ターミナルテストを求めるアルゴリズムを述べる上で必要な 2～3 の定義をしておく。

〔**定義 3-1**〕

上方有向カットセット行列 (u. d. c. matrix) S とは (n, b) 行列で (i, j) 要素 s_{ij} は次の値をとる。(i 行は節点 v_i の u. d. c.，j 列は枝 e_j に関するものとする。)

$$s_{ij}=\begin{cases}0: & e_j \notin S_{v_i}\\ 1: & e_j \in S_{r_i}\end{cases}$$

〔定義 3-2〕

仮想枝 e' とは，与えられたグラフ G には存在しない枝で，枝の向きが定義されない仮想さの枝である。従って到達可能行列には関与しない。そして，仮想枝 e'（その端点を v_r, v_s とする）がもとのグラフ G に付け加えられる場合は，G において $v_r \ngeqq v_s$, $v_r \nleqq v_s$ でしかも $od(v_r) \neq 1$, $od(v_s) \neq 1$ のときである。

定義 3-2 で示した仮想枝の概念は定理 3-1 の (3-3) 式を実際に利用する場合強力な手段となる。直観的には，$v_r \ngeqq v_s$, $v_r \nleqq v_s$ でしかも $od(v_r) \neq 1$, $od(v_s) \neq 1$ なる節点対 v_r, v_s を識別する u. d. c. は仮想枝 e' を含む u. d. c. であることがわかる。

つぎにターミナルテストを求める一般的なアルゴリズムを示す。

〔1-識別可能なためのターミナルテストを求めるアルゴリズム〕

$G=G(V, E)$ から推移枝を除いたグラフ $G_H=G_H(V, E')$ について考える，$|V|=n$, $|E'|=b$ とする。

(手順 1)

G から推移枝を除いたグラフ G_H をつくる。

(手順 2)

G_H の接続行列 A を求める。

(手順 3)

A より節点行列 C を求める。

($C=AA'$, ただし和は論理和，積は $(+1)\otimes(-1)=1$, 他の場合は零)

(手順 4)

到達可能行列 R を求める。

($R=(I+C)^{n-1}\#$。I は (n, n) 単位行列，$\#$ は mod 2 の演算を示す。)

(手順 5)

C より $od(v)=1$ の節点集合 V^* を求める。

(C の行で 1 が一つしかない節点)

(手順 6)

u. d. c. 行列 S_0 を求める。

(列ベクトル：枝 e_j に対応する行を A よりみつける，今それを v_k, v_l とすると S_0 の e_j に対応する列ベクトルは，$S_0(p, j)=R_{pk}\oplus R_{pl}$, $(p=1, 2, \cdots, n)$

行ベクトル：節点 v_j に対応する行ベクトルは，R の j 列をみて $V(i, v_j)$ をみつけ A 行列で $V(i, v_j)$ の一点から $V-V(i, v_j)$ の一点へ向かう枝の番号の列を j 行で $+1$, それ以外は 0 とする。)

(手順 7)

仮想枝の決定（仮想枝がなければ V^* がターミナルテストで以下の手順に進む必要はない)。

($(V-V^*-i-j)$ の集合で任意の 2 つの組合わせ例えば (v_k, v_l) において R 行列で $(k, l)=(l, k)=\phi$ で，$\{R(v_k)\oplus R(v_l)\}\cap V^*=\phi$ ならば仮想枝を入れる。)

(手順 8)

S 行列を求める。ただし S 行列とは S_0 行列の列の後に仮想枝に対する列を加えたものとする。

((v_k, v_l) 間に仮想枝がある場合，仮想枝の列ベクトルは，$S(p, j)=R_{pk}\oplus R_{pl}$, $(p=1, 2, \cdots, n)$。)

(手順 9)

S から V^* により被覆(cover)される枝の列と V^* の行を除いて部分行列 S' をつくる。

(手順 10)

S' において i 列が j 列を包含する時 i 列を除いて部分行列 S'' をつくる。(注意，包含関係とは，S' 行列において i 列，j 列を比らべた時，$S'(p, i)\geq S'(p, j)$, $(p=1, 2, \cdots, n)$ が成立する時，$S'(p, i)$ は $S'(p, j)$ を包含するという。)

(手順 11)

prime implicant 法によりターミナルテストを求める。

(S'' 行列において行の節点を主項に，列の枝を最小項に対応させると，最小被覆の問題となる。)

以上がターミナルテストを求めるアルゴリズムであるが，手順の下の括弧内はその手順の実際の求め方を示している。

4.　出力観測可能な節点集合が与えられた場合の故障診断

3. ではすべての節点が出力観測可能とした場合の内部端子決定法について述べた。しかし，限られたシステムではすべての節点が出力観測可能というわけでない場合もある。ここでは，出力観測可能な節点集合 T が与えられた場合の識別性について考察し，T による D 分割 D_T を得る T の部分である最適内部端子 T_0 を得るアルゴリズムについて述べる。$T=V$ とすれば，そのまま 1-識別可能となるから 3. のより一般的理論と言える。

4.1　D グラフ

acyclic SEC グラフ $G=(V, E)$ において，V を分割し，$V=\bigcup_{i=1}^{n} V_i$, $V_i\cap V_j=\phi\ (i\neq j)$ とし V_i に属する点を一点にまとめ，V_i の点から V_j の点に少なくとも一つの枝があるときのみ V_i から V_j への枝を付加したグラフを G の V 上記の分割に対する凝縮グラフという。では V のいかなる分割に対する凝縮グラフが acyclic であるのであろうか。十分条件であるがつぎの補題が成立する。

〔補題 1〕 acyclic SEC グラフにおいて複数個の上方有向カットセットの枝を開放除去してできるグラフの各連結成分の点集合を $V_1, V_2, \cdots, V_n$ としたとき，V の分割 $V=\bigcup_{i=1}^{n} V_n$ に対する凝縮グラフは acyclic である。

(証明略)

出力観測可能な節点集合 T が与えられた場合 D の分割を D_T とする。

$$D_T=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\},\ (\alpha_k\subset V,\ \alpha_k\neq\phi,\ V=\bigcup_{i=1}^{p}\alpha_p,\ 1<k<p) \tag{4-1}$$

この V の D 分割に対する凝縮グラフを特に D-グラフと呼ぶことにする。G の D-グラフ $G_{DT}=(V_{DT}, E_{DT})$ の節点数は，D 分割の要素 α_k の総数と一致する。

この D-グラフについての重要な性質つまり G_{DT} は acyclic SEC グラフになるという事を補題 1 を用いて証明する。これは 2 の最適内部端子 T_0 を求めるアルゴリズムの骨子となるものである。

〔定理 4-1〕

$G=G(V, E)$ において出力観測可能な節点集合 T が与えられた場合，T に対する D-グラフ G_{DT} は acyclic SEC グラフである。

(証明) $G=G(V, E)$ の入力節点を i，出力節点を j とする。

$T=\{v_1', v_2', \cdots, v_t'\}$ とし，T に対する D 分割を，

$$D_T = \{\alpha_i, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p, \alpha_j\}, \qquad (\alpha_i \in i, \ \alpha_j \ni j)$$

とする。この D_T によりできる D-グラフ $G_{DT}=G_{DT}(V_{DT}, E_{DT})$ の節点集合 V_{DT} を，

$V_{DT}=\{v^i, v^1, \cdots, v^p, v^j\}$ とし D_T の要素と順番に対応させるものとする。補題1から G_{DT} は明らかに acyclic グラフである。そこで，G_{DT} が SEC グラフになることを示せばよい。

D_T の i を含む要素 $\alpha_i=\{i, v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{im}\}$ とすると，$i \geq v_{ik}$，$V(i, v_{ik}) \subseteq \alpha_i$，$(k=1, 2, \cdots, m)$ が成立する。

$$\alpha_i = V(i, v_1') \cap V(i, v_2') \cap \cdots \cap V(i, v_t')$$

と示されるから $(V-\alpha_i)$ の節点から α_i の任意の点へ向から枝は存在しない。従って α_i の節点集合を一点にまとめたとき，その節点から出る枝のみで入る枝はないから G_{GT} では v^i は transmitter になる。同様に，j を含む D_T の要素 α_j を，$\alpha_j=\{j, v_{j1}, v_{j2}, \cdots, v_{jm'}\}$ とすると $v_{jk} \geq j$，$V(v_{jk}, j) \subseteq \alpha_j$，$(k=1, 2, \cdots, m')$ が成立する。

$$\alpha_j = \overline{V(i, v_1')} \cap \overline{V(i, v_2')} \cap \cdots \cap \overline{V(i, v_t')}$$

と示されるから，α_j の任意の節点から $(V-\alpha_j)$ の節点へ向から枝はない。したがって G_{DT} の節点 v^j は receiver になる。つぎに，G_{DT} の v^i，v^j 以外の節点を考える。$D_T-\{\alpha_i, \alpha_j\}$ 一つの要素を α_p とすると α_p に属する節点は i から到達でき，j へ到達できる。従って，$v^i \geq v^p$，$v^p \geq v^j$ が成立する。つまり，v^p は transmitter, receiver にならない。以上のことから G_{DT} の唯一の transmitter, receiver はそれぞれ v^i，v^j となる。 (証明終)

この定理を用いて最適内部端子を求めるアルゴリズムが作られる。

4.2 最適内部端子を決定するアルゴリズム

最適内部端子 T_0 をつぎのように定義する。

〔定理 4-1〕

最適内部端子 T_0 とは，T の部分集合で，T による D 分割 D_T を得るための最小の内部端子をいう。

定理 4-1 により G_{DT} は acyclic SEC グラフとなる。このことから 3. の 1-識別可能となるターミナルテストを求める手法を用いることができる。T_0 を求めるために必要な2つの定理を述べる。T, D_T, V_{DT} 等は定理 4-1 の証明で用いた記法に従う。

〔定理 4-2〕

$D_T=\}\alpha_i, \alpha_1, \cdots, \alpha_p, \alpha_j\}$ の各要素は T の要素を高々1個しか含まない。

(証明)

D_T の任意の要素を α_k とし，α_k が T の要素を2個以上含んでいるとする。それを $\{v_1', v_2', \cdots, v_l'\}$ とする。D 分割の定義により

$$\alpha_k = \widetilde{V(i, v_1')} \cap \cdots \cap \widetilde{V(i, v_l')} \cap \widetilde{V(i, v_{l+1}')} \cap \cdots \cap \widetilde{V(i, v_t')}$$

となる。

(i) $\{v_1', v_2', \cdots, v_l'\}$ において少なくとも一つの節点対が一方へ到達可能な場合

到達可能な節点対を $(v'_r,\ v'_s)$ とし一般性を失わずに $v'_r \geq v'_s$ とする。

$$\widetilde{V(i,\ v'_r)} \cap \widetilde{V(i,\ v'_s)} = \overline{V(i,\ v'_r)} \cap V(i,\ v'_s)$$

を考えると，$\overline{V(i,\ v'_r)} \not\ni v'_r$, $V(i,\ v'_s) \ni v'_r$ となり v'_r と v'_s は分離される。(図 4-1) 同様にして，$V(i,\ v'_r) \cap V(i,\ v'_s)$, $V(i,\ v'_r) \cap \overline{V(i,\ v_s)}$, $\overline{V(i,\ v'_r)} \cap \overline{V(i,\ v'_r)}$ の場合も v'_r, v'_s は分離されるから，$(v'_r,\ v'_s) \not\subseteq \alpha_k$ となる。

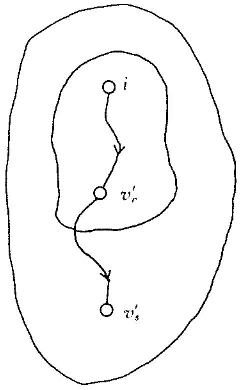

図 4-1　定理 4-2 の説明のためのグラフ

(ii)　$\{v'_1,\ v'_2,\ \cdots,\ v'_l\}$ のすべての節点対が到達可能でない場合。

任意の節点対 v'_r, v'_s をとると仮定により，$v'_r \not\geq v'_s$, $v'_r \not\leq v'_s$ である。$\widetilde{V(i,\ v'_r)} \cap \widetilde{V(i,\ v'_s)}$ の $V(i,\ v'_r) \cap V(i,\ v'_s)$, $\overline{V(i,\ v'_r)} \cap V(i,\ v'_s)$, $V(i,\ v'_r) \cup \overline{V(i,\ v'_s)}$, $\overline{V(i,\ v'_r)} \cap \overline{V(i,\ v'_s)}$ を考えると，そのいずれも v'_r, v'_s 両方を含まない。

(i), (ii) より，$\{v'_1,\ v'_2,\ \cdots,\ v'_l\} \subseteq \alpha_k$ となることはないから，α_k には高々 1 個しか T の要素をもち得ない。　(証明終)

この定理により D_T の要素には，T の節点が一つ含まれる場合と，含まれない場合があることが明らかになった。

G_{DT} から推移枝を除いたグラフ G^H_{DT} において，$od(v^k)=1$ なる節点は必ず G_{DT} が 1-識別可能になるための必要な端子である。　($\therefore$ 定理 3-2)

このような v^k に対応する α^k は T の要素を含んでいるのであろうか，これに関してつぎの定理が成立する。

〔定理 4-3〕

G_{DT} から推移枝を除いたグラフ G^H_{DT} において，$od(v^k)=1$ なる節点 v^k に対応する D_T の要素 α_k には必ず T の要素 1 個を含む。

(証明)

α_k が T の要素を含むことを示せばよい。(含む場合は前定理より 1 個であるから) 図 4-2 において v^k から隣接する節点を $v^{k'}$ とし，対応する D 分割の要素を α_k, $\alpha_{k'}$ としたときのもとのグラフを図 4-3 に示す。$od(v^k)=1$ であるから，G_H において α_k から $(V-\alpha^k)$ の節点へ向かう枝はすべて $\alpha_{k'}$ に入らなければならない。(図 4-3)。したがって u.d.c. を考えると，α_k に属するすべての節点から到達可能な節点が α_k に必ずあって，それが T の要素になっていなければこのような D 分割は出来ない。よって G^H_{DT} の $od(v^k)=1$ なる節点 v^k に対応する α^k は必ず T に属す

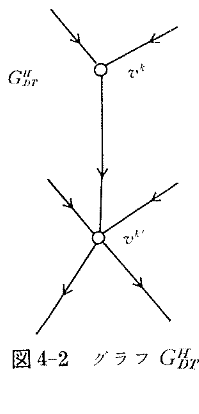

図 4-2　グラフ G^H_{DT}

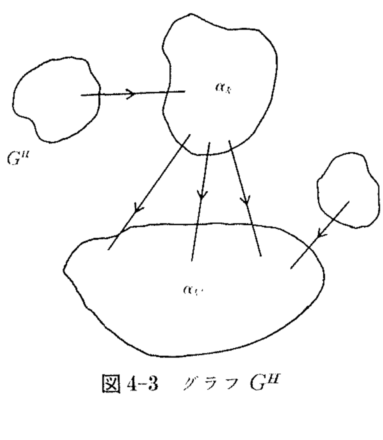

図 4-3　グラフ G^H

る一つの節点を含む。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終）

以上の性質をもとに，最適内部端子 T_0 を求めるアルゴリズムが求められる。そして G_{DT}^H の節点 V_{DT} を 1-識別せよという問題に帰着する。

（手順 1）

$G=G(V,\ E)$ の T に対する D 分割 D_T を求める。

（手順 2）

$G_{DT}=GV_{DT}(V_{DT},\ E_{DT})$ を作り，G_{DT} から推移枝を除いた G_{DT}^H を作る。

（手順 3）

G_{DT}^H が SPASEC グラフのとき $od(v^k)=1$ の節点が V_{DT} を 1-識別可能にする節点集合でありここで終わる。SPASEC グラフでない場合 $od(v^k)=1$ なる V_{DT} の部分集合を V_{DT}^* として次へ，

（手順 4）

1-識別可能の手法をそのまま用いて，G_{DT}^H のターミナルテストを求める。(3. の手順 (6)～(11) を用いる。)

（手順 5）

G_{DT}^H のターミナルテストが求まったら，対応する D_T の要素から G の出力観測可能な節点をぬき出し（出力観測不可能な内部端子から成っているターミナルテストは除く）可能なターミナルテストのうち最小のものを選び出し対応する T の要素からなる最適内部端子 T_0 を決定する。

（手順終）

上のアルゴリズムにおいて注意する部分がある，それは手順 5 において 1-識別の最小ターミナルテストをそのまま最適内部端子 T_0 とし得ない点にある。このような場合を説明するために図 4-4 のグラフを考える。

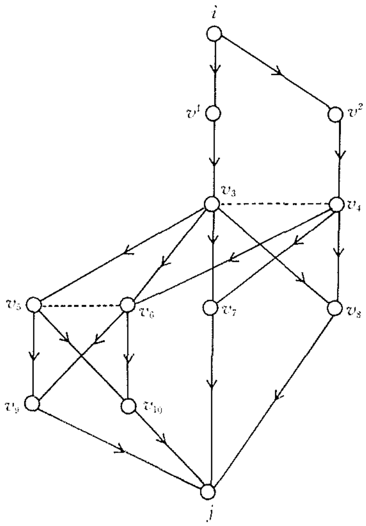

図 4-4　1-識別可能にする最小ターミナルテストが最適内部端子にならない例

出力観測可能な集合として，

$T=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_6,\ v_7,\ v_8,\ v_9,\ v_{10}\}$ とする。このとき，G^H は 1-識別となっているので G_{DT}^H は仮想枝（点線）も入れるとまったく図 4-4 と同じになる。このときの最小ターミナルテストは

$$T_m=\{v_1,\ v_2,\ v_5,\ v_7,\ v_8,\ v_9,\ v_{10}\}$$

であるが，$v_5 \notin T$ であるから最小ターミナルテストが必ずしも出力観測可能な節点を含んでいるとは限らない。この場合，他のターミナルテストは

$$\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_6,\ v_7,\ v_8,\ v_9,\ v_{10}\}$$

$$\{v_1,\ v_2,\ v_4,\ v_6,\ v_7,\ v_8,\ v_9,\ v_{10}\}$$

これはすべて T に含まれるから最適内部端子集合としては，この 2 つが T_0 となる。

4.3 例　　題

例題 1 では G_{DT}^H が SPASEC 構造になるものを，例題 2 ではそうでないものをあげる。

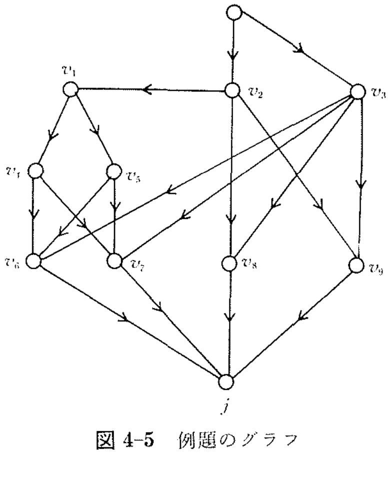

図 4-5　例題のグラフ

〔例題 1〕

図 4-5 のグラフにおいて，出力観測可能な集合として，

$$T=\{v_1,\ v_4,\ v_5,\ v_8,\ v_9\}$$

とする。T による D 分割は，

$$D_T=\{\alpha_i,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ \alpha_6,\ \alpha_j\}$$

$\alpha_j=\{v,\ v_2\}$，$\alpha_1=\{v_1\}$，$\alpha_2=\{v_3\}$，$\alpha_3=\{v_4\}$，$\alpha_4=\{v_5\}$，$\alpha_5=\{v_8\}$，$\alpha_6=\{v_9\}$，$\alpha_j=\{v_6,\ v_7,\ j\}$

D-グラフ G_{DT} を作る。(図 4-6)

$G_{DT}=G_{DT}\{V_{DT},\ E_{DT}\}$

$$V_{DT}=\{v^i,\ v^1,\ v^3,\ v^3,\ v^4,\ v^5,\ v^6,\ v^j\}$$

とし各々は D_T の α_i, α_1, $\cdots$, α_j に対応する。G_{DT} から推移枝を除いたグラフ (図 4-7) は SPASEC グラフになっているから $od(v^k)=1$ なる集合として

$$V^*_{DT}=\{v^3,\ v^4,\ v^5,\ v^6\}$$

となる。手順 5 を実行する必要はなく，V^*_{DT} より対応する T 集合を求めると，

$$T_0=\{v_4,\ v_5,\ v_8,\ v_9\}$$

となる。

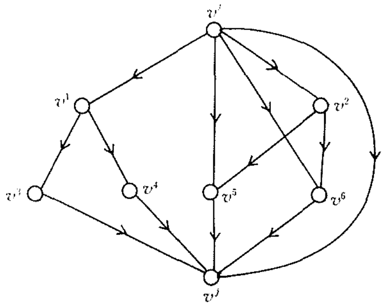

図 4-6　D グラフ G_{DT}

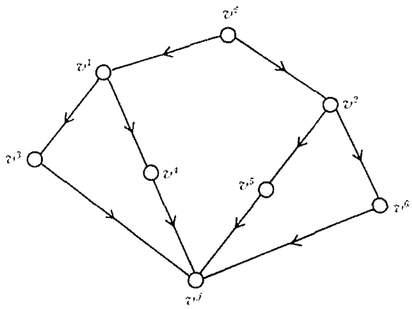

図 4-7　G_{DT} から推移枝を除いたグラフ G^H_{DT}

〔例題 2〕

図 4-8 において，出力観測可能な節点集合を

$$T=\{v_1,\ v_4,\ v_5,\ v_7,\ v_8\}$$

とする。

D 分割 D_T は，

$D_T=\{\alpha_i,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_j\}$

$\alpha_i=\{i,\ v_1\}$，$\alpha_1=\{v_2,\ v_3,\ v_5\}$，

$\alpha_2=\{v_4\}$，$\alpha_3=\{v_7\}$，$\{\alpha_4=\{v_8\}$，

$\alpha_j=\{v_6,\ v_9,\ v_j\}$

D-グラフ $G_{DT}=G_{DT}(V_{DT},\ E_{DT})$

$V_{DT}=\{v^i, v^1,\ v^2,\ v^3,\ v^4,\ v^j\}$ とする。(図 4-9)，G_{DT} から推移枝を除いたグラフ G^H_{DT} は図 4-10 に示されている。

G^H_{DT} において，$od(v^k)=1$ なる集合 $V^*_{DT}=\{v^3,\ v^4\}$ となる。

1-識別可能の理論を用いる。$V_{DT}-V^*_{DT}-v^i-v^j=\{v^1,\ v^2\}$。この節点対には仮想枝が必要である。(図 4-10 の点線)

G^H_{DT} のターミナルテストは

$$\{v^1,\ v^2,\ v^3,\ v^4\}$$

$$\{v^i,\ v^1,\ v^3,\ v^4\}$$

$$\{v^i,\ v^2,\ v^3,\ v^4\}$$

となる。

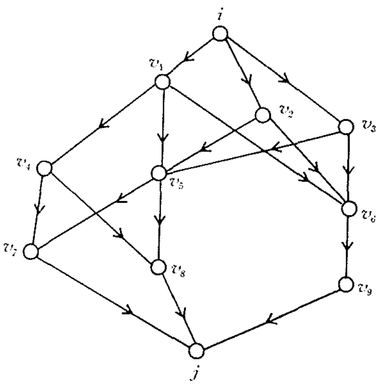

図 4-8　例題 2 のグラフ

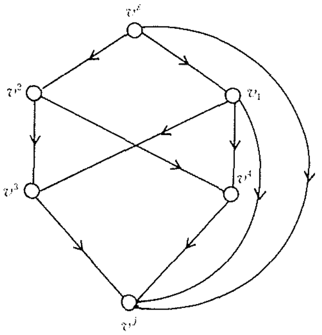

図 4-9 D グラフ G_{DT}

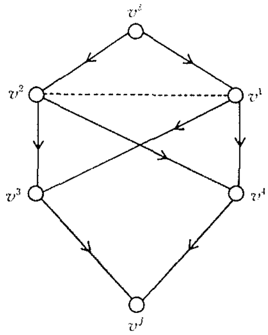

図 4-10 G_{DT}から推移枝を除いたグラフ G^H_{DT}

$$\{v^1, v^2, v^3, v^4\} \to \{v_4, v_5, v_7, v_8\}$$
$$\{v^i, v^1, v^3, v^4\} \to \{v_1, v_5, v_7, v_8\}$$
$$\{v^i, v^2, v^3, v^4\} \to \{v_1, v_4, v_7, v_8\}$$

となるから G^H_{DT} のターミナルテストにおいて除外されるものはない。

$$T_0 = \begin{cases} \{v_4, v_5, v_7, v_8\} \\ \{v_1, v_5, v_7, v_8\} \\ \{v_1, v_4, v_7, v_8\} \end{cases}$$

5. 結　　言

システムを構成するユニットの出力を観測してシステムの故障診断をする場合，故障ユニットを指摘するための観測点の求め方について述べ，さらに観測点が限定されている場合に観測すべきテスト端子を決定するアルゴリズムを示した。観測可能な節点集合 T に対するグラフ G の D グラフが acyclic SEC グラフとなり，D グラフを1識別可能にする点に対応する G の部分節点集合から T の要素を選び出して得られる T の部分集合を得る。これに対する G の D 分割が T と同じ分割を与えるということがこのアルゴリズムの原理となっている。

今後は，1識別可能性を一般化し，システムを k 識別可能にする節点集合を見出すアルゴリズムを開発する必要がある。

最後に日頃指導頂く本学科，黒部，松本（正）両教授，並びに小川，伊藤両助教授に感謝の意を表します。

参 考 文 献

1) W. Mayeda, C. V. Ramamoorthy: "Distinguishability Criteria in Oriented Graphs and their Application to Computr Diagnosis-I" IEEE, Trans. CT-16, 4, p. 448 (Nov., 1969).
2) 中野秀男，中西義郎：“システム故障診断のための内部端子決定法”，信学論 (C), 54-C, 8, p. 744 (昭 46-08).
3) 中野秀男，中西義郎：“システム故障診断のための内部端子”，信学論 (C), 54-C, 19, p. 1042 (昭 46-11).
4) 中野秀男，中西義郎：“システム故障診断における1-識別可能のための必要十分条件”，信学論 (D), 55-D, 10, p. 654 (昭 47-10).
5) 奥井和紀：“故障診断のための観測端子決定法に関する一考察”，信学会電子計算機研資，EC-72-12 (1972-06).
6) Frank Harary. et al: "Structual Models: An Introduction to the theory of directed graphs", John Wiley & Sons, Inc. (1965).
7) S. Seshu, M. B. Reed: "Linear graphs and electrical netwok" Reading, Mass, Addison-Wesley

(1961).
8) 前田　渡："グラフとシステムダイアゴノーシス", 信学会回路とシステム研資, CT-72-26 (1972-07).
9) C. V. Ramamoorthy, W. Mayeda: "Computer Diagnosis Using the Blocking Gate Approach", IEEE Trans, C-20, 11, p. 1294 (Nov. 1971).
10) H. Y. Chang, E. Manning, G. Netge: "Fault diagnosis of dgital syrtems", John wiley & Sons, Inc. (1968) (訳) 鵜飼, 利谷訳："デジタル・システムの故障診断", 産業図書 (昭 46).
11) 田原米起, 仙石正和：出力観測可能なユニットが限定されているシステムの故障診断", 信学論 (D), 57-D No. 6, P. 387 (昭 49-6).