



Title	有限要素法による片持はりの衝突振動の解析
Author(s)	入江, 敏博; 山田, 元; 浅野, 正晴
Citation	北海道大學工學部研究報告, 83, 63-72
Issue Date	1977-03-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/41398
Type	bulletin (article)
File Information	83_63-72.pdf



[Instructions for use](#)

有限要素法による片持はりの衝突振動の解析

入江 敏博* 山田 元* 浅野 正晴**

(昭和51年9月21日受理)

Analysis of Impact Vibration of Cantilever Beams by the Finite Element Method

Toshihiro IRIE, Gen YAMADA and Masaharu ASANO

(Received September 21, 1976)

Abstract

In the past, the impact vibration arising when a uniform beam colliding with another body at a point has been studied theoretically in detail, but in general it is difficult to analyze the impact vibration caused in beams with variable thicknesses and more complicated systems.

In this paper, the finite element method is used to analyze the impact vibration caused in a cantilever beam with variable thicknesses and a concentrated mass at the free end. The dynamic property of the colliding point is represented by two models. One of them is a mathematical model consisting of two springs and a damper, and the other is a typical collision model assuming the proportionality relation between the colliding velocity and the bounding velocity in each collision. From the present study, the following conclusions were obtained. The dynamic response of beams can be simulated on a digital computer with sufficient accuracy by dividing the beam into several elements at an appropriate ratio. The vibrational components of high order appear in beams in which internal friction and the attached mass are small, but the increase of internal friction and statical force pressed against the other body, and the appropriate selection of the attached mass, the beam shape and the location of colliding point reduce these components and the displacements and colliding velocities.

1. 緒 言

衝突振動は種々の機械の可動部にみられる現象である。衝突振動を積極的に利用している機械もあるが、通常この種の振動は有害なもので、機械の振動、騒音の原因となるばかりでなく、ひいては機械の性能や精度を低下させ、その寿命を縮めるにいたる。したがってこの振動は、その性質を十分見究めたい極力防止したいものであり、とくに通信機用継電器のような電気機器や各種の精密機器類では、その要求も切実である。

こういった理由から、先端に集中質量を有する片持はりの衝突振動^{1,2)}、衝突時のはりの速度分布を仮定して衝突応答を解く方法³⁾、継電器を片持はりとみなし、その4次振動までを考慮に入れてはりの応答を取り扱った解析と実験⁴⁾など、この種問題の研究はかなり多い。なお衝突振動

* 機械工学第二学科 機械力学講座

** 日本国有鉄道

全般については、Kobriniskii の著書⁵⁾に詳しく述べられており、興味深い例も豊富に記されている。

しかし変断面はりや、複雑な構造物に起こる衝突振動を解析的に研究することは一般に困難なので、本研究では、片持りを適当な分割法でいくつかのはり要素に分割し、有限要素法によって、はりの動的挙動を解析した。衝突の機構は複雑であるが、ここではばねとダンパで構成される代表的な三要素モデル、および衝突前後の速度の間に反発係数で結ばれる一定の関係をもつ反発モデルを採用する。振動系の応答解析に当っては Newmark の β 法⁶⁾を用い、計算機によって逐次計算を実施する。はりの応答には、はりの諸元や被衝突体の性質が関係しているが、これらの数値を適宜変化させることによって、はりの応答に対するそれらの影響を明らかにする。

2. 振動系の運動方程式

図1のように、一点で衝突を伴う変断面はりの横振動はつぎの運動方程式に支配される。

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(1 + r \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} = P(t) \delta(x - L_c) \tag{1}$$

ここでは簡単のため、はりのせん断変形や回転慣性の影響を無視し、ひずみ速度に比例する内部減衰が作用するものと仮定してある。先端に集中質量を有する片持りを考え、固定端より x の位置にあるはりの横変位 y 、断面積 $A(x)$ 、二次モーメント $I(x)$ 、はりの単位体積当りの質量 ρ 、縦弾性係数 E 、内部減衰係数 r 、先端の集中質量を m とする。式 (1) の右辺の $P(t)$ ははりの一点 ($x=L_c$) に働く未知の接触力（衝突力）で、 $\delta(x-L_c)$ はディラックのデルタ関数を表わす。静止状態におけるはりと被衝突体との距離を $-d$ (<0) とおき、両者が圧接されているときは d (>0) とする。

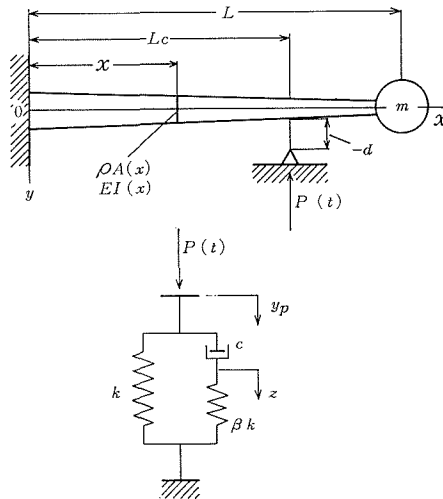


図1 片持りと被衝突体の三要素モデル

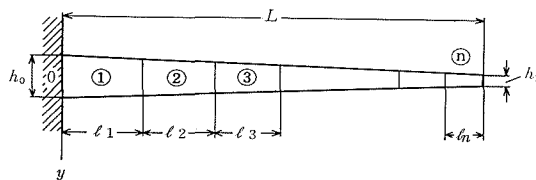


図2 テーパーはりの分割

このはりを図2のように n 個の要素に分割し、そのおのにおに仮想仕事の原理を用いることによって、次式が導かれる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{P}(t) \quad (2)$$

ここで \mathbf{M} ははり全体の質量マトリックス、 \mathbf{K} は剛性マトリックスで

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l_i & l_i^2 & l_i^3 \\ 0 & 1 & 2l_i & 3l_i^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}(x) = [1, x, x^2, x^3] \quad (3)$$

を用いて作った各要素のマトリックス

$$\mathbf{M}_i = \int_0^{l_i} \rho A(x) (\mathbf{H}(x) \mathbf{A}_i^{-1})^T (\mathbf{H}(x) \mathbf{A}_i^{-1}) dx \quad (4)$$

$$\mathbf{K}_i = \int_0^{l_i} EI(x) (\mathbf{H}''(x) \mathbf{A}_i^{-1})^T (\mathbf{H}''(x) \mathbf{A}_i^{-1}) dx \quad (5)$$

から構成される。 \mathbf{C} は減衰マトリックスで、減衰係数 γ と剛性マトリックスの積

$$\mathbf{C} = \gamma \mathbf{K} \quad (6)$$

で表わす。接触力を表わすベクトル $\mathbf{P}(t)$ は衝突点の要素以外ではすべて0である。

一般に被衝突体はある種の粘弾性体と考えられ、多くのばねとダンパ要素から構成される Maxwell モデルあるいは Voigt モデルによってその性質を表わしうる。しかしここでは、簡単のため、図1に示すように被衝突体を三要素モデルで近似して一つの計算を試みる。この場合、接触力 $P(t)$ と被衝突体の変形量 y_P との間にはつぎの関係がある。

$$\frac{dP}{dt} + \frac{\beta k}{c} P = \frac{\beta k^2}{c} y_P + (1 + \beta) k \frac{dy_P}{dt} \quad (7)$$

実際問題では、衝突点の変形や衝突時間ははりの変位や振動の周期に比べてごく小さく、また衝突点におけるはり要素の衝突前後の速度 $(dy_c/dt)_{\mp 0}$ の間に反発係数 ε を用いた一定の関係

$$\left(\frac{dy_c}{dt} \right)_{+0} = -\varepsilon \left(\frac{dy_c}{dt} \right)_{-0} \quad (8)$$

が存在すると思う場合が多い。

一点で衝突するはりの動的応答を求めるに当って、以下では式(2)と、式(7)あるいは(8)を用いて Chan らが Newmark の β 法⁶⁾を線形方程式に適用して導いた階差方程式⁷⁾によって計算する。

この場合のはりの固有振動数は

$$|\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{I}| = 0 \quad (9)$$

から ω を解いて求められる。

3. 精度の検討とはりの応答解析法

変断面はりの一例として一定幅 b 、テーパ $\alpha = (h_0 - h_1)/L = 0.15$ (h_0, h_1 はそれぞれ固定端および自由端のはりの高さ) の高さをもつ片持はりを考える。

表1ははりを一定の分割比 $r = l_i/l_{i+1}$ で等比級数的に分割したときの固有値を計算したものである。この種テーパはりの固有値の厳密な値は

表1 テーパはり ($\alpha=0.15$) の分割数と固有値

要素数 n (分割比 r)	固有値 λ_i (誤差 %)				蔽密値
	2 (1.4)	4 (1.4)	8 (1.2)	16 (1.1)	
1	3.261 (0.03)	3.260 (0.00)	3.261 (0.03)	3.262 (0.06)	3.260
2	5.594 (1.43)	5.526 (0.20)	5.516 (0.02)	5.515 (0.00)	5.515
3	⋮	7.802 (0.68)	7.753 (0.05)	7.743 (-0.03)	7.749
4	⋮	10.122 (1.45)	9.991 (0.13)	9.978 (0.02)	9.976
5	⋮	⋮	12.244 (0.34)	12.204 (0.02)	12.202
6	⋮	⋮	14.526 (0.69)	14.433 (0.05)	14.426
7	⋮	⋮	16.842 (1.15)	16.666 (0.10)	16.649
8	⋮	⋮	⋮	18.907 (0.19)	18.872
				⋮	⋮

表2 テーパはり ($\alpha=0.15$) の分割法と固有値 (分割数 8)

分割比 r	固有値 λ_i (誤差 %)					
	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
1	3.260 (0.00)	3.260 (0.00)	3.260 (0.00)	3.261 (0.03)	3.261 (0.03)	3.261 (0.03)
2	5.515 (0.00)	5.515 (0.00)	5.515 (0.00)	5.516 (0.02)	5.517 (0.04)	5.518 (0.05)
3	7.757 (0.10)	7.753 (0.05)	7.752 (0.04)	7.753 (0.05)	7.755 (0.08)	7.760 (0.14)
4	10.029 (0.53)	10.003 (0.27)	9.992 (0.16)	9.991 (0.15)	9.996 (0.20)	10.006 (0.30)
5	12.382 (1.48)	12.287 (0.70)	12.254 (0.43)	12.244 (0.34)	12.250 (0.39)	12.256 (0.44)
6	⋮	14.624 (1.37)	14.551 (0.87)	14.526 (0.69)	14.515 (0.62)	14.514 (0.61)
7	⋮	⋮	16.871 (1.33)	16.842 (1.16)	16.801 (0.91)	16.963 (1.89)
8	⋮	⋮	⋮	⋮	19.285 (2.19)	⋮

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 J_1(2z) \\
 J_0(2z) \\
 \frac{2-\bar{z}^2}{2\bar{z}}J_1(2\bar{z})-J_0(2\bar{z}) \\
 -(6-4\bar{z}^2)J_1(2\bar{z})+\bar{z}(6-\bar{z}^2)J_0(2\bar{z}) \\
 I_1(2z) \\
 I_0(2z) \\
 \frac{2+\bar{z}^2}{2\bar{z}}I_1(2\bar{z})-I_0(2\bar{z}) \\
 -(6+4\bar{z}^2)I_1(2\bar{z})+\bar{z}(6+\bar{z}^2)I_0(2\bar{z})
 \end{array} \right\} = 0, \\
 \left. \begin{array}{l}
 Y_1(2z) \\
 Y_0(2z) \\
 \frac{2-\bar{z}^2}{2\bar{z}}Y_1(2\bar{z})-Y_0(2\bar{z}) \\
 -(6-4\bar{z}^2)Y_1(2\bar{z})+\bar{z}(6-\bar{z}^2)Y_0(2\bar{z}) \\
 K_1(2z) \\
 -K_0(2z) \\
 \frac{2+\bar{z}^2}{2\bar{z}}K_1(2\bar{z})+K_0(2\bar{z}) \\
 -(6+4\bar{z}^2)K_1(2\bar{z})-\bar{z}(6+\bar{z}^2)K_0(2\bar{z})
 \end{array} \right\} = 0, \\
 \left. \begin{array}{l}
 z \\
 \bar{z}
 \end{array} \right\} = \lambda \frac{\bar{h}}{\alpha L} \sqrt{1 \pm \frac{\alpha L}{2h}} \quad (10)
 \end{array}$$

を満足する正根 λ を計算することによって得られる⁸⁾。その値は表1の右端の欄に記入してあるが、これと比較したときの各次数の数値の誤差が()内に%で記入してある。いずれも蔽密値より多少大きい値をもつが、この計算例では、はりを8要素に分割したとき6次の固有値まで1%以内、16要素に分割すれば12次まで1%以内の精度で求めることができる。

表2ははりを8要素に分割した場合、分割比をかえたときの固有値を示す。このはりでは分割比を1.2としたときが最も良い精度を与えている。実際のテーパはりの固有振動数は、この値に平均高さ \bar{h} の片持はりの基本振動数

$$\omega_1 = \frac{\lambda_1^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (\lambda_1 = 1.875), \quad \bar{A} = b\bar{h}, \quad \bar{I} = \frac{1}{12} b\bar{h}^3 \quad (11)$$

を乗じて求められる。

表3は衝突を伴うはりの応答を、Newmarkの β 法によって解析するためのフローチャートを示す。下方左欄は被衝突体として三要素モデルを用いたときのフローを示し、右欄は反発モデルを採用したときのフローを示す。

はりの応答を計算する場合、無次元時間 $\tau = \omega_1 t$ を用い、 $\Delta\tau = 0.01$ の時間間隔ではりの無次元変位 $\eta = \{y(x, \tau) - d\} / y(L, 0)$ を計算している。はりが被衝突体に近づいて、衝突点の相対変位

表3 はりの応答解析のためのフローチャート

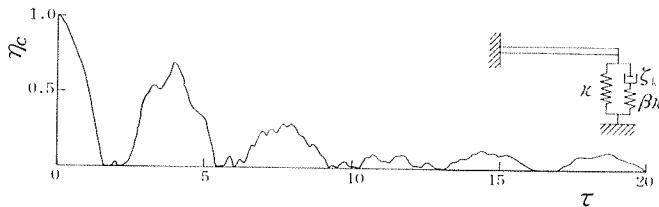
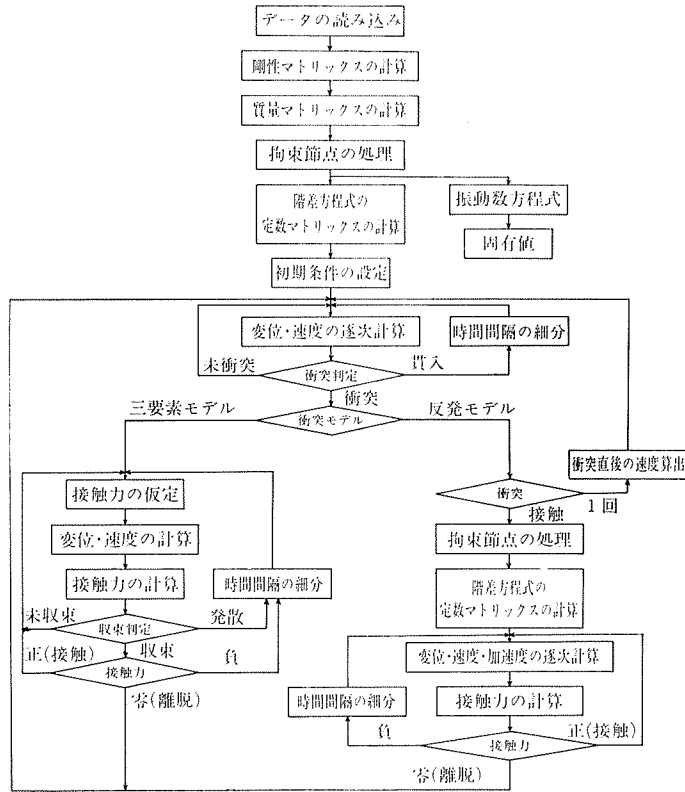


図3 三要素物体に衝突する一様はりの先端変化
 $(\zeta=0.001; \beta=20, \kappa=10)$
 $(\zeta\kappa=0.3, \delta=0)$

が $|\eta_c| < 10^{-4}$ の範囲に入ったとき両者が衝突したものと判定する。未だ衝突にいたらぬときは、引き続いてはりの速度と変位の計算を進めるが、はりがこの値を超えて一気に被衝突体に貫入 ($\eta_c < 10^{-4}$) するときは、時間間隔を細分して再度計算を行う。

三要素モデルの被衝突体を考える場合、衝突が起ったのちは、各時刻における接触力の計算をその収束値(正值)が

$$\left| \frac{1}{\lambda_1^4} \frac{hL^2}{y(L_c, 0)} \frac{P(t)}{EI} \right| < 0.01$$

となって、はりが離脱するまで続行する。接触力がこの値を一気に超えて負値をとるときは、さらに時間間隔を細分して計算を繰り返す。反発モデルを採用する場合、いったんはりが被衝突体に衝突したのち、そのまま接触の状態が続くときは、衝突点ではりが単純支持されたものとしてはりの応答を計算するとともに、衝突点におけるせん断力から接触力を計算する。

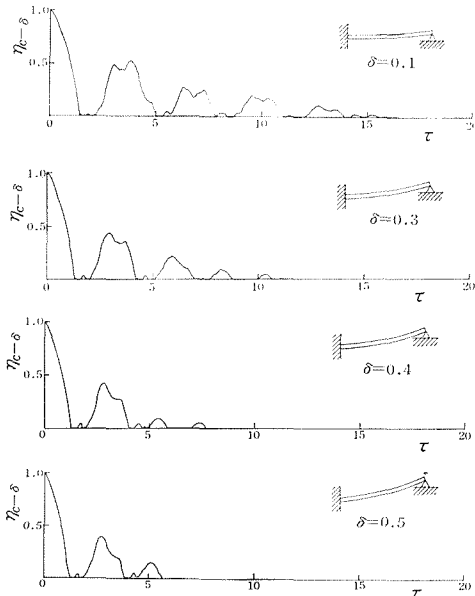


図4 一様はりの先端変位 ($\zeta=0.001$; $\varepsilon=0.6$)

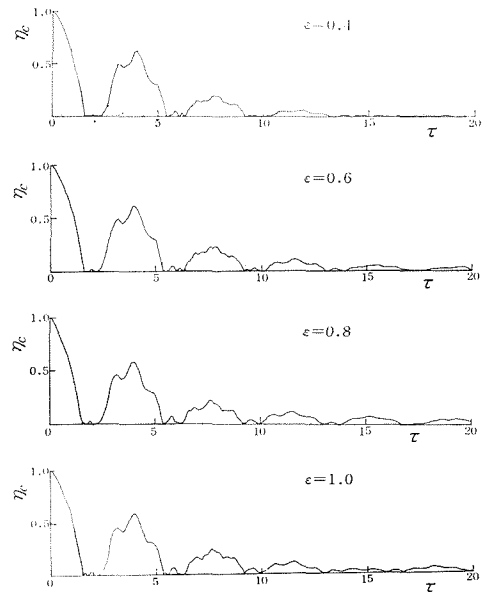


図5 一様はりの先端変位 ($\zeta=0.001$; $L_c/L=1$, $\delta=0$)

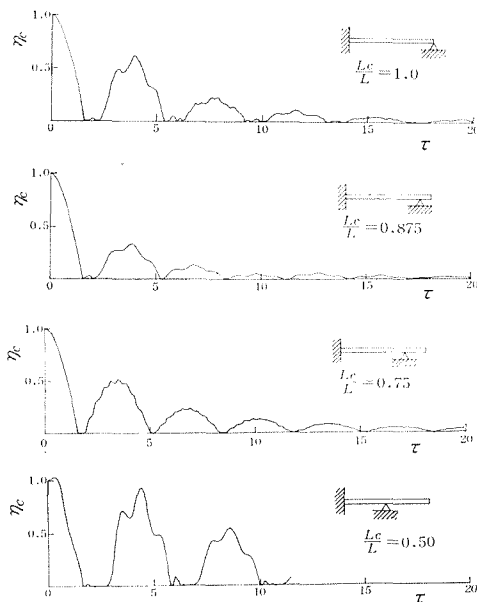


図6 一様はりの衝突点の変位 ($\zeta=0.001$; $\varepsilon=0.6$, $\delta=0$)

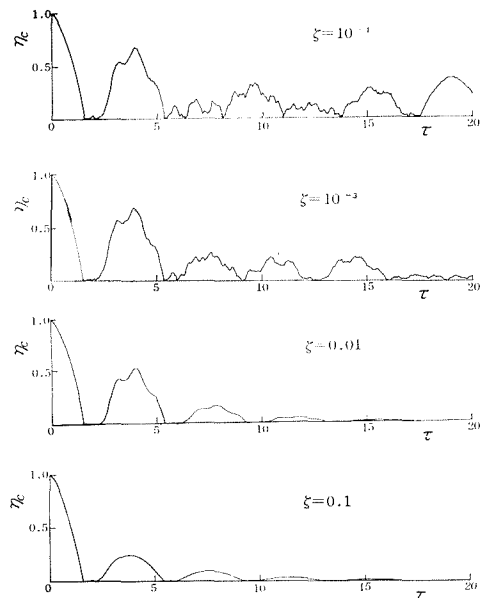


図7 一様はりの先端変位 ($\varepsilon=0.6$, $\delta=0$)

4. 数値計算例と考察

図3以下に、はりの衝突点の変位を $1+\delta$ ($\delta=d/y(L_c, 0)$) だけ引張って静的に変形させたのち、この位置からはりを運動させたときの衝突点の動変位を示す。

図3は三要素モデルの物体に衝突するときの一様はりの先端の応答を示す。この図で $\kappa=k/l$

$(3E\bar{I}/L^3)$, $\varsigma_k=c\omega_k/(3E\bar{I}/L^3)$ を表わしている。この例では被衝突体の変形はごくわずかで、その計算結果を図4以下の図と比較してわかるように、微細な点を除けば、反発モデルによる結果と著しい相違は認められないので、以下の計算ではすべて後者のモデルによっている。

図4ははりの圧接比をかえたときの応答を示すが、他物体に強く圧接されているほど、衝突振動は急速に終息する。また図5ははりと被衝突体との反発係数を変化させて、はりの応答を求めたものである。反発係数が小さいと多少衝突振動の終息は速いようであるが、この値が0.6以上になると著しい相違は認められない。

図6のようにはりの衝突点の位置をかえてみると、衝突点の応答にかなりの相違が現われてくる。その理由は、衝突によって励起される振動モードの相違によるものが考えられ、片持りの3次モードの節点付近 ($L_c/L=0.50, 0.87\%$) で衝突する場合は3次の振動成分が現われず、これに対して2次モードの節点付近 ($L_c/L=0.70$) で衝突する場合は2次の振動成分が現われない。衝

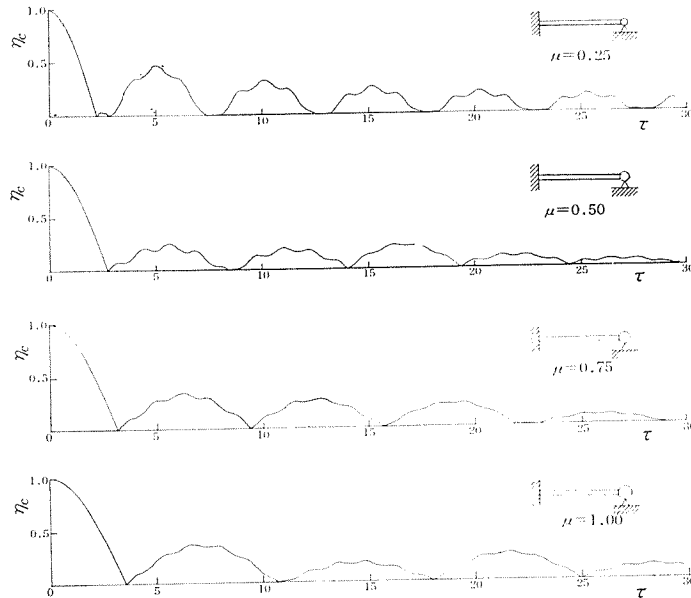


図8 先端に集中質量を有する一様はりの変位 ($\zeta=0.001$; $L_c/L=1$, $\epsilon=0.6$, $\delta=0$)

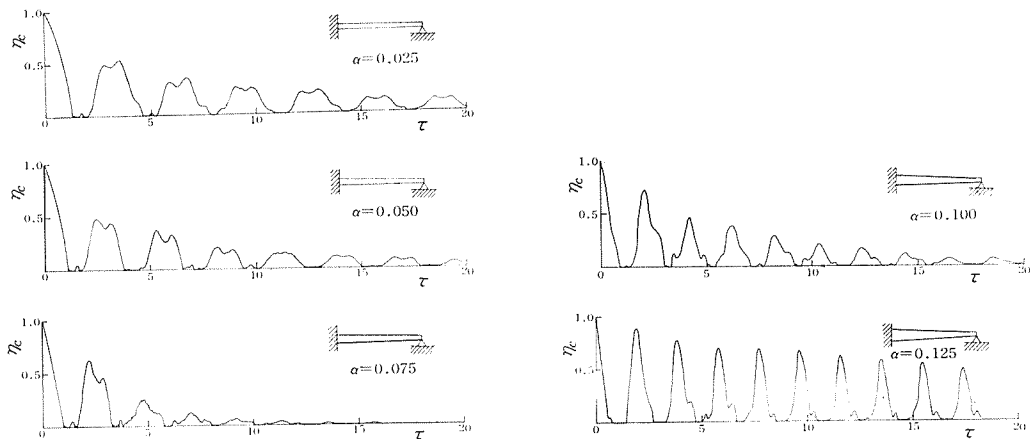


図9 テーバはりの先端変位 ($\mu=0$, $\zeta=0.001$; $L_c/L=1$, $\epsilon=0.6$, $\delta=0$)

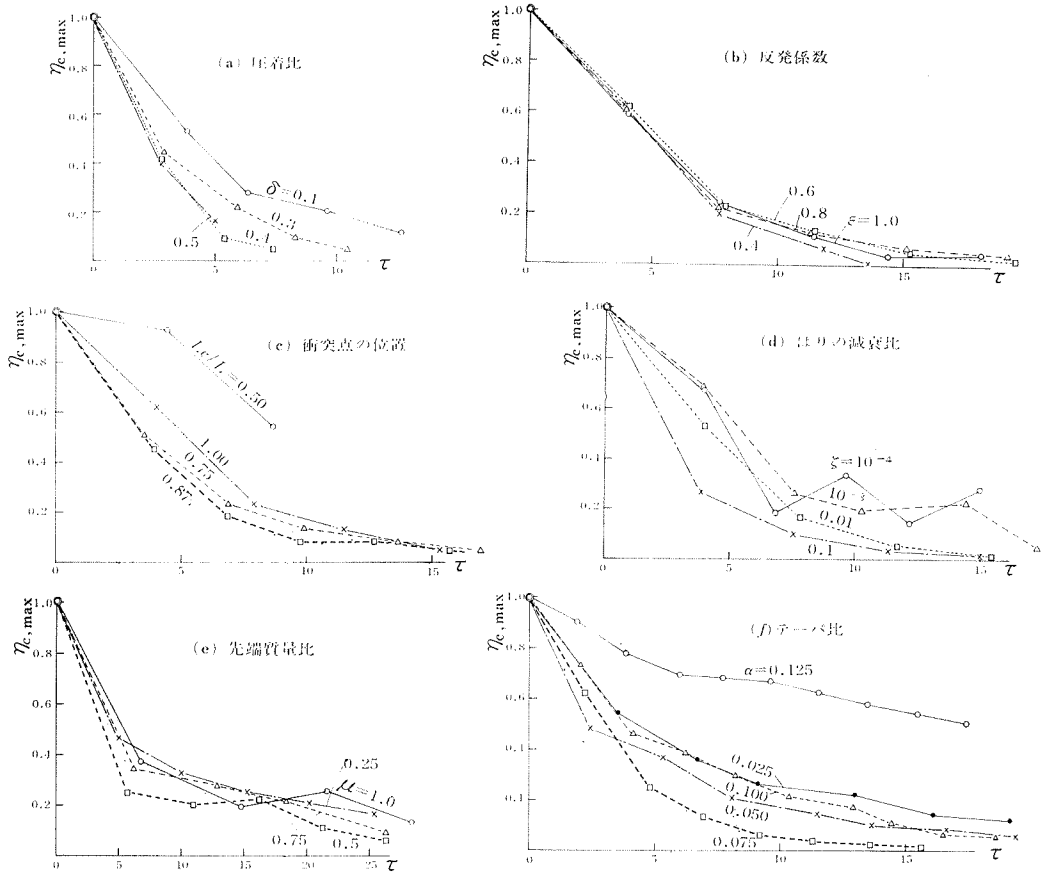


図 10 はりの衝突点における最大変位 ($\mu=0, \zeta=0.001, \alpha=0; L_c/L=1, \varepsilon=0.6, \delta=0$)

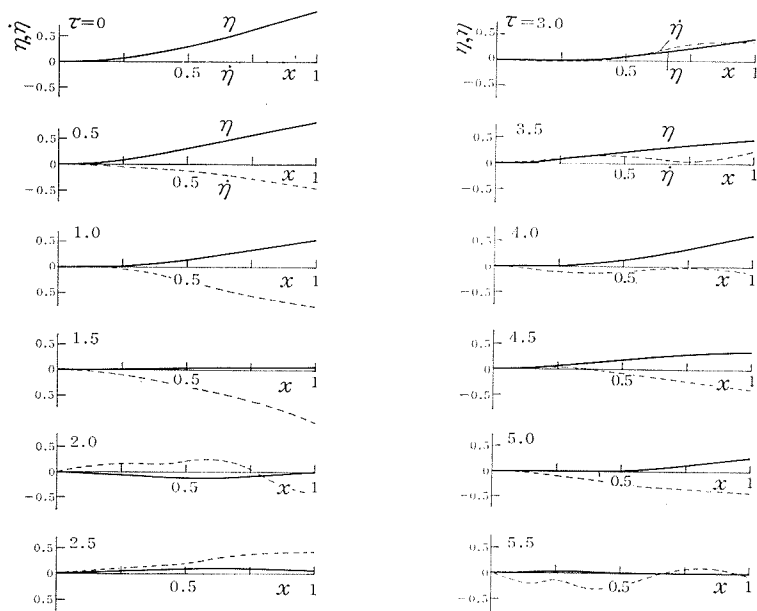


図 11 一様はりの変位と速度分布 ($\zeta=0.001; L_c/L=1, \varepsilon=0.6, \delta=0$)

突振動が終止する時間は衝突位置に大いに関係があり、この例では $L_c/L=0.875$ のとき最も速く運動が終了した。

図7は内部減衰係数を変化させたときの一様はりの応答を示す。当然のことながら、減衰が小さいときは高次振動成分が強く現われ、減衰が大きくなるほど衝突振動は短い時間で終止する。通常の減衰値 ($\zeta=0.01\sim 0.05$ 程度) では、衝突振動の途中で離脱時間の $1/3$ 近くの比較的長い時間にわたってはりが被衝突体に接触する。

図8は先端に集中質量を付加したはりの応答を示す。 $\mu=m/\rho\bar{A}L$ ははりの全質量に対する質量比を表わす。この値が大きいと、はりの高次振動の影響は少なく、1自由度系の衝突振動に近い振動が起こる。この計算例では、 $\mu=0.50$ のとき衝突後の変位が小さくなる傾向を示したが、 μ の大きさにかかわらず振動の終止時間には明らかな相違は認められない。

図9は高さに変化するテーパはりの応答例を示す。はりのテーパが小さいか、あるいは逆に大きいと、衝突振動は比較的長い時間継続する。その理由は、テーパの小さいはりでは、先端付近に分布する質量が大きくて変位が大きくなり得ないことと、テーパの大きいはりでは、先端付近に分布する質量が小さく、そのために衝突に関与する運動エネルギーも小さくて、衝突によるエネルギー損失が大きくなるからであろう。最も速く衝突振動を終了させるためには、適当なテーパ (この例では $\alpha=0.075$) をもたせるのがよいようである。

図10は図4~9に示した各応答曲線のピーク値を結んだものである。これらの点が一つの滑らかな曲線上にないのは高次振動の影響によるものである。この図から、はりと被衝突体の圧接量やはりの内部減衰を大きく、かつ適当な衝突点の位置、先端質量、はりのテーパの大きさを選ぶことによって、衝突振動を短い時間で終らせ得る可能性のあることが認められる。

図11ははりがその先端で衝突する場合の変位と速度分布の時間的变化を示す。衝突前はりは低次の振動モードで振動するが、衝突の直後には高次振動成分が現われてくる。このことは変位曲線より速度曲線を見ると明らかである。

5. 結 論

先端に集中質量を有する変断面はりが他物体と衝突して起こる衝突振動を解析するために、被衝突体をばねとダンパの三要素で構成される力学モデル、および衝突前後の速度の間に反発係数で結ばれる一定の関係をもつ反発モデルで表わし、これとはりの間に起こる衝突振動を有限要素法を用いて解析し、つぎの結論を得た。

- 1) テーパをもつ片持はりの自由振動について、適当な分割法を選ぶことによって、比較的少ない要素でかなり高次振動まで精度の高い固有値を得ることができる。
- 2) 上記二つの衝突モデルのいずれを用いても、はりの応答に著しい差は認められない。
- 3) はりに衝突振動が起こると高次振動成分が現われるが、その影響は内部減衰や先端の集中質量が小さいはりに大きい。
- 4) はりと被衝突体間の反発係数の大きさのいかんにかかわらず、はりの衝突振動にそれほどの相違は現われない。
- 5) 衝突振動を急速に終息させるためには、はりの内部減衰や被衝突体への圧接比を大きくするとともに、適当な衝突点の位置、先端質量、はりの形状を選ぶことが望ましい。

参 考 文 献

- 1) 川井良次, 小寺 忠: 日本機械学会論文集, 35 (昭 44), 274, p. 1233.
- 2) 山田 元, 入江敏博: 日本機械学会講演論文集, (昭 48), No. 730-3, p. 131.
- 3) Mattieu, P.: VDI, (1969), 135, p. 15.
- 4) 高村真夫ほか: 電通研研究実用化報告, 9 (昭 35), 12, p. 1355.
- 5) Kobrinskii, A. E.: Dynamics of Mechanisms with Elastic Connections and Impact Systems, (1969), ILIFFE Books.
- 6) Newmark, J.: Engg. Mech. Div., ASCE, (1959), p. 2094.
- 7) Chan, S. P. et al.: J. Roy. Aeron. Soc., 66 (1962).
- 8) Mabie, H. H. and Rogers, C. B.: J. Acoust. Soc. Amer., 36 (1964), 3, p. 463.