北海道大学工学部研究報告
第87号(昭和53年)

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 87 (1978)

Luneburg の両眼視空間理論における一つの仮説について

新保　勝* 山ノ井高洋*

(昭和52年9月30日受理)

On a Hypothesis in Luneburg's Theory of Binocular Visual Space

Masaru SHIMBO　Takahiro YAMANOI

(Received September 30, 1977)

Abstract

A non-Riemannian geometrical treatment of visual space is shown with reference to Luneburg's theory of Riemannian binocular visual space. Microscopic transformation between physical and visual space elements is assumed, so that non-Euclidean concept of torsion tensor due to the rotational characteristics of space elements is introduced together with another non-Euclidean concept of Riemann-Christoffel curvature tensor. The twisted cord illusion is an experimental evidence of the torsion tensor. The parallel and distance alley curves are explained as geodesics in the non-Riemannian visual space under the restriction of teleparallelism and Riemannian configurations, respectively.

1. まえがき

視覚は眼が外界からの物理的刺激に反応することによって生ずる心理現象の一つである。これによって外界の物理空間は一つの心理的な空間として認識される。後者は前者の物理空間に対して視空間と称する。これらの空間は完全に独立した存在ではないので，統一的な立場から両者の関係を論ずることが心理物理的現象の解明に不可欠のことである。

両眼が関与したいわゆる両眼視空間の幾何学的性質は Luneburg[1] によって定式化された。彼はあらかじめ距離関数を定義することによって，両眼視空間を距離空間として認識し，空間が負の定曲率 Riemann 空間であることを示した。一方 Blank[2] は定性的な観察から公理的に計量の性質を導き，Shipley[3] は距離関数を調べ，印東[4] は局所的な距離関数の導入を試みているが，これらに共通するのは計量的な性質が主に論じられていることである。

しかし一般に物理空間と視空間との間のアファイン座標変換に際して，計量的な性質とともに位相的な性質も考慮する必要があり，これにともなう幾何学的不変量としては曲率と捩率とが考えられる[5]。したがって，後者の非 Euclid 的属性を欠く Riemann 空間的な制約は視空間の幾何学的取り扱いにおける一つの可能性でしかない。また，Shipley[3] が指摘しているように座標

---

* Division of Information Engineering, Graduate School of Engineering, Hokkaido University. Sapporo 060, Japan.

* 北海道大学工学部　情報数理工学第一講座

変換にともなう接続の意味をはっきりさせることも必要であろうと思われる。そこで同じく幾何学的立場から，両眼視に限定せずに物理空間と視空間の間の心理的認識過程を微視的構造模型[6),7)]と見なして構成的に論ずることにより，視覚における心理現象の基本的な構造を一層明らかにすることを以下に試みる。

2.　物理空間と視空間

物理空間と視空間は微小な線素の集まりと仮定する。したがって局所的な座標系を考える必要がある。いま物理空間内の各点の座標を $x^i\,(i=1,2,3)$ とする。物理空間における微小線素を dx^i とし，これによって惹き起こされる視空間内の線素を $(dx)^{i'}$ とすると，両者の間に局所的に定義された線型変換

$$(dx)^{i'} = A^{i'}_i\, dx^i\,, \qquad dx^i = A^i_{i'}\,(dx)^{i'} \tag{2-1}$$

が成立するものとする (第1図)。ここで，変換係数 $A^{i'}_i$ は物理空間内の点 x^k の関数であり，視覚による心理的な認識過程を表わす係数である。また $A^i_{i'}$ は $A^{i'}_i$ の逆変換係数である。さらに，繰り返された指標に関しては Einstein の総和規約を採用する。式 (2-1) の一次微分形式は一般にホロノームである必要はない。すなわち積分可能性は保証されない。したがって非ホロノーム対象

$$\Omega_{k'}{}^{i'}{}_{j'} = A^k_{[k'} A^j_{j']}\,\partial_k A^{i'}_j\,, \qquad \partial_k = \partial/\partial x^k$$

は全部が零とならない。ここで [　] 内の指標は交代量を取るものとする。

物理空間に曲線座標系，視空間に直交座標系を取れば，線素の長さ ds は二次微分形式

$$\begin{aligned} ds^2 &= \delta_{j'i'}\,(dx)^{i'}\,(dx)^{j'} \\ &= g_{ji}\,dx^i\,dx^j \end{aligned}$$

で与えられる。ここで，$\delta_{j'i'}$ は Kronecker のデルタで，

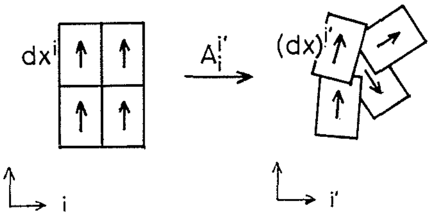
$$g_{ji} = \delta_{j'i'}\,A^{i'}_i\,A^{j'}_j$$

は物理空間での基本計量テンソルである。

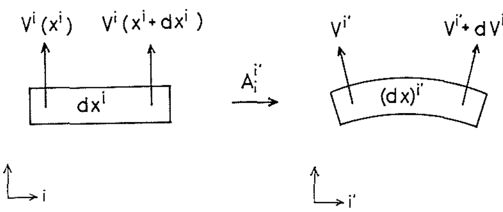
擬平行はアファイン接続係数 $\Gamma_k{}^i{}_j$ を定義する。すなわち，物理空間内の接続は視空間内の任意のベクトル v^i の平行性から

$$\begin{aligned} \delta v^i &= dv^i + \Gamma_k{}^i{}_j\, v^j\, dx^k = 0 \\ \Gamma_k{}^i{}_j\, dx^k &= A^i_{i'}\, dA^{i'}_j \end{aligned} \tag{2-2}$$

で定まる (第2図)。ここで，δv^i は v^i の共変微分であり，dv^i および $dA^{i'}_i$ は dx^k だけ離れた二点におけるベクトル v^i および変換係数 $A^{i'}_i$ の差である。$\Gamma_k{}^i{}_j$ は一般に物理空間内の場所 x^k と線素 dx^k の関数となる。



第1図　物理空間から視空間への変換



第2図　擬　平　行　性

3. 捩率と曲率

以下，物理空間から視空間への変換にともなう非ホロノーム性はぬりつぶして考える。

物理空間内である微小な閉曲線を取り，これに沿って曲線素を微視的に視空間内へ変換することを繰り返す。これによって得られる視空間内における配位は一般に始端と終端で位置にくい違いを生じ，その大きさは

$$dx^{i'} = S_{k'j'}{}^{i'} df^{k'j'} \tag{3-1}$$

によって与えられる (第 3 図 (a))。ここで

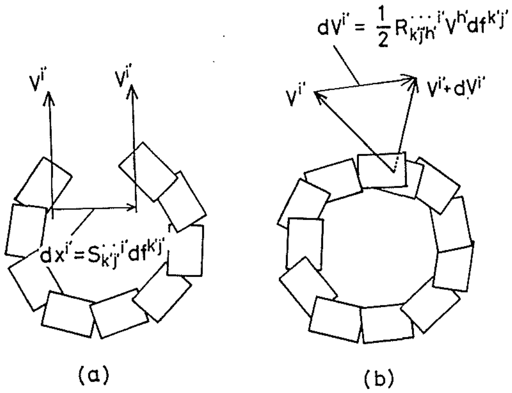
$$S_{k'j'}{}^{i'} = \Gamma_{[k'}{}^{i'}{}_{j']} \tag{3-2}$$

は視空間内での捩率テンソル，

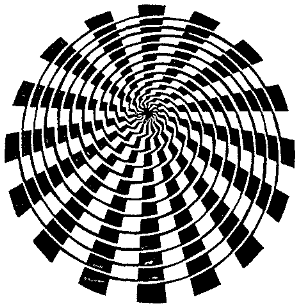
$$df^{k'j'} = 2dx^{[k'}dx^{j']}$$

は面素テンソルである。

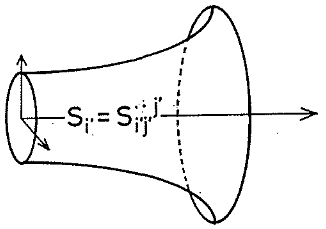
一般に接続係数 $\Gamma_{k'}{}^{i'}{}_{j'}$ は指標 k' と j' に関して対称とは限らないから， 式 (3-1), (3-2) から物理空間での閉曲線は視空間では一般に閉じないことが予想される。視覚における錯覚，いわゆる錯視， 例えば「ねじりヒモの錯視」にこの種のくい違いを見出すことができる。第 4 図[8] で実際には同一円周上にあるねじりヒモが，視覚では一周するごとに位置のずれを生じ，渦を巻いているように見えている。



第 3 図　(a) 捩率と (b) 曲率



第 4 図　ねじりヒモの錯視[8]



第 5 図　体積歪変化率

同様に物理空間内の一つのベクトル v^i を微小閉曲線に沿って擬平行的に一周すれば，視空間内でこれに対応するベクトル $v^{i'}$ は一般に始端と終端で方向が変わる。このくい違いは

$$dv^{i'} = \frac{1}{2} R_{k'j'h'}{}^{i'} v^{h'} df^{k'j'}$$

によって与えられる (第 3 図 (b))。ここで

$$R_{k'j'h'}{}^{i'} = 2\left(\partial_{[k'}\Gamma_{j']}{}^{i'}{}_{h'} + \Gamma_{[k'}{}^{i'}{}_{|l'|}\Gamma_{j']}{}^{l'}{}_{h'}\right), \qquad \partial_{k'} = A^k_{k'}\partial_k \tag{3-3}$$

は曲率テンソルであり，[　] は | | で囲まれた指標を除いて交代量を取る。式 (3-3) から指標を縮約して得られる

$$R_{j'h'} = R_{i'j'h'}{}^{i'}$$

は Ricci テンソルである。

一般に物理空間と視空間との間の座標変換に際して，幾何学的不変量には捩率で代表される非 Euclid 的属性と曲率で代表される非 Euclid 的属性が考えられる。したがって，視覚における心理的認識過程はこの両属性をあわせ持つ非 Riemann 視空間的把握が必要であろうと思われる。Luneburg の両眼視空間は捩率を持たず，曲率だけがある Riemann 空間である。これに対して，今一つの特殊な例として変換テンソル $A^{i'}_{i}$ の微小変化 $dA^{i'}_{i}$ が点 x^k の関数として与えられるような場合，例えば物理空間から視空間への変換に際して，線素 dx^i の方向が一意に規定される場合には，接続係数は式 (2-2) から

$$\Gamma_{k'}{}^{i'}{}_{j'} = A^{i'}_{i} \partial_{k'} A^{i}_{j'}$$

となる。捩率および曲率は式 (3-2), (3-3) から

$$S_{k'j'}{}^{i'} = A^{i'}_{i} \partial_{[k'} A^{i}_{j']}, \qquad R_{k'j'h'}{}^{i'} = 0$$

となり[9]，捩率だけがあり，曲率を持たない，いわゆる遠隔平行性視空間が得られる。先に述べたねじりヒモの錯視にみられる捩率の存在はこうした描像を可能にするものと思われる。

なお，式 (3-2) で指標 i' と j' を縮約して得られるベクトル

$$S_{k'} = S_{k'i'}{}^{i'}$$

は視空間が $x^{k'}$ 軸方向に膨脹あるいは縮小する密度変化率を与える (第 5 図)[6),7)]。

4.　parallel alley と distance alley

Luneburg の理論の背景となった実験的事実の一つに Hillebrand[10)] の parallel alley 実験と Blumenfeld[11)] の distance alley 実験がある。前者は視空間における平行な二直線の，後者は同じく等距離にある二直線の物理空間における配位を決定するもので，これらの実験結果を同一平面上に示したものが第 6 図である。図は，両者の最遠端を一致させた場合に parallel alley は distance alley の内側に存在し，平行性と等距離性が異なること，したがって視空間が非 Euclid 的であることを示している。

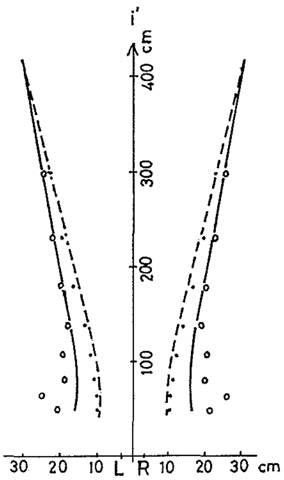
視空間における直線で定義されるこれらの alley 曲線はいずれも物理空間における測地線として把握されるべきものである。非 Riemann 視空間における測地線の方程式は曲線の接ベクトルの擬平行性から

$$\frac{\delta}{ds}\left(\frac{dx^i}{ds}\right) = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_k{}^i{}_j \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \qquad (4\text{-}1)$$

となる。ここで s は曲線に沿って測った弧の長さ，δ/ds は s に沿った共変微分径数である。

ところで，parallel alley 曲線は視空間内の平行性を基準に作られるから，物理空間から視空間への変換に際して，線素の方向が一意に規定されることになる。それゆえに空間は捩率だけがあって，曲率をもたない遠隔平行性空間となり，測地線は式 (4-1) で接続係数を

$$\Gamma_k{}^i{}_j = \left\{ {i \atop kj} \right\} + S_{kj}{}^{i} - S_{j}{}^{i}{}_{k} + S^{i}{}_{kj} \qquad (4\text{-}2)$$



第 6 図　Parallel alley (破線) と distance alley (実線)[12)]。
L：左眼，R：右眼

とおいて求まる。ここで

$$\begin{Bmatrix} i \\ kj \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{ih} (\partial_k g_{hj} + \partial_j g_{kh} - \partial_h g_{kj})$$

は Christoffel の 3 添字記号，g^{ih} は $g^{ih} g_{hj} = \delta^i_j$ から定まる基本テンソルであり，

$$S_{j\cdot k}^{\cdot i} = -S^{i}_{\cdot jk} = g^{ih} g_{kl} S_{jh}^{\cdot\cdot l}$$

なお，式 (4-2) の右辺第二項は指標 k, j の反対称性のために式 (4-1) に寄与しない。

他方で，distance alley 曲線は視空間内の等距離性を基準に作られるから，同様の変換に際して，線素の位置が一意に規定されることになる。それゆえに，空間は捩率を持たず，曲率のみがある Riemann 空間となり，測地線は式 (4-1) で

$$\Gamma^{\,i}_{kj} = \begin{Bmatrix} i \\ kj \end{Bmatrix} \tag{4-3}$$

とおいて求まる。

このように parallel alley および distance alley は非 Riemann 視空間における遠隔平行性的制約および Riemann 的制約のもとでの測地線となる。また，(4-2), (4-3) 式から明らかなように両者は一般に異なる。

5. あとがき

以上，Luneburg が視空間における計量的特性に着目して Riemann 的両眼視空間を構成したのに対し，本稿では位相的特性をも考慮し，また両眼視の制約を設けずに非 Riemann 的視空間を構成した。非 Riemann 的属性の一つである捩率の概念は「ねじりヒモの錯視」に具体例を見出すことができる。また，捩率の存在は視空間の膨脹あるいは収縮を説明する。parallel alley および distance alley は遠隔平行性的および Riemann 的制約のもとでの測地線と見なされる。変換テンソル，したがってこれから構成される計量テンソルの具体的な形を与えることは次の課題である。

この研究にあたって，多くの有益な御助言，御批判を賜った本学河口至商教授に深く感謝致します。

文　献

1) Luneburg, R. K.: *Mathematical Analysis of Binocular Vision.* Princeton Univ. Press, Princeton, 1947; *Courant Anniversary Volume*, New York Univ. Press, New York, 1948, p. 215; *J. Opt. Soc. Am.*, **40** (1950), p. 627.

2) Blank, A. A.: *J. Opt. Soc. Am.*, **43** (1953), p. 717; *ibid.*, **48** (1958), p. 328.

3) Shipley, T.: *ibid.*, **47** (1957), p. 795; *ibid.*, p. 804.

4) Indow, T.: *Psychologia*, **17** (1974), p. 50.

5) Kondo, K. *et al.*: *Memoirs*, **1** (1955), p. 453; *RAAG Memoirs*, **2** (1958), p. 199; *ibid.*, **3** (1962), p. 91; *ibid.*, **4** (1968), p. 137.

6) Shimbo, M.: *Bull. Fac. Engng., Hokkaido Univ.*, **77** (1975), p. 155.

7) 新保　勝，河口至商：北大工学部研究報告，**80** (1976), p. 75.

8) 坂根厳夫：遊びの博物誌．朝日新聞社，1977; Parola, R.: *Optical Art-Theory and Practice.* Reinhold Book Corp., New York, 1969.

9) Amari, S.: *RAAG Memoirs*, **3** (1962), p. 99.

10) Hillebrand, F.: *Denkschr. Akad. Wiss. Wien, math.-nat. Kl.*, **72** (1902), p. 255.

11) Blumenfeld, W.: *Zeits. f. Physiol. d. Sinnesorgane*, **65** (1913), p. 241.

12) Zajaczkowska, A.: *J. Opt. Soc. Am.*, **46** (1956), p. 514.