

Title	ランダム入力による衝突振動系の応答:アナログシミュレーション
Author(s)	 入江, 敏博; 山田, 元; 古場田, 芳裕
Citation	北海道大學工學部研究報告, 84, 39-49
Issue Date	1977-07-11
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/41424
Туре	bulletin (article)
File Information	84_39-50.pdf



ランダム入力による衝突振動系の応答

---- アナログシミュレーション ----

入 江 敏 博* 山 田 元* 古場田 芳 裕** (昭和51年12月28日受理)

Dynamic Response of a Vibro-Impact System to Random Force

— Analogue Simulation —

Toshihiro IRIE, Gen YAMADA and Yoshihiro KOBATA (Received December 28, 1976)

Abstract

The impact vibration arising when a mass collides with a rigid wall under the action of a harmonic force has been studied intensively in recent years. However, in the literature only a limited number of papers are available on the impact vibration caused by a random force.

In this paper, a computer simulation was carried out on stationary impact vibration arising in such a vibro-impact system under the action of a random force with stationary Ergodicity and a harmonic force including random components by the use of the hybrid computer HIDAS-2000 consisting of digital and analogue computing systems. From the present study, the following conclusions were obtained. When a random force acts on the system with a small clearance, small collisions arise frequently at short time intervals, but deflections, colliding velocities and time intervals between two adjacent collisions become large with the increase of the clearance. When a harmonic force including random components acts on the system, peak values appear in the vicinity of the frequency and 2, 3, ... and 1/2, 1/3, ... times as many as the frequency of the harmonic force in the powerspectrum density curves. The fact suggests that the fundamental, super- and sub-impact vibrations arise in the system.

1. まえがき

機械や機械構造物は多くの機械要素から構成されているが、これらの要素の間には、多少とも 遊び(すき間)が存在するのが普通である。この種の遊びは機械系に複雑な衝突振動を引き起こ し、そのために機械の性能や精度を劣化させるのみならず、ひいては機械の寿命を縮めるにいた る。一方、パイルドライバー、振動スクリーン、鍛造機械、衝撃ダンパのように、この種の衝突 振動のエネルギーを積極的に利用する機械もある。

従来こういった問題について、衝突振動系を1自由度振動系^{1),2)} あるいは多自由度振動系³⁾ で 表わして、これに加振力が作用するとき起こる衝突振動を研究した論文はかなり多い。しかしこ れらはいずれも入力が調和力の場合に限られており、わずかに Masri がランダム力による衝撃

^{*} 機械工学第二学科 機械力学講座

^{**} 現在はキャノン株式会社

ダンパの応答を論じた研究やがあるに過ぎない。

この問題について,前に著書らは1自由度振動系のディジタルシミュレーションを試みたこと があるが⁵⁰, ランダム入力として完全なガウス分布をもつ白色ノイズを用いることができなかっ た。また振動系の応答計算,記録,信号の変換やパラメータの変更などにはアナログ計算機の方 が効率がよく,データ処理や計算のコントロールのためにはディジタル計算機の方が適している ので,本研究では両者の機構をあわせもつハイブリッド計算機 HIDAS-2000 を用いていっそう 詳しい計算を試みる。

衝突振動の計算法

図1に示すように、こわさ k のばねと減衰系数 c のダンパに支えられた質量 m の物体が、 固定壁と一定の間隔(遊び) d を隔てて静止するか (d > 0)、圧着されて (d < 0)静止している。 この物体にランダム加振力 F(t) が作用するとき、物体の運動はつぎの運動方程式に支配される。

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \tag{1}$$

x は物体の静止平衡位置から壁の方向に測った動的な応答変位を表わすが、物体が静止時壁面に 圧着されているときは、壁を取り去った自由物体の平衡位置から測った変位を表わす。変位、時 間、力などに無次元量 $\xi = x/x_{st}(x_{st} = F_0/k : F_0$ は基準力)、 $\tau = \omega_0 t(\omega_0 = \sqrt{k/m} : 非減衰固有振動数),$ $f(\tau) = F(t)/F_0$ 、減衰比 $\zeta = c/2\sqrt{mk}$ (<1)を用いれば、式 (1) は

$$\ddot{\xi} + 2\zeta\dot{\xi} + \xi = f(\tau) \tag{2}$$

と書ける。ここで記号 は τ に関する微分を表わす。静止時物体が壁面に圧着されているか、遊びがあるかを問わず、加振力がある一定のレベルに達すると図2のように壁面との間に衝突振動が起こる。この図で $\delta = d/x_{st}$ は無次元遊び、 τ_j は衝突時刻、 $z_j = \tau_j - \tau_{j-1}$ はあい隣る二つの衝突間の時間間隔、 $u_{j \neq 0} = \frac{1}{5}(\tau_{j \neq 0})$ は衝突直前と直後の物体の速度を表わす。

ここでは、衝突の際に生じる物体と壁面の変形や衝突時間は、物体の変位や振動周期に比べて きわめて小さく、また衝突直前と直後の速度の間に物体と壁の間の反発係数 。を用いた一定の 関係



41

図3はこの種の振動を計算するためのブロックダイヤグラムを示す。これは応答計算を担当する A ブロック, 判定, 制御のための B ブロックおよびデータ処理のための C ブロックの三つ のブロックから構成される。入力によって起こる物体の運動は A ブロックで演算されるが, 物 体が壁に達すると, B ブロックで衝突の判定がなされ, コンパレータ CP₁ の信号によってサン プルホルダ SH に衝突速度が保持される。そして CP₁ の信号とタイマーからの信号によってプ ログラマーを作動させ, 積分器 IA₁ をリセットする。プログラマーで指定された時間が経過し たのち, 再び IA₁ を作動させて演算を続行する。入力と物体の変位, 速度は必要に応じてそれ ぞれディジタル部 C に送られて記録され, 処理される。

3. ランダム入力による定常衝突振動

上記の方法によって計算した定常エルゴード的なランダム入力による振動系の定常応答を以下 に示す。図4は系に作用する入力と、これによる物体の変位および速度の計算例を示す。この場 合の入力にはアナログ部が内蔵する雑音発生器が発生するランダム波を利用している。厳密に考 えれば、積分器がリセットされている間に入力は変化するが、この計算過程のリセットタイムは 8~9 msec で、系の固有周期 2π sec に比べてきわめて小さく、物体の運動に対するその影響(運 動の誤差) は大きいものではない。

図5は入力のエルゴード性を仮定して,その自己共分散

$$C_{ff}(\tau^*) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \{f(\tau) - \bar{f}\} \{\bar{f}(\tau + \tau^*) - \bar{f}\} d\tau$$
(4)

を求めたものである。ここで

$$\bar{f} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) d\tau$$
(5)

は入力の平均値を表わす。f=0のときは、 $C_{ff}(r^*)$ は入力の自己相関関数と一致する。図6は入力のパワスペクトル密度

$$S_f(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \{C_{ff}(\tau^*) + \bar{f}^2\} e^{-j\beta\tau^*} d\tau^* \qquad (\beta = \omega/\omega_0)$$
(6)



3









図7 入力の確率密度 ((rms)_f=σ_f=0.32)



図10 応答変位の確率密度 (S=0.01; (rms)f=0.32)





を示し,図7は確率密度 p(f)を示す。これらの曲線から、ここで用いた入力はほぼガウス分布 を有する白色ノイズに近いものであることがわかる。これらの図に記した (rms) / と σ / は, そ れぞれ入力の rms 値と標準偏差を表わす。

図8に変位の自己共分散 C_{tt}(で*) を示す。これから物体の壁の間に遊びがないか、遊びがあっ ても小さいときは、壁面のごく付近で小さい非周期的衝突振動が頻繁に起こるにすぎないが、遊 びが大きくなるにつれて振幅は大きくなり、かつ周期的な振動が起こることがわかる。このこと は応答変位のパワスペクトル密度 $S_{\epsilon}(\beta)$ を描いた図 9 (a) をみても明らかである。この傾向は, 振動系の減衰の大きさによってもかわらないが,減衰の大きい系では全体に振動レベルは低下す る。また同図 (b) からわかるように,かなり遊びが小さい系では,物体と壁面間の反発係数が大 きくなるにしたがって、周期が短い(β の大きい)衝突振動が起こるが、遊びがある程度大きく なると反発係数の大きさにかかわらず、振動の周期はほぼ一定の値をもつことがわかる。

図 10 は壁面から測った物体の変位 $\eta = \delta - \xi$ の確率密度を示す。同図 (a) から、遊びが小さい ときは壁面の付近で物体が振動するのに対し、 遊びが大きくなるにつれて物体の振幅も大きく ž なるが、遊びがいっそう大きくなると物体が壁 σ_u^n 面と衝突する回数も少なくなって, 一定のガウ 0.4 ス分布を有する非衝突振動に移行する。遊びが 小さい系に起こる衝突振動については、 同図 ガウス分布 0.2 (b) に示すように、反発係数の大きさは物体変

位に大きい影響はもたないようである。 図 11 は衝突時間間隔の確率密度を示す。 図

(a) のように、遊びが大きくなるにしたがって 時間間隔は多少大きくなり,密度曲線に鋭いピ



ーク値が現われるとともに、その時間間隔の約2倍、3倍の時間間隔をもつ位置にも小さいピー ク値が現われる。これは、ランダム入力による定常衝突振動においても、ほぼ一定の衝突周期期 とその整数倍の周期を持つ衝突振動が存在し得ることを示唆している。また同図 (b) に示すよう に、一定の遊びを有する振動系において、反発係数が大きくなるにしたがって時間間隔はいくら か小さくなる傾向をもつ。

図 12 は衝突速度の確率密度を示す。 同図(a)より、遊びが大きくなるにつれて速度は広い範 囲に分布し、かなり大きい速度に達することもあり得る。しかし衝突速度の大きさは、図(b)に みるように反発係数の値によって著しい影響を受けるものではない。図13に示すように、この 確率密度は、遊びの大きさにかかわらず、おおむねガウス分布に近いものとみてさしつかえない と思われる。

ランダム成分を含む調和入力による定常応答 4.

つぎに、定常エルゴード性を有するランダム入力を含む調和入力 $f(\tau) = \sin \nu \tau + r(\tau)$ による系 の応答を考える。

図14 はこの種入力とこれによる物体の応答変位と速度に関する計算例を示す。物体の変 位 が 遊びに等しくなったとき衝突が起こり、その結果急激な速度変動がひき起こされる。

図 15 は入力の自己共分散の計算例を示す。 この場合, 用いた入力のランダム成分は大きくな いので、 その関数の値は調和入力のそれとあまりかわらない。 図16 はこの入力のパワスペクト







ル密度を示す。調和入力では、β=νの位置に単に一つの線スペクトルが現われるにすぎないが、 ランダム成分によってこの点付近にパワスペクトル密度が分布する。

図 17 のおのおのの図は、それぞれ変位の自己共分散 Ctt(で*) および入力の相互共分散

$$C_{f\xi}(\tau^*) = \lim_{T \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} \{ f(\tau) - \bar{f}(\tau) \} \{ \xi(\tau + \tau^*) - \bar{\xi}(\tau) \} d\tau$$
(7)

を示す。分散関数でみる限り、遊びの大小にかかわらず、これらの値はいずれも単なる調和入力 のみによる結果と大きい差を示さない。

図18は応答変位のパワスペクトル密度を示す。入力の調和成分の振動数 ν とその整数倍の振動数 2ν, 3ν のごく近くにピーク値が現われ、また遊びが大きくなるにつれて運動の振幅が増す ので、当然パワのレベルも大きくなる。ランダム成分を含まない場合には、前に筆者の一人が指摘したように⁶⁰、1 サイクルの調和入力が作用する間に1回衝突するいわゆる基本 (1/1) 衝突振動と、この間に 2、3、…回衝突するいわゆる高次 (2/1、3/1、…) 衝突振動が存在するため、 ν, 2ν, 3ν、…の位置に線スペクトルが現われる。しかしこの場合は、ランダム成分が存在するために、 この近傍に変位のパワスペクトル密度が分布することとなる。

図19は、調和入力の周期 $z=2\pi/\nu$ に対する衝突時間間隔比 z_j/z を示す。遊びが大きい系では、調和入力の周期に等しい時間間隔で衝突振動が起こるが、遊び小さくなると1 周期の調和入力が働く間に2回の衝突を伴う振動が起こるために、 $z_j/z < 1$ の範囲において $z_j^{(1)}/z$ および $z_j^{(2)}/z$ に二つのピークが現われる。そしてこの場合、 $z_j^{(1)} + z_j^{(2)} = z$ である。これらの図に現われていないが、基本衝突振動、高次衝突振動以外に、調和入力の2,3,... 周期の間に1回衝突する分数(1/2,1/3,...) 衝突振動も存在する。このことはのちに触れることとする。

図 20 は衝突速度の確率密度を示す。大きい遊びを有する系では、速度分布は一つのピーク値 をもつのに対し、遊びが小さくなると、速度に二つのピークが現われてくる。このように調和入 力のみが作用する定常衝突振動では、系のパラメータによってきまる一定の衝突時間間隔、衝突 速度の値をもつに対し、ランダム入力の影響のため一定値をもたないで、これらの値の付近であ



図21 衝突振動が起こる確率 ($\zeta = 0.05$, $\varepsilon = 0.5$; sin $\nu \tau + r(\tau)$, (rms)r=0.26)

る幅をもつこととなる。

図 21 のおのおのの図は、上記の入力が作用した場合に (a) 基本 (1/1) 衝突振動, (b) 高次 (2/1) 衝突振動と分数 (1/2) 衝突振動が起こる確率を、振動数一遊び平面上に描いたものである。この 確率を計算するに当っては、 衝突回数が 250 回におよぶ振動の衝突時間間隔のうち、(1/1) 振動 では *z*_j/*z*-1, (2/1) 振動では (*z*⁽¹⁾+*z*⁽²⁾)/*z*-1, (1/2) 振動では *z*_j/2*z*-1 (*z*=2*π*/*ν*) がいずれも ±1.5%以内に入ったものの回数をカウントして求めている。この図とつぎの図 22 において, 曲線 の形状を見易くするために横軸に振動数の逆数を用いている。これらの図の曲線はすべて各形の 衝突振動が起こる確率の等高線を示し,各曲線に記載された数字は確率の値を%で表わしている。 基本衝突振動は、非衝突振動系の固有振動数を含む広い範囲にわたってかなり高い確率で発生



図22 周期的な衝突振動が起こる振動数と遊びの範囲 (ζ=0.05, ε=0.5; sinvτ)

する。これに対し、(2/1) 衝突振動は遊びが小さく、調和入力の振動数が低い(1/ν が大きい) 範 囲で起こる。また(1/2) 衝突振動は、遊びが小さいと、振動数が高い(1/ν が小さい) 場合に起 こるが、遊びが大きくなると振動数の低いときにも起こりうる。高い振動数において、一見(1/2) 衝突振動が狭い範囲でしか起こらないようにみえるのは、横軸に 1/ν をとったためこの領域が圧 縮されているからである。図21の二つの図を互いに重ね合わせると、遊びの大きさや、振動数 が変わるにしたがって、一つの形の衝突振動が、他の形のものに移行すること、およびこれらの 境界付近において二つの形の振動が一定の確率をもって同時に起こり得ることが認められる。

図 22 の太い実線に囲まれた領域は、 ランダム成分を含まない (r(τ)=0) 調和入力によって、 安定で周期的な衝突振動が起こる振動数と遊びの範囲を示す^{5),6)}。この太線の外部では、周期解 がないか, 条件 $u_{j=0} > 0$ や $\xi_j(\mathbf{r}) \ge 0$ が満足されないか, あるいは周期的な衝突振動が起こり 得ても,安定な衝突振動が持続し得ない。太線内の各曲線は運動の安定性の度合い

 $S = 100(1 - \lambda) \qquad (\%)$

を示す等高線を示す。

図 21 と図 22 の各振動形に対応する図を重ね合わせることによって、概して安定度の高い振動 数と遊びをもつ系においては、各形の衝突振動が高い確率で起こることがわかる。またランダム 成分が大きくなると、当然衝突振動の起こる確率は低下する。

5. 結 論

定常エルゴード性をもった白色ランダム入力,およびランダム成分を含む調和的な入力が,遊びを有する1自由度振動系に作用した場合,この系に起こる定常な衝突振動のアナログシミュレ ーションを実施し,その結果つぎの結論を得た。

(1) ランダム入力が作用する場合,遊びが大きい系では定常衝突振動の周期は長く,物体の応答変位も一般に大きい。

(2) 遊びが大きくて、衝突が起こりにくい系では、応答変位の確率密度はガウス分布に近いが、遊びが小さくなるにしたがって、衝突回数が増し、その結果ガウス分布とは異なった密度曲線を示すにいたる。

(3) 衝突時間間隔, 衝突速度とも, 遊びが大きくなるにしたがって増加するが, 衝突速度は遊びの大きさにかかわらず, ほぼガウス分布に近い値をもつ。

(4) ランダム成分を含む調和入力が作用する場合,遊びが著しく大きくない系では,応答変位のパワスペクトル密度は調和成分のもつ振動数とその整数倍の振動数の付近において一定のピーク値をもつ。

(5) かくしてランダム成分を含む調和入力の作用によって、振動系には基本衝突振動以外に、 高次あるいは分数衝突振動が起こり得る。いずれの形の振動が起こりやすいかは、すべて遊びの 大きさと入力の調和成分の振動数による。

(6) 調和的な入力が作用する場合に高い安定度で周期的な衝突振動が起こる振動系では、ラン ダム成分が含まれていても、高い確率で定常な衝突振動が起こる。しかし当然のことながら、ラ ンダム成分が大きくなるにつれてその値は低下する。

本研究の計算に当って、北海道大学汎用シミュレータ室の HIDAS-2000 を利用させて頂いた ことを付記して謝意を表する。

文 献

- 1) Senator, M., J. Acoust. Soc. Amer., 47 (1970), 5, p. 1390.
- Kobrinskii, A. E., Dynamics of Mechanisms with Elastic Connections and Impact Systems (1969), ILIFFE Books Co. .
- 3) Fu, C. C. and Paul, B., Int.J. Solids & Struct., 4 (1968), p. 897.
- 4) Masri, S. F. and Ibrahim, A. M., J. Acoust. Soc. Amer., 53 (1973), 1, p. 200.
- 5) 入江ほか2名,北海道大学工学部研究報告,第72号(昭49), p. 13.
- 6) 深谷,入江,北海道大学工学部研究報告,第58号(昭45), p. 75.