



Title	変形法によるはり及び矩形板の動的安定解析について
Author(s)	三上, 隆; 芳村, 仁
Citation	北海道大學工學部研究報告, 85, 1-13
Issue Date	1977-09-16
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/41434">http://hdl.handle.net/2115/41434</a>
Type	bulletin (article)
File Information	85_1-14.pdf



[Instructions for use](#)

# 変形法によるはり及び矩形板の 動的安定解析について

三上 隆\* 芳村 仁\*

(昭和 52 年 3 月 31 日受理)

## Analysis of Dynamic Stability of Beams and Plates by Stiffness Method

Takashi MIKAMI Jin YOSHIMURA

(Received March 31, 1977)

### Abstract

A study is made on the parametric stability of beams under axial loads and rectangular plates subjected to periodic in-plan loads. In this paper, the stiffness matrix method is applied for the parametric stability problems of beams and plates of arbitrary support conditions, namely, the finite element method for beams and the finite strip method for plates are developed.

Using this method, the regions of dynamic instability of beams and plates with various boundary conditions are determined, and effects of damping force on the instability region are revealed.

### 1. 序 論

直線はり，矩形板が周期性荷重を受ける場合，荷重の振幅が静的座屈荷重より低くても，荷重の周期と，横振動の固有振動数との比がある特定値をとるときは，本来の縦振動に加えて横振動を生じ，その振動の振幅は時間と共に増加するという一種の動的不安定現象すなわち係数励振振動となることは，既によく知られており，理論的実験的研究が多くなされておる<sup>1)~4)</sup>。

係数励振不安定問題において，例えば，周期力を受ける両端単純支持されたはりにおいて，はりの  $p$  次モードの固有振動数  $\omega_p$ ，励振振動数を  $\theta$  とすると， $\theta = 2\omega_p/k$  ( $p, k = 1, 2, \dots$ ) なる励振の近傍において係数励振振動が発生する。

本報告では，一般的な境界条件に対し解析するため，連続体の力学を適用しにくい，任意形状の構造を比較的容易に取扱うことができ，支持条件も簡単に組み入れることのできる変形法を用いる。すなわち，

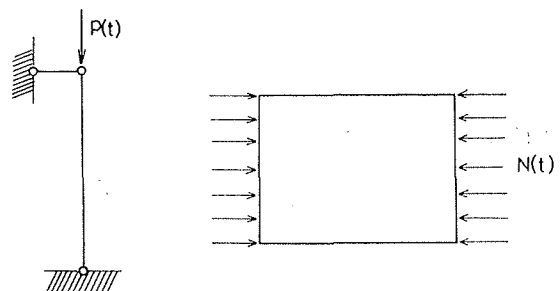


図-1

\* 土木工学科構造力学講座

立体骨組構造系，板構造系の基本的な構成要素である，任意支持条件のほり，矩形板を前者は有限要素法 (FEM)，後者は有限帯板法 (FSM) により，係数励振不安定振動を解析し，(1) 両端ヒンジのほり，四辺単純支持の矩形板の主および第 2 不安定領域の境界値 ( $\theta/2\omega_p$ ) を，既往研究結果と比較検討し，本解析法の有効性を検討し，(2) 任意支持のほり，矩形板の不安定領域を求め，支持条件，減衰のそれに与える影響を検討することである。

## 2. 運動方程式

### 2.1 はり要素の運動方程式

はり部材を，長さ方向に分割し，長さ  $l$  の要素を，はり要素と考えその要素に関する座標系を図-2に示す。 $x=0$ ， $x=l$  が連続している次の要素との節点であり，それぞれ， $i$  節点， $j$  節点と名付ける。

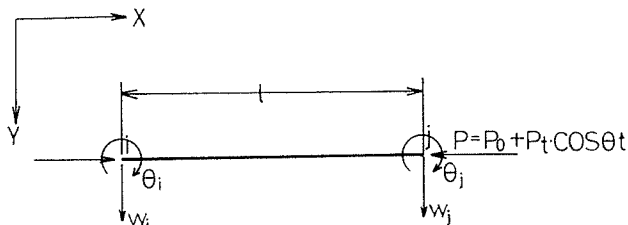


図-2 はり要素

変位関数  $W$  として，位置の関数  $w(x)$  と時間の関数  $q(t)$  の積で表わされるとする。

$$W = w(x)q(t) \quad (1)$$

ここで， $w(x)$  として次の三次多項式を用いる。

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (2)$$

$a_0 \cdots a_3$  を節点  $i$ ， $j$  での節点変位成分で表示すると，式(2)は

$$w(x) = \mathbf{H}\{\mathbf{r}\} \quad (3)$$

となる。ここで

$$\mathbf{H} = \left[ \left( 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \right), \left( x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right), \left( \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \right), \left( -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) \right] \quad (4)$$

$$\mathbf{r} = \{w_i, \theta_i, w_j, \theta_j\}^t \quad (5)$$

従って，式(1)は

$$W = \mathbf{H}\{\mathbf{r}q(t)\} \quad (6)$$

となる。

次に，軸方向力  $P$  を受ける，はり要素の運動エネルギー ( $T$ )，ポテンシャルエネルギー ( $U$ )，と減衰による逸散エネルギー ( $F$ ) を求めてみよう。

運動エネルギー  $T$  は，

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\gamma A}{g} \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx \quad (7)$$

となる。ここで， $g$ ：重力加速度， $A$ ：断面積， $\gamma$ ：単位体積当り重量である。

式(6)より，式(7)は

$$T = \frac{1}{2} \{\mathbf{r}\dot{q}\}^t \int_0^l \mathbf{H}^t \frac{\gamma A}{g} \mathbf{H} dx \{\mathbf{r}\dot{q}\} \quad (8)$$

となる。ここで， $\dot{\cdot}$ ：時間に関する微分である。

ポテンシャルエネルギー  $U$  は

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l P \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx \quad (9)$$

ここで,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \mathbf{B}\{\mathbf{r}q(t)\}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \mathbf{G}\{\mathbf{r}q(t)\} \quad \text{とおくと}$$

$$U = \frac{1}{2} \{\mathbf{r}q\}' \int_0^l \mathbf{B}' EI \mathbf{B} dx \{\mathbf{r}q\} - \frac{1}{2} \{\mathbf{r}q\}' \int_0^l \mathbf{G}' P \mathbf{G} dx \{\mathbf{r}q\} \quad (10)$$

となる。ここで,  $EI$ : 曲げ剛性

$$\mathbf{B} = \left[ \left( -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} \right), \left( -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} \right), \left( \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right), \left( -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \right) \right] \quad (11)$$

$$\mathbf{G} = \left[ \left( -\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3} \right), \left( 1 - \frac{4x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} \right), \left( \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} \right), \left( -\frac{2x}{l} + \frac{3x^2}{l^2} \right) \right] \quad (12)$$

又, 逸散エネルギー  $F$  として, 粘性減衰を考えると,

$$F = \frac{1}{2} \int_0^l c \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx \quad (13)$$

となる。ここで,  $c$ : 定数である。式(6)より逸散エネルギー  $F$  は

$$F = \frac{1}{2} \{\mathbf{r}\dot{q}\}' \int_0^l \mathbf{H}' c \mathbf{H} dx \{\mathbf{r}\dot{q}\} \quad (14)$$

となる。

はり要素の運動方程式は, Lagrange の運動方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial (\mathbf{r}\dot{q})} \right) - \frac{\partial (T-U)}{\partial (\mathbf{r}q)} + \frac{\partial F}{\partial (\mathbf{r}q)} = 0 \quad (15)$$

より求められる。式(15)に式(8), (10), (14)を代入すると, 運動方程式は

$$\mathbf{M}\{\mathbf{r}\ddot{q}\} + \mathbf{C}\{\mathbf{r}\dot{q}\} + (\mathbf{K}_E - \mathbf{K}_G)\{\mathbf{r}q\} = 0 \quad (16)$$

となる。ここで, マトリックス  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}_E$ ,  $\mathbf{K}_G$  は, それぞれ, 質量マトリックス, 減衰マトリックス, 初期弾性剛性マトリックス, 幾何学的剛性マトリックスで, 式(17)~式(20)より求められる。

$$\mathbf{M} = \int_0^l \mathbf{H}' \frac{\gamma A}{g} \mathbf{H} dx \quad (17)$$

$$\mathbf{C} = \int_0^l \mathbf{H}' c \mathbf{H} dx \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_E = \int_0^l \mathbf{B}' EI \mathbf{B} dx \quad (19)$$

$$\mathbf{K}_G = \int_0^l \mathbf{G}' P \mathbf{G} dx \quad (20)$$

断面一定とすると,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}_E$ ,  $\mathbf{K}_G$  の内容は以下に示す通りである。

$$\mathbf{M} = \frac{\gamma A}{g} \begin{pmatrix} \frac{13l}{35} & \frac{11l^2}{210} & \frac{9l}{70} & -\frac{13l^2}{420} \\ & \frac{l^3}{105} & \frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} \\ & & \frac{13l}{35} & -\frac{11l^2}{210} \\ \text{Symm.} & & & \frac{l^3}{105} \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{K}_E = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \text{Symm.} & & & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$\mathbf{K}_G = P \begin{pmatrix} \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ & \frac{2l}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ & & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ \text{Symm.} & & & \frac{2l}{15} \end{pmatrix} \quad (23)$$

減衰マトリックス  $\mathbf{C}$  は式 (21) において,  $\dot{r}A/g$  を  $c$  と置きかえることによって得られる。  
ここで, 幾何学的剛性マトリックスを

$$\mathbf{K}_G = P\mathbf{S}_G \quad (24)$$

とおき, 軸方向力を非周期成分と周期成分とに分け, 次の式で表わす。

$$P = P_0 + P_t \cos \theta t = aP_i^* + bP_i^* \cos \theta t \quad (25)$$

ここで,  $a, b$ : 一定な乗数,  $\theta$ : 軸方向力の振動数,  $P_0 = aP_i^*$ ,  $P_t = bP_i^*$  である。  
また,  $P_i^*$  は,  $i$  番目の座屈荷重で, 式 (16) より, 次の式より求められる。

$$|\mathbf{K}_E - \mathbf{K}_G| = 0 \quad (26)$$

よって, はり要素の運動方程式は, 式 (16), (24), 及び式 (25) より,

$$\mathbf{M}\{\mathbf{r}\ddot{q}\} + \mathbf{C}\{\mathbf{r}\dot{q}\} + (\mathbf{K}_E - aP_i^*\mathbf{S}_G - bP_i^*\mathbf{S}_G \cos \theta t)\{\mathbf{r}q\} = 0 \quad (27)$$

となる。

もし, 弾性バネ (任意の点の反力はたわみに比例する) で支持されたはりでは, バネの反力によってなされる仕事  $\bar{W}$  は, バネ反力係数を  $\beta_s$  とすると,

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \int_0^l \beta_s \cdot W^2 dx \quad (28)$$

と表わされ, 方程式 (27) の左辺に, 次の項

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial (\mathbf{r}q)} = \mathbf{K}_s \{\mathbf{r}q\} \quad (29)$$

が加わる。よって, 弾性バネで支持されたはりの運動方程式は,

$$\mathbf{M}\{\mathbf{r}\ddot{q}\} + \mathbf{C}\{\mathbf{r}\dot{q}\} + (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_s - aP_i^*\mathbf{S}_G - bP_i^*\mathbf{S}_G \cos \theta t)\{\mathbf{r}q\} = 0 \quad (30)$$

となる。ここで, マトリックス  $\mathbf{K}_s$  は弾性バネによる剛性マトリックスで,

$$\mathbf{K}_s = \int_0^l \mathbf{H}' \beta_s \mathbf{H} dx \quad (31)$$

となり,  $\mathbf{K}_s$  の内容は, 質量マトリックス  $\mathbf{M}$ , 式 (21) において,  $\dot{r}A/g$  を  $\beta_s$  とすることにより得られる。

## 2.2 平板要素の運動方程式

平板構造の断面を構成する，平板要素の幅方向を分割し，その一つの幅を  $b$ ，長さ  $l$  とし， $b \times l$  を一つの帯板要素と考え，その要素に関する座標系を図-3 に示す。 $y=0$ ， $y=b$  が連続している次の要素との接合線であり，それぞれ， $i$  辺， $j$  辺と名付ける。

変位関数  $W$  として，はり要素と同様に，位置のみの関数  $w(x, y)$  と時間の関数  $q(t)$  の積で，

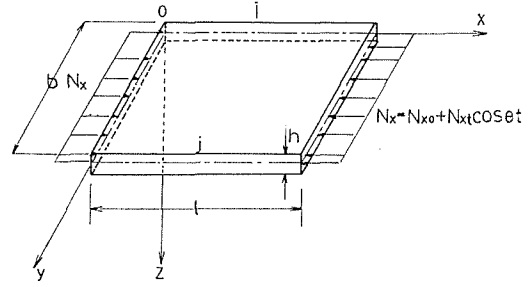


図-3 平板要素

$$W = w(x, y) q(t) \quad (32)$$

と表わされるとする。ここで， $w(x, y)$  として， $x$  方向に半波の正弦波形， $y$  方向に三次多項式を用いると，

$$w(x, y) = \mathbf{H} \{ \mathbf{r} \} \quad (33)$$

となる。ここで，

$$\mathbf{H} = \left[ \left( 1 - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2y^3}{b^3} \right), \left( y - \frac{2y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2} \right), \left( \frac{3y^2}{b^2} - \frac{2y^3}{b^3} \right), \left( -\frac{y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2} \right) \right] \sin \frac{\pi x}{l} \quad (34)$$

$$\mathbf{r} = \{ w_i, \theta_i, w_j, \theta_j \}^t \quad (35)$$

従って，式(33)は

$$W = \mathbf{H} \{ \mathbf{r} q \} \quad (36)$$

となる。

平板要素の曲率は，

$$\{ \kappa \} = \left\{ -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right\}^t = \mathbf{B} \{ \mathbf{r} q \} \quad (37)$$

と表わせる。

また，断面力は等方性材料を仮定すると，

$$\{ M_o \} = \mathbf{D} \{ \kappa \} = \mathbf{D} \mathbf{B} \{ \mathbf{r} q \} \quad (38)$$

となる。ここで， $\{ M_o \} = \{ M_x, M_y, M_{xy} \}^t$  である。

式(37)，(38)における，マトリックス  $\mathbf{B}$ ， $\mathbf{D}$  は

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{l^2} \left( 1 - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2y^3}{b^3} \right) S_x & \frac{\pi^2}{l^2} \left( y - \frac{2y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2} \right) S_x \\ \left( \frac{6}{b^2} - \frac{12y}{b^3} \right) S_x & \left( \frac{4}{b} - \frac{6y}{b^2} \right) S_x \\ \frac{2\pi}{l} \left( -\frac{6y}{b^2} + \frac{6y^2}{b^3} \right) C_x & \frac{2\pi}{l} \left( 1 - \frac{4y}{b} + \frac{3y^2}{b^2} \right) C_x \\ \frac{\pi^2}{l^2} \left( \frac{3y^2}{b^2} - \frac{2y^3}{b^3} \right) S_x & \frac{\pi^2}{l^2} \left( -\frac{y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2} \right) S_x \\ \left( -\frac{6}{b^2} + \frac{12y}{b^3} \right) S_x & \left( \frac{2}{b} - \frac{6y}{b^2} \right) S_x \\ \frac{2\pi}{l} \left( \frac{6y}{b^2} - \frac{6y^2}{b^3} \right) C_x & \frac{2\pi}{l} \left( -\frac{2y}{b} + \frac{3y^2}{b^2} \right) C_x \end{bmatrix} \quad (39)$$

ここで,  $S_x = \sin(\pi x/l)$ ,  $C_x = \cos(\pi x/l)$  である。

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & D_1 & 0 \\ D_1 & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D \end{pmatrix} \quad (40)$$

ここで,  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ,  $D_1 = \nu D$ ,  $E$ : 弾性係数,  $h$ : 板厚,  $\nu$ : ポアソン比である。

次に, 図-3 に示す, 一様に分布する面内力  $N_x$  を受ける帯板要素の運動エネルギー, ポテンシャルエネルギー, 減衰による逸散エネルギーを求める。運動エネルギー ( $T$ ) は,

$$T = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^l \frac{\gamma h}{g} \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (41)$$

となる。式(41)に式(36)を代入すると, 運動エネルギー ( $T$ ) は

$$T = \frac{1}{2} \{\mathbf{r}\dot{q}\}^t \int_0^b \int_0^l \mathbf{H}^t \frac{\gamma h}{g} \mathbf{H} dx dy \{\mathbf{r}q\} \quad (42)$$

となる。又, ポテンシャルエネルギー ( $U$ ) は

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^l \{M_b\}^t \{x\} dx dy - \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^l h N_x \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (43)$$

と表わされる。ここで,  $\partial W/\partial x = \mathbf{G}\{\mathbf{r}q\}$  とし, 式(37), (38) より

$$U = \frac{1}{2} \{\mathbf{r}q\}^t \int_0^b \int_0^l \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \{\mathbf{r}q\} - \frac{1}{2} \{\mathbf{r}q\}^t \int_0^b \int_0^l \mathbf{G}^t h N_x \mathbf{G} dx dy \{\mathbf{r}q\} \quad (44)$$

となる。ここで

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{l} \left( 1 - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2y^3}{b^3} \right) C_x & \frac{\pi}{l} \left( y - \frac{2y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2} \right) C_x \\ \frac{\pi}{l} \left( \frac{3y^2}{b^2} - \frac{2y^3}{b^3} \right) C_x & \frac{\pi}{l} \left( -\frac{y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2} \right) C_x \end{bmatrix} \quad (45)$$

である。逸散エネルギー  $F$  は粘性減衰を考えると

$$F = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^l c \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dx dy \quad (46)$$

となり, 式(36)より  $F$  は,

$$F = \frac{1}{2} \{\mathbf{r}\dot{q}\}^t \int_0^b \int_0^l \mathbf{H}^t c \mathbf{H} dx dy \{\mathbf{r}q\} \quad (47)$$

となる。ここで,  $c$ : 定数である。

平板要素についての運動方程式は, はり要素と同様に, 式(15)より

$$\mathbf{M}\{\mathbf{r}\ddot{q}\} + \mathbf{C}\{\mathbf{r}\dot{q}\} + (\mathbf{K}_E - \mathbf{K}_G)\{\mathbf{r}q\} = 0 \quad (48)$$

となる。マトリックス  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}_E$ ,  $\mathbf{K}_G$  はそれぞれ, 質量マトリックス, 減衰マトリックス, 初期弾性剛性マトリックス, 幾何学的剛性マトリックスで,

$$\mathbf{M} = \int_0^b \int_0^l \mathbf{H}^t \frac{\gamma h}{g} \mathbf{H} dx dy \quad (49)$$

$$\mathbf{C} = \int_0^b \int_0^l \mathbf{H}^t c \mathbf{H} dx dy \quad (50)$$

$$\mathbf{K}_E = \int_0^b \int_0^l \mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \quad (51)$$

$$\mathbf{K}_G = \int_0^b \int_0^l \mathbf{G}' h N_x \mathbf{G} dx dy \quad (52)$$

と表わされる。ここで、はり要素と同様に、面内力を非周期成分と周期成分とに分け次の様に表わす。

$$N_x = N_{x0} + N_{xt} \cos \theta t = aN_{xi}^* + bN_{xi}^* \cos \theta t \quad (53)$$

ここで、 $a, b$ : 一定乗数,  $\theta$ : 面内力の振動数,  $N_{x0} = aN_{xi}^*$ ,  $N_{xt} = bN_{xi}^*$  である。 $N_{xi}^*$  は  $i$  番目の座屈荷重で、式(48)より、 $\mathbf{M} = 0$ ,  $\mathbf{C} = 0$  とし

$$|\mathbf{K}_E - \mathbf{K}_G| = 0 \quad (54)$$

より得られる。

よって、平板要素の運動方程式は、

$$\mathbf{K}_G = N_x \mathbf{S}_G \quad (55)$$

とおき、式(48), (53), (55)より

$$\mathbf{M}\{\mathbf{r}\ddot{q}\} + \mathbf{C}\{\mathbf{r}\dot{q}\} + (\mathbf{K}_E - aN_{xi}^* \mathbf{S}_G - bN_{xi}^* \mathbf{S}_G \cos \theta t)\{\mathbf{r}q\} = 0 \quad (56)$$

と、はり要素と同様な運動方程式が得られる。

もし、弾性バネ(任意点の反力はたわみに比例する)で支持された平板要素では、バネ反力によってなされる仕事  $\bar{W}$  は、バネ反力係数を  $\beta_s$  とすると、

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^l \beta_s W^2 dx dy \quad (57)$$

となり、式(36)を式(57)に代入すると、 $\bar{W}$  は

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \{\mathbf{r}q\}' \int_0^b \int_0^l \mathbf{H}' \beta_s \mathbf{H} dx dy \{\mathbf{r}q\} \quad (58)$$

と表わせ、方程式(56)の左辺に、次の項

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial (\mathbf{r}q)} = \mathbf{K}_s \{\mathbf{r}q\} \quad (59)$$

が加わる。結局、弾性バネで支持された平板の運動方程式は

$$\mathbf{M}\{\mathbf{r}\ddot{q}\} + \mathbf{C}\{\mathbf{r}\dot{q}\} + (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_s - aN_{xi}^* \mathbf{S}_G - bN_{xi}^* \mathbf{S}_G \cos \theta t)\{\mathbf{r}q\} = 0 \quad (60)$$

となる。ここで、 $\mathbf{K}_s$  は弾性バネによる剛性マトリックスで、

$$\mathbf{K}_s = \int_0^b \int_0^l \mathbf{H}' \beta_s \mathbf{H} dx dy \quad (61)$$

である。

ここで、板厚  $h$  を一定として、マトリックス  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{K}_E$ ,  $\mathbf{K}_G$  の内容を以下に示す。

$$\mathbf{M} = \frac{\gamma h l}{2g} \begin{pmatrix} \frac{13b}{35} & \frac{11b^2}{210} & \frac{9b}{70} & -\frac{13b^2}{420} \\ & \frac{b^3}{105} & \frac{13b^2}{420} & -\frac{b^3}{140} \\ & & \frac{13b}{35} & -\frac{11b^2}{210} \\ \text{Symm.} & & & \frac{b^3}{105} \end{pmatrix} \quad (62)$$



$$\mathbf{K}_G = \frac{h\pi^2 N_x}{2l} \begin{pmatrix} \frac{13b}{35} & \frac{11b^2}{210} & \frac{9b}{70} & \frac{13b^2}{420} \\ & \frac{b^3}{105} & \frac{13b^2}{420} & \frac{b^3}{140} \\ & & \frac{13b}{35} & \frac{11b^2}{210} \\ & \text{Symm.} & & \frac{b^3}{105} \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$\mathbf{K}_E = D \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ & & K_{33} & K_{34} \\ & \text{Symm.} & & K_{44} \end{pmatrix} \quad (64)$$

ここで

$$\begin{aligned} K_{11} = K_{33} &= \frac{6l}{b^3} + \frac{13}{70} lb \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 + \frac{6l}{5b} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2, & K_{12} &= \frac{3l}{b^2} + \frac{11}{420} lb^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 + \frac{l}{5} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{1+5\nu}{2} \\ K_{13} &= -\frac{6l}{b^3} + \frac{9bl}{140} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - \frac{6l}{5b} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2, & K_{14} &= \frac{3l}{b^2} - \frac{13l}{840} b^2 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 + \frac{l}{10} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \\ K_{22} = K_{44} &= \frac{2l}{b} + \frac{lb^3}{210} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 + \frac{2bl}{15} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2, & K_{24} &= \frac{l}{b} - \frac{lb^3}{280} \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - \frac{lb}{30} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \\ K_{23} &= -K_{14}, & K_{34} &= -K_{12} \end{aligned}$$

減衰マトリックス  $\mathbf{C}$  は式 (62) において、 $\gamma h/g$  を  $c$  とおき、バネ反力による剛性マトリックス  $\mathbf{K}_s$  は式 (62) において、 $\gamma h/g$  を  $\beta_s$  とおくことにより得られる。

### 3. 境界振動数方程式

式 (27), 式 (56) において、変位の一次微分項を省いて整理すると、マシュー・ヒル方程式である。しかし、一次微分項を考慮した時も、減衰マトリックスが対角化され得る場合、マシュー・ヒル方程式と同じ手順により解析される。マシュー・ヒル方程式の性質より、その解は周期  $T=2\pi/\theta$  と周期  $2T$  を持つ解である。従って周期  $T, 2T$  を持つ周期解により安定、不安定領域に区分される。ここでは、平板要素の運動方程式 (56) を用いて以下説明をする。

平板要素の運動方程式は

$$\mathbf{M}\{\mathbf{r}\ddot{q}\} + \mathbf{C}\{\mathbf{r}\dot{q}\} + (\mathbf{K}_E - aN_{xi}^* \mathbf{S}_G - bN_{xi}^* \mathbf{S}_G \cos \theta t)\{\mathbf{r}q\} = 0$$

である。

周期  $2T$  を持つ周期解として次の関数で表わすとき、

$$\{\mathbf{r}q\} = \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \{\mathbf{A}\}_k \sin \frac{k\theta t}{2} + \{\mathbf{B}\}_k \cos \frac{k\theta t}{2} \quad (65)$$

ここで、 $\{\mathbf{A}\}_k, \{\mathbf{B}\}_k$  は時間に無関係な量である。

主不安定領域の境界振動数は式 (56), (65) より近似的に式 (66) の境界振動数方程式より求められる。

又、減衰を無視すると式 (67) より求められる。

$$\begin{vmatrix} \mathbf{K}_E - aN_{xi}^* \mathbf{S}_G + \frac{1}{2} bN_{xi}^* \mathbf{S}_G - \frac{(d\omega_i)^2}{4} \mathbf{M} & -\frac{(d\omega_i)}{2} \mathbf{C} \\ \frac{(d\omega_i)}{2} \mathbf{C} & \mathbf{K}_E - aN_{xi}^* \mathbf{S}_G - \frac{1}{2} bN_{xi}^* \mathbf{S}_G - \frac{(d\omega_i)^2}{4} \mathbf{M} \end{vmatrix} = 0 \quad (66)$$

$$\left| \mathbf{K}_E - aN_{xi}^* \mathbf{S}_G \pm bN_{xi}^* \mathbf{S}_G - \frac{1}{4} (d\omega_i)^2 \mathbf{M} \right| = 0 \quad (67)$$

ここで、 $\theta = d\omega_i$  であり、 $d$ : 一定乗数である。 $\omega_i$  は  $i$  番目固有振動数であり、式(56)において、 $\mathbf{C} = 0$ ,  $\mathbf{K}_G = 0$  とし

$$\mathbf{M} \{r\ddot{q}\} + \mathbf{K}_E \{rq\} = 0 \quad (68)$$

より得られる。 $\{rq\} = \{\mathbf{A}\} \sin \omega t$  とおき、式(68)より

$$\left| \mathbf{K}_E - \omega^2 \mathbf{M} \right| = 0 \quad (69)$$

となる。

さらに、周期  $T$  を持つ周期解を次の関数で表わすとき、

$$\{rq\} = \frac{1}{2} \{\mathbf{B}_0\} + \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \{\mathbf{A}\}_k \sin \frac{k\theta t}{2} + \{\mathbf{B}\}_k \cos \frac{k\theta t}{2} \quad (70)$$

ここで、 $\{\mathbf{B}_0\}$ ,  $\{\mathbf{A}\}_k$ ,  $\{\mathbf{B}\}_k$  は時間に無関係な量であり、第2不安定領域の境界振動数は、

$$\begin{vmatrix} \mathbf{K}_E - aN_{xi}^* \mathbf{S}_G - (d\omega_i)^2 \mathbf{M} & 0 & -(d\omega_i) \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{K}_E - aN_{xi}^* \mathbf{S}_G & -bN_{xi}^* \mathbf{S}_G \\ (d\omega_i) \mathbf{C} & -0.5bN_{xi}^* \mathbf{S}_G & \mathbf{K}_E - aN_{xi}^* \mathbf{S}_G - (d\omega_i)^2 \mathbf{M} \end{vmatrix} = 0 \quad (71)$$

および、減衰を無視すると

$$\begin{vmatrix} \mathbf{K}_E - aN_{xi}^* \mathbf{S}_G - (d\omega_i)^2 \mathbf{M} & -0.5bN_{xi}^* \mathbf{S}_G \\ -0.5bN_{xi}^* \mathbf{S}_G & \mathbf{K}_E - aN_{xi}^* \mathbf{S}_G - 4(d\omega_i)^2 \mathbf{M} \end{vmatrix} = 0 \quad (72)$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{K}_E - aN_{xi}^* \mathbf{S}_G & -bN_{xi}^* \mathbf{S}_G \\ -0.5bN_{xi}^* \mathbf{S}_G & \mathbf{K}_E - aN_{xi}^* \mathbf{S}_G - (d\omega_i)^2 \mathbf{M} \end{vmatrix} = 0 \quad (73)$$

より求められる。

#### 4. 解析例

解析例として図-4に示す任意支持条件のはり及び矩形板の解析を試みる。

はり要素については、部材長  $L$ 、正方形断面(断面積  $A$ ) の3種類のはり、Iは両端ヒンジ、IIは一端固定、他端ヒンジ、IIIは両端固定のはりである。

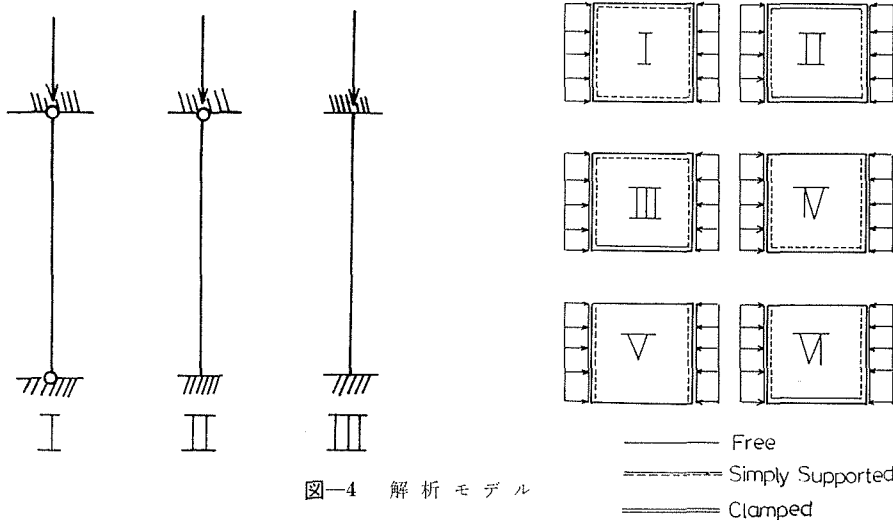


図-4 解析モデル

矩形板については、辺比が1 ( $l/b_0=1, b_0=幅$ ) で相対する辺が単純支持, 他の辺が任意支持の6種類である。

解析にあたり, はり, 矩形板とも5要素に等分割をした。表-1 に各はり, 矩形板の1次固有振動数, 座屈荷重を示す。

表-1

はりの固有振動数と座屈荷重			矩形板の固有振動数と座屈荷重		
	固有振動数	座屈荷重		固有振動数	座屈荷重
	$\omega_1 = \frac{\alpha_1}{L^2} \sqrt{\frac{gEI}{\gamma A}}$	$P_1^* = \beta_1 \frac{EI}{L^2}$		$\omega_1 = \alpha_1 \frac{\pi^2}{b_0^2} \sqrt{\frac{gD}{\gamma h}}$	$N_{x1}^* = \beta_1 \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b_0}\right)^2$
CASE	$\alpha_1$	$\beta_1$	CASE	$\alpha_1$	$\beta_1$
I	9.870	9.870	I	2.0	4.0
II	15.422	20.208	II	2.935	8.613
III	22.385	39.605	III	2.396	5.743
			IV	1.184	1.402
			V	0.976	0.952
			VI	1.286	1.653

不安定領域の境界値の算定は, 例えば矩形板について, 減衰を無視すると, 与えられた  $a, b, N_{xi}^*, \omega_i$  のもとで, 式(67), (72), (73)の  $d$  を決定する固有値問題となる。

表-2 は, 両端ヒンジのはり, 4辺単純支持の矩形板の主不安定領域及び第2不安定領域の境界値を求め, 既に得られている境界振動数方程式(74), (75), (76)と比較した結果である。

表-2 主不安定領域, 第2不安定領域の境界値

$\mu$	主不安定領域				第2不安定領域			
	$\theta/2\omega_1$				$\theta/2\omega_1$			
	Upper bound		Lower bound		Upper bound		Lower bound	
	式(74)	変形法	式(74)	変形法	式(75)	変形法	式(76)	変形法
0.0	1.0	1.0 (1.0)	1.0	1.0 (1.0)	0.5	0.5 (0.5)	0.5	0.5 (0.5)
0.1	1.04481	1.04481 (1.04481)	0.94867	0.94867 (0.94867)	0.50083	0.50083 (0.50083)	0.49497	0.49497 (0.49497)
0.2	1.09544	1.09544 (1.09544)	0.89442	0.89442 (0.89442)	0.50332	0.50326 (0.50325)	0.47958	0.47958 (0.47958)
0.3	1.14018	1.14019 (1.14017)	0.83666	0.83666 (0.83666)	0.50744	0.50717 (0.50717)	0.45277	0.45277 (0.45277)
0.4	1.18321	1.18321 (1.18321)	0.77459	0.77459 (0.77460)	0.50744	0.51235 (0.51235)	0.41231	0.41231 (0.41231)

主不安定領域について  $\frac{\theta}{2\omega} = \sqrt{1 \pm \mu + \frac{\mu^2}{8 \pm 9\mu}}$  (74)

第2不安定領域について  $\frac{\theta}{2\omega} = \sqrt{1 + \frac{1}{3} \mu^2}$  (75)

$\frac{\theta}{2\omega} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - 2\mu^2}$  (76)

ここで,  $\mu$  は励振パラメーターで,  $\mu = b/2(1-a)$  である。

表-2 の値は  $a=0$  とし求めた結果で, 表中変形法の欄の括弧内の値は矩形板の値である。本解析方法は少ない分割数であるが, 既往研究結果<sup>1)</sup>と良く一致し高い精度を有するものと思われる。

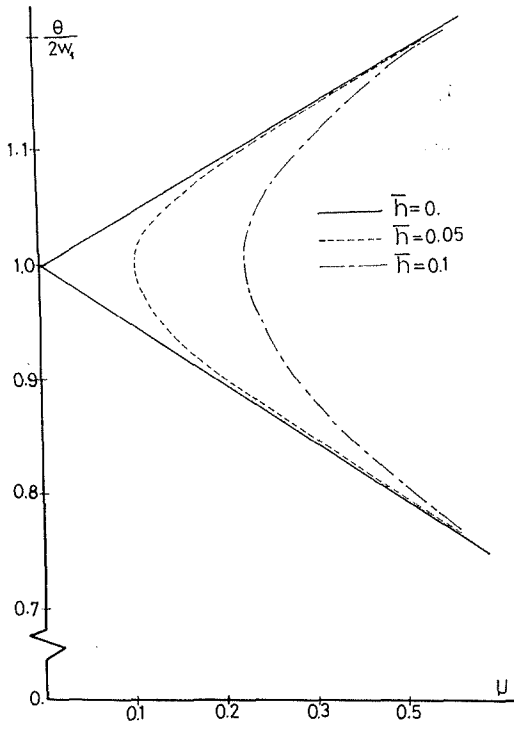


図-5 減衰を考慮した両端ヒンジ結合の  
はりの不安定領域

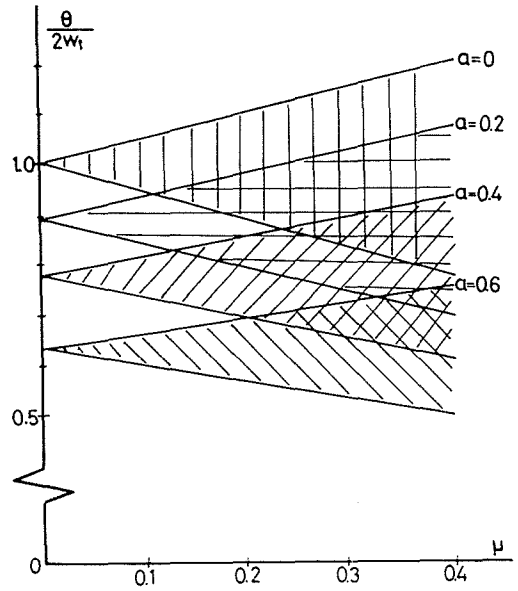


図-6 種々の  $a$  によるはり及び矩形板の  
主不安定領域

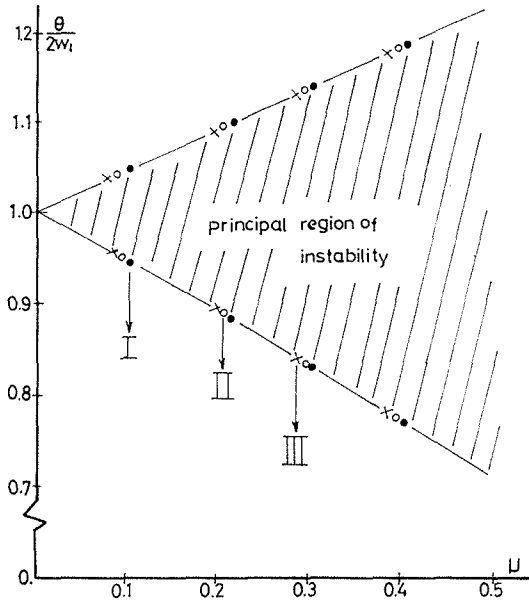


図-7・a 任意支持はりの主不安定領域

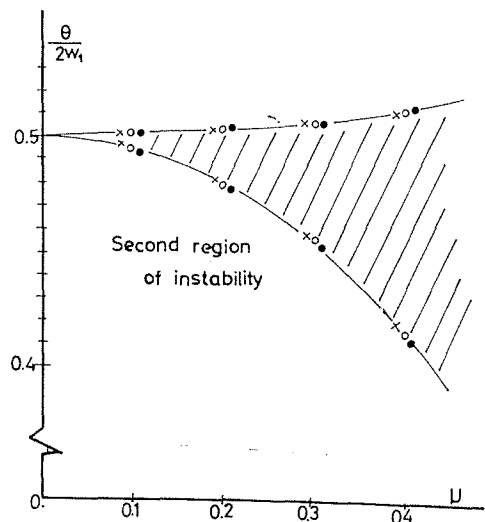


図-7・b 任意支持はりの第2不安定領域

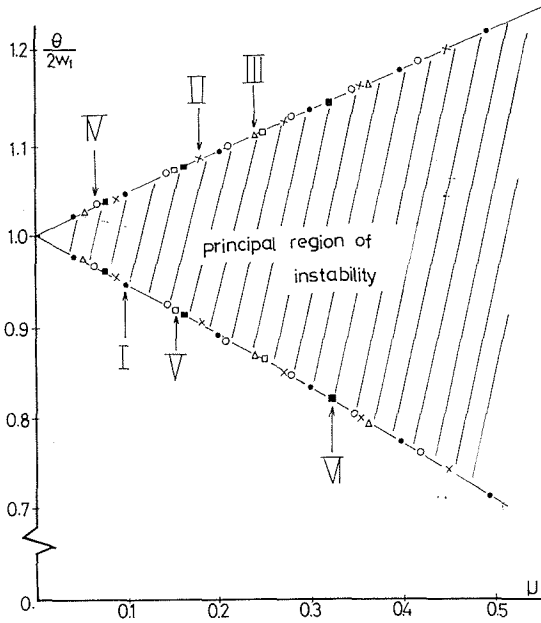


図-8・a 任意支持矩形板の主不安定領域

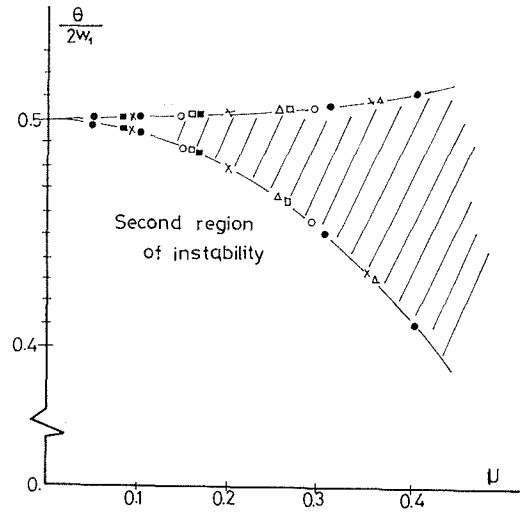


図-8・b 任意支持矩形板の第2不安定領域

減衰の不安定領域に与える影響は単純な係数励振不安定振動では大きいことは知られているが、ここでは、両端ヒンジのはりの主不安定領域を減衰定数  $\bar{h}=0.05, 0.1$  の場合につき図-5に示す。図より、励振パラメーター  $\mu$  の小さい領域での影響が大きい。ここで、 $c=2\bar{h}\omega_i$

図-6は種々の  $a$  による主不安定領域を減衰無視で解析した結果である。はり、矩形板の不安定領域が支持条件に関係なく、両端ヒンジのはりのそれで近似的に表現できる。支持条件の不安定領域に与える影響の詳細を図-7, 8に示す。

図-7, 8は任意支持条件のはり、矩形板について主不安定領域、第2不安定領域について解いた結果である。図より支持条件によらず、両端ヒンジのはりの値と僅かな差が生じるだけで、ほぼ一致することが確かめられる。

### 5. 結 語

任意支持のはり、矩形板の動的安定問題を変形法により解析を試みた。以上本報告を要約すると、

1) 本解析方法を両端ヒンジのはり、四辺単純支持の矩形板に適用し、主不安定領域、第2不安定領域を算定し、既往研究結果と比較検討し、本解析方法が動的安定解析に十分適用可能なことを示した。

2) 種々の境界条件のはり、矩形板の不安定領域を求めた。その結果、境界振動数は境界条件に関係なく、両端ヒンジのはりの値と僅かな差異を生じるだけで、ほぼ一致することが確かめられた。

3) 減衰は不安定領域を縮小させる。

ここで示された変形法による解析方法は基本的なものであるが、任意の骨組構造物、補剛された板などに容易に発展させることができよう。

終りに、この研究は文部省科学研究費（奨学研究 A）の援助のもとに行われた。ここに記して謝意を表わす。

尚、計算に際しては、北大大型計算機センター FACOM 230-75 を利用したことを付記する。

#### 参 考 文 献

- 1) Bolotin, V. V.: The Dynamic Stability of Elastic Systems (1964), Holden-Day, Inc.
- 2) 会田忠義, 佐伯博三, 窪田 彰: 土木学会論文集, No. 249 (1976-5), p. 29.
- 3) 深沢泰晴, 河西晴征: 土木学会第 30 回年次学術講演会講演概要集, 第 I 部 (1975), p. 414.
- 4) 山岸一彦, 稼農知徳: 土木学会第 31 回年次学術講演会講演概要集, 第 I 部 (1976), p. 234.
- 5) Cheung, Y. K.: Finite Strip Method in Structural Analysis (1976), Pergamon-Press