



Title	インポリュート内歯形の歯形干渉と最少歯数
Author(s)	土肥, 修; 鶴飼, 隆好; 落合, 宏; 工藤, 博司
Citation	北海道大學工學部研究報告, 81, 1-13
Issue Date	1976-08-30
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/41378">http://hdl.handle.net/2115/41378</a>
Type	bulletin (article)
File Information	81_1-14.pdf



[Instructions for use](#)

## インボリュート内歯車の歯形干渉と最少歯数

土肥 修\* 鵜飼隆好\* 落合 宏\* 工藤博司\*\*

(昭和51年3月31日受理)

### Tooth Profile Interference and Minimum Teeth Number of Internal Involute Gear

Osamu DOI, Takayoshi UKAI, Hiroshi OCHIAI and Hiroshi KUDO

(Received March 31, 1976)

#### Abstract

Internal gears are used for various specific purposes in industry, for instance, planetary gears, transmission gears of turbine, rotary compressor and so on.

An internal involute gear is limited in its cutting method and for practical purposes pinion cutter method is used. A large difference between teeth number of internal gear and pinion cutter may lead to interferences such as involute, trochoid or trimming in generating tooth profile.

In this paper, internal gear tooth profile was calculated numerically pursuing the precise locus of pinion cutter profile and the range of tooth profile interference was determined under the combination of teeth number of internal gear and pinion cutter, taking the pressure angle, coefficient of addendum height and modification as parameters.

#### 1. 緒 言

内歯車は、中空円筒の内面に歯を有し、歯面は凹面で、外歯車との接触において接触応力、滑り率が小さく、噛合率が大きく、効率もよいのでその用途は遊星歯車装置の他、タービンの減速用、ロータリコンプレッサの増速用など産業機械、船舶、航空機の広い分野に亘っている。

しかし、内歯車は工作法に制限を受け、実用的にはピニオンカッタによるのがほとんど唯一のものであるが、歯切に際しピニオンカッタとの歯数差によってはインボリュート干渉、トロコイド干渉、トリミングを生じ、健全な歯車が得られない惧れがある。

本論文はピニオンカッタによる内歯車の歯切において、圧力角、歯末歯丈係数、転位係数をパラメータにとり、電子計算機を用いてピニオンカッタ切刃の軌跡を忠実に追跡し、創成される内歯車歯形を求め、ピニオンカッタと内歯車の歯数の組合せに対して各干渉領域を検討し、健全な歯車の内歯車最少歯数を求め、内歯車の設計資料を提供したものである。尚、計算はすべて北海道大学大型計算機 FACOM-230-60 によった。

本論文に用いた主な記号をまとめて以下に示す。

#### 本論文に使用する主な記号

$z$ : 歯数

$r_b$ : 噛合ピッチ円半径

\* 機械工学第二学科 機械設計学講座

\*\* 北斗工機係

$z_k$ : ピニオンカッタの尖り限界歯数	$r_g$ : 基礎円半径
$z_g$ : ピニオンカッタの切下げ限界歯数	$r_k$ : 歯先円半径
$m$ : モジュール	O: 歯車回転中心
$\alpha_b$ : 嚙合圧力角	P: ピッチ点
$x$ : 転位係数	A: ピニオンカッタ歯形上の任意の点 $(r, \theta)$
$\eta$ : 歯末歯丈係数	$A_k$ : ピニオンカッタ歯先点 $(r_k, \theta_k)$
$c$ : 頂隙係数	添字 1 ピニオンカッタ
$a$ : 中心距離	2 内歯車

## 2. 内歯車の歯切

ピニオンカッタはラック形工具で歯切されるものとし、歯先に丸み、面取りはつけず、転位は与えないものとする。さらに内歯車の歯末歯丈係数を  $\eta$ 、カッタの頂隙係数  $c$  を  $0.25\eta$  とすると、全歯丈は  $2.5\eta m$  となる。

内歯車の歯形は被切削内歯車に対するピニオンカッタ歯形各点の相対運動の軌跡を求めることにより決定できる。先ず図1においてピニオンカッタを  $O_1P$  から反時計方向に  $\varphi$  だけ回転させたとき、嚙合ピッチ円上のピニオンカッタと内歯車の嚙合点 P はそれぞれ  $P_1, P_2$  まで進む。ピニオンカッタと内歯車の嚙合ピッチ円半径をそれぞれ  $r_{b1}, r_{b2}$  とすれば、歯数比  $i=r_{b2}/r_{b1}=z_2/z_1$  として

$$\angle PO_1P_1=\varphi, \quad \angle PO_2P_2=\varphi/i$$

又、ピニオン歯形上の1点  $A(r, \theta)$  は歯車の回転に伴い、 $A'(r, \theta+\varphi)$  に進む。点  $A'$  で切削される内歯車歯面上の点  $B(=A')$  を  $O_2P_2$  を軸として  $R=\overline{O_2B}$  で表す。ピニオンカッタの歯面 A は被削歯車の半径  $R$  の歯面を角度  $\theta$  ( $=\angle P_2O_2B$ ) まで切削することになるから  $A'$  から  $O_1O_2$  に下した垂線の足を C として、

$$\overline{A'C}=r \sin(\theta+\varphi) \quad (1)$$

$$\overline{CO_2}=a+r \cos(\theta+\varphi) \quad (2)$$

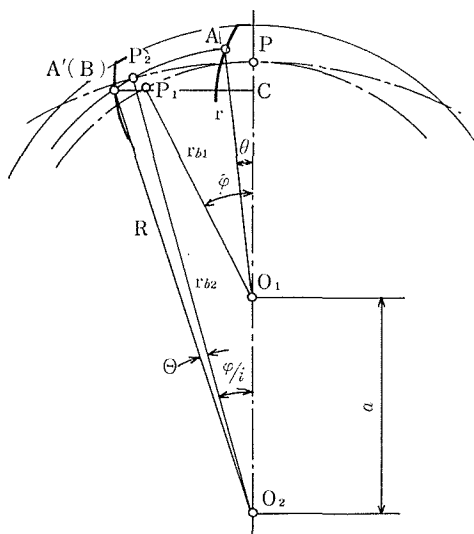


図1 内歯車の歯切1

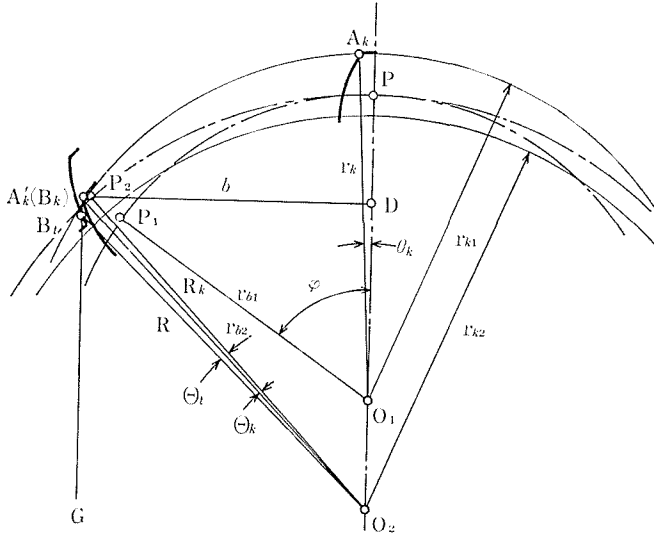


図2 内歯車の歯切2

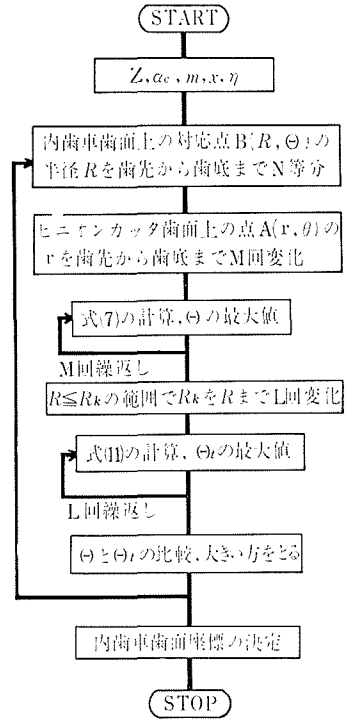


図3 内歯車歯形計算フローチャート

よって

$$R^2 = \{a + r \cos(\theta + \varphi)\}^2 + \{r \sin(\theta + \varphi)\}^2 \tag{3}$$

$$\cos(\theta + \varphi) = (R^2 - r^2 - a^2) / 2ra \tag{4}$$

ここで

$$R \sin(\theta + \varphi / i) = r \sin(\theta + \varphi) \tag{5}$$

$$\theta = \sin^{-1} \{ r \sin(\theta + \varphi) / R \} - \varphi / i \tag{6}$$

被切削歯車歯面の半径  $R$  に対し、式 (4) から  $\varphi$  を求めて式 (6) に代入すれば

$$\theta = \sin^{-1} \left\{ \frac{r}{R} \sqrt{1 - \left( \frac{R^2 - r^2 - a^2}{2ra} \right)^2} - \frac{1}{i} \left[ \cos^{-1} \left( \frac{R^2 - r^2 - a^2}{2ra} \right) - \theta \right] \right\} \tag{7}$$

すなわち  $\theta$  は  $R, r, \theta$  の関数となり、点  $A$  がピニオンカッタ歯形上を移動するとき、式 (7) で示される  $\theta$  が最大になる点まで内歯車の切削が行われる。従って内歯車の歯先から歯底までの  $R$  に対して  $\theta$  の最大値を求めれば歯切される内歯車の歯形を求めることができる。

次にピニオンカッタの半径方向送りによる内歯車歯面の形状を検討する。図2においてピニオンカッタが  $\varphi$  だけ回転して歯先点  $A_k(r_k, \theta_k)$  が  $A'_k(=B_k)$  まで進んだとき、 $A'_k$  を内歯車歯面上の点  $B_k$  として  $O_2$  を中心、 $O_2P_2$  を軸とする座標  $B_k(R_k, \Theta_k)$  で表す。式 (6) と同様に、

$$\Theta_k = \sin^{-1} \left\{ \frac{r_k \sin(\theta_k + \varphi)}{R_k} \right\} - \frac{\varphi}{i} \tag{8}$$

式 (4) を用いて変形し、

$$\Theta_k = \sin^{-1} \left\{ \frac{r_k}{R_k} \sqrt{1 - \left( \frac{R_k^2 - r_k^2 - a^2}{2r_k a} \right)^2} \right\} - \frac{\varphi}{i} \tag{9}$$

点  $B_k$  を通り中心線  $O_1O_2$  に平行な直線  $B_kG$  との距離を  $b$  とすれば中心方向に送られるピ

ニオンカッタの最大幅（即ち歯先）が被削歯車歯面を削りとる。

直線  $B_kG$  上の任意の点を  $B_i(R, \theta_i)$  とすれば

$$R \sin(\theta_i + \varphi/i) = -b = R_k \sin(\theta_k + \varphi/i) \quad (10)$$

式 (4) と同様の関係を用いて式 (10) の右边を変形し

$$\theta_i = \sin^{-1} \left\{ \frac{r_k}{R} \sqrt{1 - \left( \frac{R_k^2 - r_k^2 - a^2}{2r_k a} \right)^2} \right\} - \frac{1}{i} \left\{ \cos^{-1} \left( \frac{R_k^2 - r_k^2 - a^2}{2r_k a} \right) - \theta_k \right\} \quad (11)$$

式 (11) は点  $B_i$  が直線  $B_kG$  上にあるための条件式である。

被削内歯車歯形は、歯面上任意の半径  $R$  に対して式 (7) で求められる角度  $\theta$  の最大値と、式 (11) で示される  $R \leq R_k$  なる範囲の  $R_k$  が削りとる角度  $\theta_i$  の最大値のうち、大きい方の値によって決定される。

内歯車の歯形を求めるフロートチャートを図3に示す。

### 3. 内歯車の歯形の干渉

#### 3.1 インボリュート干渉

インボリュート干渉は内歯車とピニオンカッタの歯数差が多いときにおこり、歯数の少い外歯車の歯切において起る切下げに対応するもので、内歯車においては歯先が削られる。インボリュート干渉はピニオンカッタの基礎円より内側の部分で内歯の歯先を削りとる現象である。

一方、歯数の少い内歯車用ピニオンカッタは歯形研削の際、切下げを生ずる。この場合は内歯車のインボリュート干渉により歯先にピニオンカッタの切下げに対応する突起が残る。インボリュート干渉は、図4において内歯車の歯先円が干渉点  $T_1$  すなわち作用線と外歯車の基礎円との接点よりも内側に存在する場合に生ずる。従って、干渉の起きない条件は内歯車の歯先円と作用線との交点を  $Q$  とするとき次式で与えられる。

$$\overline{PT_1} \geq \overline{PQ} \quad (12)$$

これをピニオンカッタの歯数  $z_1$ 、内歯車の歯数  $z_2$  で嚙合圧力角  $\alpha_b$  を用いて表すと、

$$\frac{z_1}{z_2} \geq 1 - \frac{\tan \alpha_{k2}}{\tan \alpha_b} \quad (13)$$

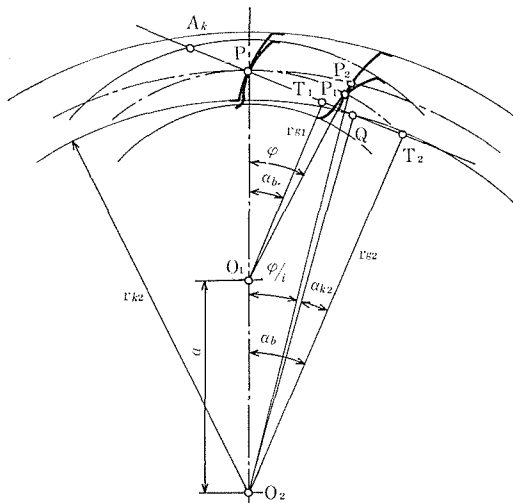


図4 インボリュート干渉

ただし、

$$\alpha_{k_2} = \cos^{-1} \left( \frac{r_{g_2}}{r_{k_2}} \right)$$

### 3.2 トロコイド干渉

トロコイド干渉はインボリュート接触を終えたピニオンカッタの歯先が被削歯車から抜け出る際にトロコイド曲線を描いて再び内歯車の歯先歯面に食込み、削成されたインボリュート曲線を削り取る現象をいう。図5においてインボリュート接触は  $A_k$  で終る。その後ピニオンカッタ及び内歯車の歯先はそれぞれの歯先円にそって移動し、点  $Q$  で再び交わる。トロコイド干渉が発生しない条件は内歯車の歯先がピニオンカッタの歯先より先に点  $Q$  を通過することである。今ピニオンカッタ、内歯車の回転速度を  $\omega_1, \omega_2$  とすると  $A_k, S$  からそれぞれ  $\theta_1, \theta_2$  回転して点  $Q$  まで進むのに要する時間は、

$$t_1 = \theta_1 / \omega_1, \quad t_2 = \theta_2 / \omega_2 \quad (14)$$

従ってトロコイド干渉が起きない条件は、 $t_1 \geq t_2$  即ち

$$\theta_1 \geq \theta_2 (\omega_1 / \omega_2) = i \theta_2 \quad (15)$$

で表される。ここで

$$\cos(\theta_1 + \alpha_{k_1} - \alpha_b) = (r_{k_2}^2 - r_{k_1}^2 - a^2) / 2r_{k_1}a$$

$$\cos(\theta_2 + \psi - \alpha_b) = (r_{k_2}^2 - r_{k_1}^2 + a^2) / 2r_{k_2}a$$

$$\alpha_{k_1} = \cos^{-1}(r_{g_1}/r_{k_1})$$

$$\alpha_{k_2} = \cos^{-1}(r_{g_2}/r_{k_2})$$

$$\psi = \tan\{\cos^{-1}(r_{g_2}/r_{k_2}')\} - \text{inv } \alpha_{k_2}$$

$$r_{k_2}' = \sqrt{r_{k_1}^2 + a^2 - 2r_{k_1}a \cos(\alpha_{k_1} - \alpha_b)}$$

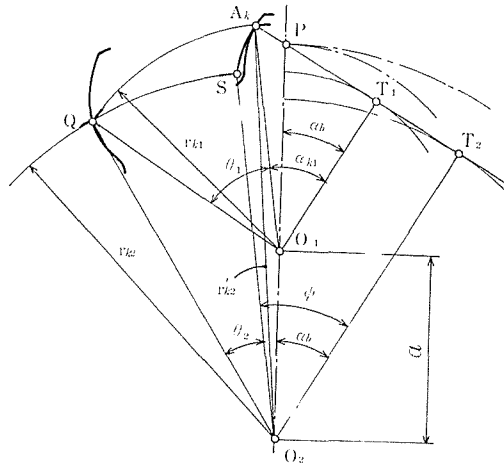


図5 トロコイド干渉

### 3.3 トリミング

ピニオンカッタが内歯車を歯切するとき、先ずカッタを半径方向に内歯の歯丈だけ切込む。この時ピニオンカッタの歯先が内歯車の歯先に干渉して、その正しい歯形を損うことがあり、これをトリミングという。

図6においてピニオンカッタの歯先が点  $A_k$  で内歯車歯形との嚙合を終えてから内歯車とピニオンカッタの歯先円の交点  $Q$  に達するまでの間に、ピニオンカッタの歯先点  $A'_k$  と内歯車の歯

先点 E からそれぞれ中心線に下した垂線の長さ  $\overline{A'_k D}$ ,  $\overline{EF}$  が如何なる回転位置においても常に  $\overline{A'_k D} \leq \overline{EF}$  であることがトリミングの起らない条件である。なお、図5と図6を比較して、トリミングが起きないときはトロコイド干渉も起らない。

ピッチ点 P で噛合っているピニオンカッタと内歯がそれぞれ  $\varphi$  と  $\varphi/i$  だけ回転して図6の位置にきたとすると、

$$\begin{aligned} \overline{A'_k D} &= r_{k1} \sin\{\varphi - (\text{inv } \alpha_{k1} - \text{inv } \alpha_b)\} \\ &= r_{g1} \sec \alpha_{k1} \sin\{\varphi - (\text{inv } \alpha_{k1} - \text{inv } \alpha_b)\} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \overline{EF} &= r_{k2} \sin\{\varphi/i + (\text{inv } \alpha_b - \text{inv } \alpha_{k2})\} \\ &= i r_{g1} \sec \alpha_{k2} \sin\{\varphi/i + (\text{inv } \alpha_b - \text{inv } \alpha_{k2})\} \end{aligned} \quad (17)$$

トリミングが起きないための条件は

$$\overline{EF} \geq \overline{A'_k D}$$

すなわち

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= i \sec \alpha_{k2} \sin(\varphi/i - \text{inv } \alpha_{k2} + \text{inv } \alpha_b) \\ &\quad - \sec \alpha_{k1} \sin(\varphi - \text{inv } \alpha_{k1} + \text{inv } \alpha_b) \geq 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ピニオンカッタの歯数  $z_1$  に対して式 (16) が成立すれば、これより少い歯数  $z_1$  に対しても成立するから、内歯車の歯数  $z_2$  が与えられた場合、干渉を起さないピニオンカッタの最大歯数は

$$f(\varphi) = 0, \quad \frac{df(\varphi)}{d\theta} = 0 \quad (19)$$

から  $z_2$  の関数として求めることができる。

即ち、

$$\begin{aligned} \sec \alpha_{k2} \cos(\varphi/i - \text{inv } \alpha_{k2} + \text{inv } \alpha_b) \\ - \sec \alpha_{k1} \cos(\varphi - \text{inv } \alpha_{k1} + \text{inv } \alpha_b) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

式 (18), (20) から  $\varphi$  を消去してトリミングを生じない条件は

$$\sin^{-1} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\cos \alpha_{k1}}{\cos \alpha_{k2}}\right)^2}{1 - (1/i)^2} + \text{inv } \alpha_{k1} - \text{inv } \alpha_b - i} \left\{ \sin \sqrt{\frac{(\cos \alpha_{k2})^2 - 1}{i^2 - 1} + \text{inv } \alpha_{k2} - \text{inv } \alpha_b} \right\} \geq 0 \quad (21)$$

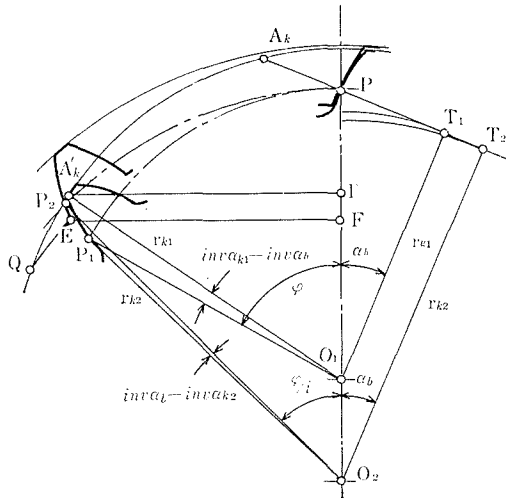


図6 トリミング

3.4 干渉領域

以上の干渉条件式 (13), (15), (21) から表 1 の条件に対して求めた干渉領域を図 7 から図 13 に示す。図は横軸にピニオンカッタの歯数, 縦軸に内歯車の歯数を取り, 記号は次の各干渉領域を示す。

- インボリュート干渉領域 : X, \*, Y
- トロコイド干渉領域 : O, W, Y
- トリミング領域 : /, O, \*, Y

図中の空白部分のうち, V 字形に囲まれた部分が干渉のない実用の領域であり, 右下の部分は内歯車の歯数  $z_2$  がピニオンカッタの歯数  $z_1$  より少ない領域で実用にならない。又, 次の記号はそれぞれの理由で計算不可能となる領域を示す。

@ : 内歯の基礎円半径  $r_{g_2}$  が歯先円半径  $r_{k_2}$  より大となるとき。

= :  $\text{inv } \alpha_b$  が負になるとき。

% : ピニオンカッタの歯先円半径  $r_{k_1}$  が内歯の歯先円半径  $r_{k_2}$  より大になるとき。

更に, 各図にはピニオンカッタの尖り限界  $z_k$  と切下限界  $z_g$  を記入した。 $z_k$  より少ない歯数のピニオンカッタでは, 内歯に充分な頂隙をとることが出来ない。

次にこれらの図について簡単な説明を加える。先ず図 7 は圧力角  $14.5^\circ$ , ピニオンカッタの歯末歯丈係数 1.25, 転位係数 0, 内歯車の歯末歯丈係数 1.0, 転位係数 0 の場合で, ピニオンカッタは歯数 31 枚で切下げが起り, 4 枚で尖り限界を起える。

例えば歯数 80 枚の内歯車を歯切するとき, ピニオンカッタの歯数が 43 枚以下であるとインボ

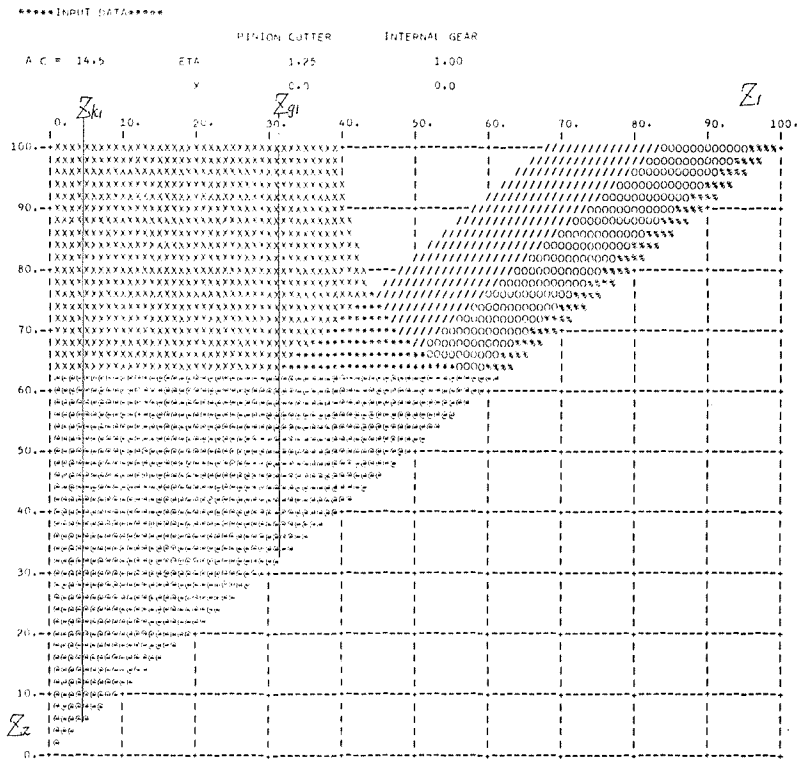


図 7





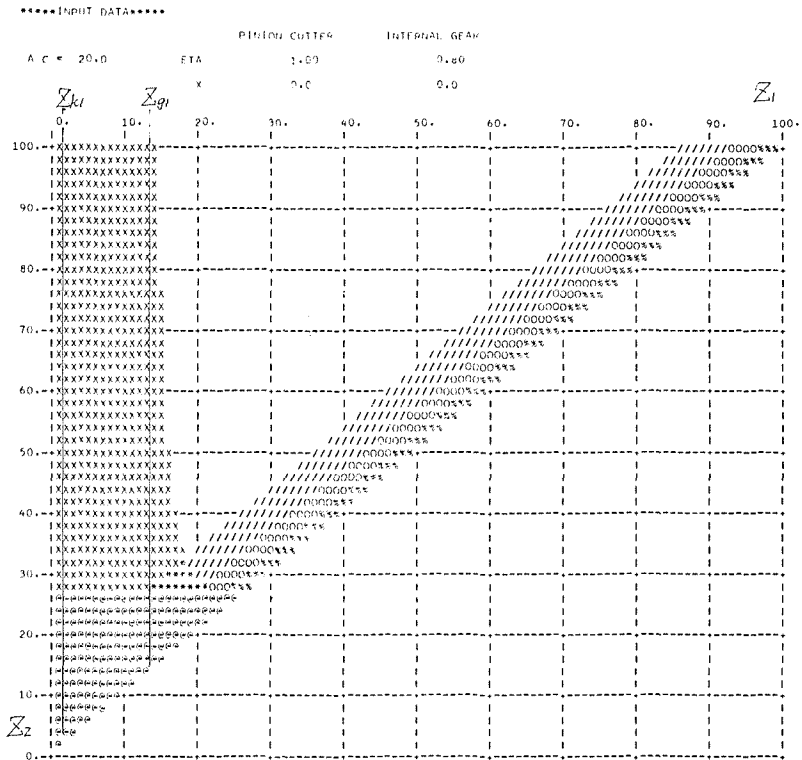


図 10

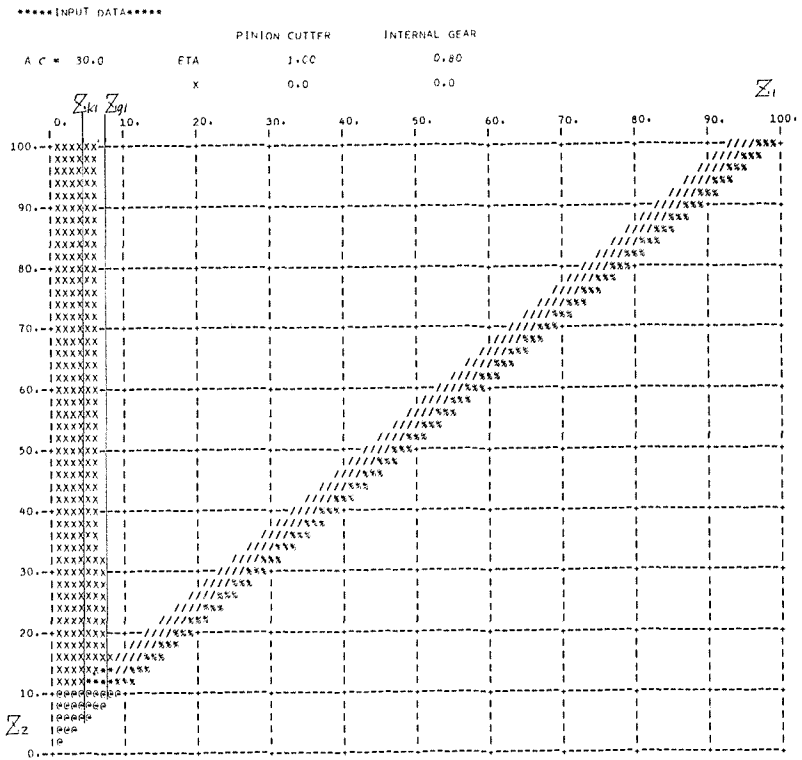
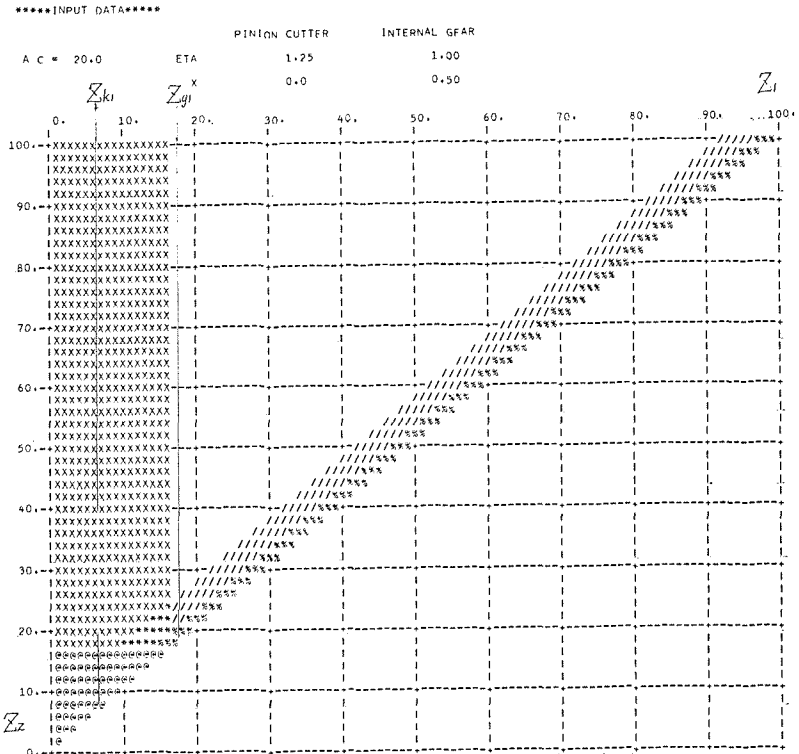
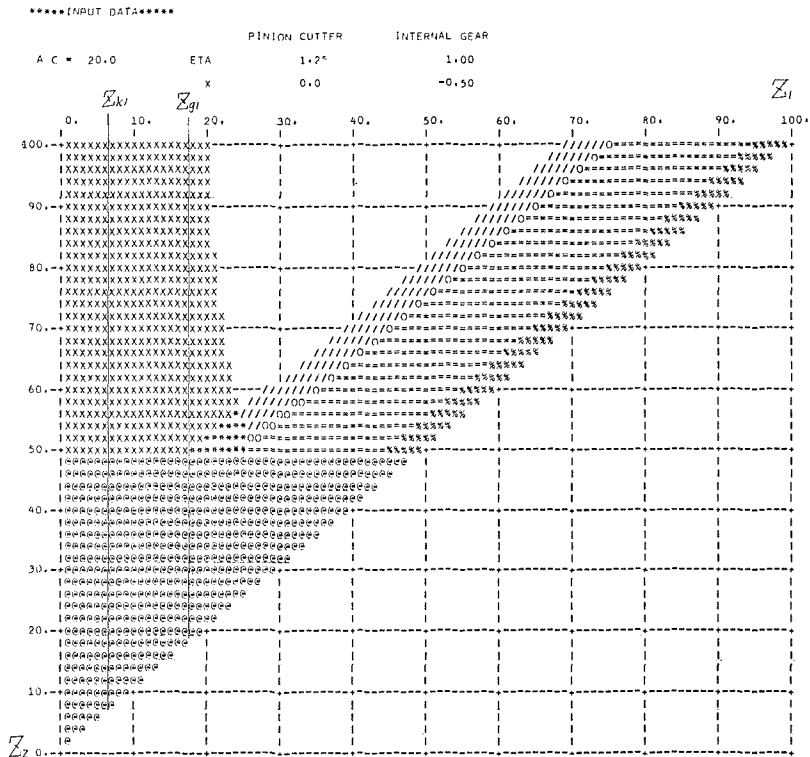


図 11



12



13

$m$	50.00	50.00	50.00	50.00	50.00
$\alpha_c$	20.00	14.50	14.50	14.50	14.55
$z_1$	42.	40.	45.	55.	70.
$x_1$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$\eta_1$	1.250	1.250	1.250	1.250	1.250
$c$	.2310	.2500	.2500	.2500	.2500
$r_{k_2}$	1112.500	1062.500	1187.500	1437.500	1812.500
$r_{b_2}$	1050.000	1000.000	1125.000	1375.000	1750.000
$r_{g_2}$	986.677	968.148	1089.166	1331.203	1694.258
$z_2$	50.	80.	80.	80.	80.
$x_2$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$\eta_2$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

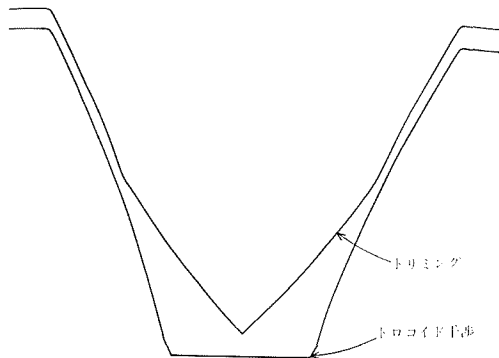


図 14 トロコイド干渉とトリミング  
( $z_1=42$ )

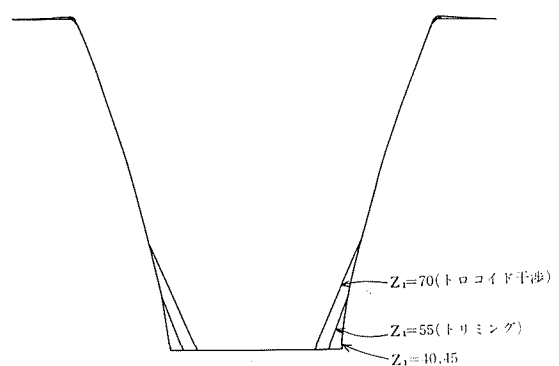


図 15 トロコイド干渉とトリミング  
( $z_1=40, 45, 55, 70$ )

リュート干渉が起り、31 枚以下になるとピニオンカッタの歯元に切下げが起るから、内歯の歯元に余肉がつく。ピニオンカッタの歯数が 40 枚から 43 枚の間ではインボリュート干渉のみが起るが、実際に数値計算して描かせた内歯車歯形を観察したが干渉は極めて微少であり実用上は問題とならない程度だった。歯数 44 枚から 47 枚の間では完全な歯車を歯切することが出来る。歯数が 48 枚から 63 枚までの間ではトリミングが起り、64 枚から 75 枚の間ではトリミングとトロコイド干渉が起っている。

又、ピニオンカッタの歯数 45 枚で 70 枚の内歯車を歯切するとインボリュート干渉とトリミングが起り、歯数 50 枚のピニオンカッタで 60 枚の内歯車を歯切すると全ての干渉が起る。結局図 7 の条件のピニオンカッタで、干渉を起さず歯切出来る内歯車歯数は 78 枚以上となる。

圧力角が  $20^\circ$  になると、図 8 のように干渉を起さぬ領域は広がり、歯切出来る最低の内歯車歯数は 42 枚となる。この場合インボリュート干渉ではピニオンカッタの歯数が 17 枚以下になると内歯歯先に余肉が付く。

さらに圧力角が大きい  $30^\circ$  の場合は、ピニオンカッタの尖り限界歯数が 38 枚と多くなり、歯切可能な内歯車の最少歯数はピニオンカッタの歯数 38 枚のときで 47 枚となる。

歯丈の小さい低歯では、ピニオンカッタの尖り限界歯数が少くなり、図 11 では歯切可能な最少歯数が 17 枚となる。図 8 と図 10、図 9 と図 11 を比較してみると歯丈が低くなるにつれて干渉の起きない領域があることがわかる。

内歯車を転位歯切する場合については、図 8 と図 12、図 13 を比較して、正の転位量（中心から遠ざかる方、すなわち歯がやせる方を正とする）を増加する程、トリミング、トロコイド干渉の起る領域が減少する。

#### 4. 内歯車の最少歯数

図14は図8に相当する圧力角  $\alpha_c=20^\circ$ 、歯数  $z_1=42$  枚のピニオンカッタで歯末歯丈係数  $\eta=1.0$ 、転位係数0、歯数  $z_2=50$  枚の内歯車を切削した歯形である。図8を参照するとこの条件で

表1 ピニオンカッタ，内歯車の諸元

図	圧力角	ピニオンカッタ			内歯車	
		歯末歯丈係数	歯元有効歯丈係数	転位係数	歯末歯丈係数	転位係数
7	14.5	1.25	1.0	0.	1.0	0.
8	20.	1.25	1.0	0.	1.0	0.
9	30.	1.25	1.0	0.	1.0	0.
10	20.	1.0	0.8	0.	0.8	0.
11	30.	1.0	0.8	0.	0.8	0.
12	20.	1.25	1.0	0.	1.0	0.5
13	20.	1.25	1.0	0.	1.0	-0.5

はトリミングとトロコイド干渉が起っている。トロコイド干渉で削り取られる部分は僅かであるが、実際はトリミングによって大きく欠損している。

図15は図7に相当する  $\alpha_c=14.5^\circ$ 、 $z_2=50$  の内歯車に対し、ピニオンカッタとしてはトリミングのみが発生する  $z_1=55$  枚と、トロコイド干渉も同時に発生する  $z_1=70$  のもので歯切した歯形である。 $z_1=70$  においてはトリミング部分がトロコイド干渉部分を超えるが、ここではトロコイド干渉により削り取られる部分は観察することが出来なかった。

以上それぞれの計算例から、全く干渉を起さずに切削される健全な内歯車の最少歯数を表1に示す諸元について求め、これと対応するピニオンカッタの歯数を決定することが出来る。表2は計算結果の一例であるが極めて厳しい条件を満足するピニオンカッタと内歯車の歯数の組合せであり、実用上ある程度の干渉を許すことにすれば最少歯数を減らすことが可能である。

表2 干渉を起さない内歯車最少歯数

図	圧力角	内歯車最少歯数	対応するピニオンカッタ歯数
7	14.5	78	44, 45
8	20.	42	23, 24
9	30.	47	38
10	20.	34	19
11	30.	17	8, 9
12	20.	22	15
13	20.	61	24, 25

#### 5. 結 言

ピニオンカッタと内歯車の相対運動を忠実に追跡する方法で被削内歯車の歯形を描く手法を開発し、嚙合パラメータとして圧力角、歯末歯丈係数、転位係数を取り、内歯車特有のインボリュート干渉、トロコイド干渉、トリミングの干渉領域を詳細に調べた結果の主なものは次の通りである。

- 1) 一般にピニオンカッタの歯数が少ない範囲ではインボリュート干渉が生ずる。
- 2) 歯数が多い場合はトリミングが問題となる。
- 3) トロコイド干渉が単独に生ずることはなく、トリミング領域の中に含まれる。
- 4) 全く干渉を起さない領域をピニオンカッタと内歯車の歯数の組合せに対して求め、図7～13に図示した。
- 5) ピニオンカッタの歯末歯丈係数1.25の場合、圧力角を大きくすれば切削可能な歯数の領域

は広がるがピニオンカッタの尖り限界歯数が増加するため実際上の切削可能領域は減少する。

6) 圧力角, 歯末歯丈係数, 転位係数を変化し, 健全な歯形状が切削出来る内歯車の最少歯数とピニオンカッタの歯数との最適組合せを計算して表にまとめた。

7) 正の転位, 歯末歯丈係数の減少は干渉のない領域を拡大する。