北海道大学工学部研究報告
第 99 号 (昭和 55 年)

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 99 (1980)

拡散問題に表れるラプラス変換公式と積分誤差関数に関する一考察

柴田俊春　久郷昌夫

(昭和 55 年 3 月 31 日受理)

Notes on Laplace transformation formulas for the diffusion at the Cartesian coordinates and on some characteristics of $i^n \operatorname{erfc}(x)$

Toshiharu SHIBATA　Masao KUGO

(Received March 31, 1980)

Abstract

The Laplace transformation is succesfully applied to many diffusion problems such as stratified mediums, flux alternations at the interface, etc. This paper is related to the classification and generalization of the image function such as types of $e^{-qx}/q^m/(q+h)^n$; if the transformation is defined in the usual manner as

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

then the image has following two original functions $f(t)$ according to m,

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}\left\{e^{-qx}/q^m/(q+h)^n\right\}_{\substack{n\geq 1\\ m\geq 2}} \\ &= (-)^m D \frac{\sqrt{4Dt}^{\,m-2}}{h^n} e^{-F^2} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m+n-j-3}{n-1} \frac{(-)^j e^j \operatorname{erfc}(F)}{(2H)^{m-j-2}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{m+n-j-3}{m-2} \frac{e^j \operatorname{erfc}(F+H)}{(2H)^{m-j-2}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}\left\{e^{-qx}/q^m/(q+h)^n\right\}_{\substack{n\geq 1\\ m\leq 1}} \\ &= (-)^{m+1} D \frac{\sqrt{4Dt}^{\,m-2}}{h^n} e^{-F^2} \sum_{j=m+n-2}^{n-1} \binom{m+n-j-3}{m-2} \frac{e^j \operatorname{erfc}(F+H)}{(2H)^{m-j-2}} \end{aligned}$$

where $q=\sqrt{p/D}$, $F=x/\sqrt{4Dt}$, $H=h\sqrt{Dt}$, $e^j \operatorname{erfc}(x)=e^{x^2}\times i^j \operatorname{erfc}(x)$ and roundbracketed pairs are the generalized binomial coefficient. Both equations seem to closely resemble eachother, but $f(t)_{m\leq 1}$ exclude $i^j \operatorname{erfc}(F)$ because of the empty sum and the series start from different integers. The application of these equations is easy and can be dealt with as an arithmetic problem.

In the course of the analysis, some characteristics of $i^n \operatorname{erfc}(x)$ are revealed; a suggestion of the use of $e^n \operatorname{erfc}(x)$, $(=e^{x^2} i^n \operatorname{erfc}(x))$ in addition to an usual one, an extension of order n to negative and a correlation to Hermite's polynomial for $i^n \operatorname{erfc}(x)$, possibly

応用化学科　第 1 講座

a new expansion of series (eq. A–10), and a Taylor expansion of $e\,\mathrm{erfc}\,(x+y)$ and repeated integral formulas. These would be expected as new and powerful means for diffusion analyses.

1. 緒　言

ラプラス変換を利用して，物質移動（拡散係数，密度などが大きく異なって形成される層状構造の問題，乾燥問題など）あるいは伝熱に関する拡散方程式を解析する際に表れて来る特徴的な像関数 $\exp(-qx)\cdot q^{-m}(q+h)^{-n}$ と原関数の関係は整数値 m, n の小さいものに対して，よく知られた Carslaw-Jaecer[1], Crank[2], あるいは Erdélyi ら[4] の成書に述べられている。しかし m, n が一般化された値のときの原関数の整った形のものを既存の公式から決めることは若干の手数を要すると思われる。本報告では今迄知られている，上述の像関数の整理をすると共に，任意の m, n の組合せの場合にも，暗算的な代数計算で，像関数一原関数の関係を明らかにすることを目的とした。またここでは積分操作の加わった誤差関数グループ ($i^n\,\mathrm{erfc}\,(x)$) に関する幾つかの性質を具体的に示すことも，付属的ではあるが一つの目的とした。

2. 概　説

原関数一像関数の関係がすでに記述されている直角座標系の公式を Carslaw-Jaecer（分数表示では分子，および整数），および Erdélyi ら[4]（分母）の中からとり出し ($m-n$) 面に式番号で整理した* ものを Fig. 1 に示す。なお m, $n\geq 0$ の第 1, 2 象限に存在するものに限った。さて上掲の像関数の原関数を仮に $f(t)$ とすると，

$$\frac{e^{-qx}}{q^m(q+h)^n}=\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt\equiv L\left\{f(t)\right\},\quad f(t)=L^{-1}\left\{\frac{e^{-qx}}{q^m(q+h)^n}\right\}^*,\quad q=\sqrt{\frac{p}{D}}\qquad(2\text{–}1, 2, 3)$$

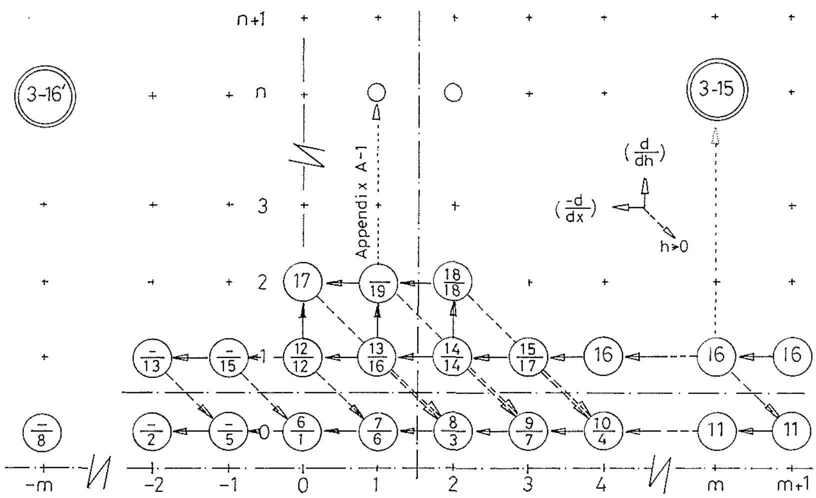

Fig. 1. Arrangement of relations between image functions ($e^{-qx}/q^m/(q+h)^n$) and original functions onto a (m, n) plane.

8/3 etc show formula numbers (numerators and singles are based on Carslaw-Jaecer, Crank, and denominators are from Erdélyi *et al.*
Eqs. (3–15, 16′) are present derivations.
Small circles were previously discussed (not reported).

* Carslaw-Jaecer, Crank 共，同一の式番号がついている。

で変換の定義とする。上式中Dは分子拡散係数あるいは熱拡散率である。またラプラス変換を以下L，逆変換をL^{-1}と略記し，式中適宜交換する。原関数$f(t)$はその変数を具体的に示すと，$x/\sqrt{4Dt}$，または$(x/\sqrt{4Dt})+h\sqrt{Dt}$であり，表現の簡単化のため混乱がなければ

$$F = x/\sqrt{4Dt}\,, \qquad H = h\sqrt{Dt} \tag{2-4, 5}$$

とおいて，変数をそれぞれF, $F+H$とも書くことにする。

さてFig. 1中隣接する(m, n)格子点上の関係は，左向実線で示したものについてはパラメーターxで原関数—像関数を微分することにより関連づけられる。また上向実線で示したものの間には，別のパラメーターhに関する微分で導出出来ることを容易に確認できる。さらに破線上の関係はhを零とした（あるいはこの不定形極限値）計算で$n=0$のものへと変換可能である（付録A-2)。

以上のことから今問題とする一般的な像関数$e^{-qx}\cdot q^{-m}(q+h)^{-n}$の原関数は$n=1$とした(16)式を$h$で繰返し微分することで誘導することが考えられる。事実この微分による手法を計算が容易な$m=2$, $n=1$の(13/16)式に適用し，若干煩雑な変形操作を加えて$e^{-qx}\cdot q^{-1}(q+h)^{-n}$とその原関数の関係を求めることが可能である（付録A-1)。しかし微分後の結果の整理が煩雑なので，ここでは級数展開，ラプラス変換の線形性[8]を利用した結果と問題を微分方程式の解に帰着させた結果を示し，ある具体的な(m, n)の整数対への適用が，代数的計算で容易に可能なことを示す。

3.　相関式の誘導

上述のように問題となっている像関数—原関数の相関式導出は3手法が考えられたが，これらのうち，級数展開法，および微分方程式による方法について述べる。

3-1　級数展開法　すでに述べたように，一般的な$e^{-qx}p^{-m}$形の相関は知られているし，また容易に導出可能なので，もし$e^{-qx}\cdot q^{-m}(q+h)^{-n}$を展開して$e^{-qx}p^{-m}$形の級数で表現出来れば，ラプラス変換の線形性を利用して結果を得ることが可能になると考えられる。

いまnが整数であるとき$1/(q+h)^n$の展開を考えよう。$|h|<q$とすれば*，ラプラス変換での基本的要請[8]から$q>0$であるから次のように書ける[7]。

$$\frac{1}{(q+h)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}\, q^{-n-k}h^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k}(-h)^k q^{-(n+k)} \tag{3-1}$$

上式中$\binom{n+k-1}{k}$は拡張された（広義の）2項係数であり，次式の関係にある。

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} \tag{3-2}$$

$$\frac{e^{-qx}}{q^m(q+h)^n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}(-h)^k\,\frac{e^{-qx}}{q^{m+n+k}} \tag{3-3}$$

(3-1, 2)式から(3-3)式なる像関数を検討すればよい。ところで(11)式より

$$L\left\{\sqrt{4t}^{\,m'}\, i^{m'}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right\} = \frac{e^{-qx}}{p^{1+0,5\,m'}} = \frac{e^{-qx}}{\sqrt{D}^{\,2+m'}\cdot q^{2+m'}} \qquad (m' = 0, 1, 2, \cdots) \tag{11, 3-4}$$

の関係があるので$m+n+k\equiv 2+m'$すなわち　$m'=m+n+k-2$とおいて次の関係を得る。

*　q^mは容易に$p^{m'}$, $q^{m''}p^{m'''}$のように変形できる。この時拡散係数Dの何乗かを適宜代数計算により係数として導入すればよい。(前頁)

*　$|h|>q$なら，qとhを変換する必要がある。この時には$e^{-qx}\cdot q^n$型の像関数を処理しなければならない。

$$\frac{e^{-qx}}{q^m(q+h)^n} = D\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}(-h)^k L\left\{\sqrt{4Dt}^{\,m+n+k-2}\, i^{m+n+k-2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right\} \tag{3-5}$$

上式右辺は必要とする (m,n) 値を指定することで，未知要素はなく，求めようとした相関にほかならない。例えば $(m,n)=(2,1)$ の場合を調べると簡単な計算により，

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{e^{-qx}}{p(q+h)}\right\} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-h)^k\sqrt{4Dt}^{\,k+1}\, i^{k+1}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \\ &= \frac{1}{h}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) - \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{\infty}(-h\sqrt{4Dt})^k\, i^k\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \end{aligned} \tag{3-6}$$

と書ける。さて解析的には erfc, i^k erfc 関数単独より，これらに指数関数を乗じた次の形式の関数の方が諸演算に有効である。これを形式的に e erfc, e^k erfc と略記する。

$$e^k\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \equiv e^{\frac{x^2}{4Dt}}\, i^k\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \qquad k=0,1,2,\cdots \tag{3-7}$$

$$e^0\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \equiv e\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \equiv e^{\frac{x^2}{4Dt}}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

これらの表記を用いて次の形に書くことが出来る。さて次に(3-9)式を導入しよう。

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-qx}}{p(q+h)}\right\} = \frac{1}{h}\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left\{e\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) - \sum_{k=0}^{\infty}(-h\sqrt{4Dt})^k\, e^k\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right\} \tag{3-8}$$

$$\left(\frac{d}{dh}\right)^k\left\{e\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right)\right\} = (-\sqrt{4Dt})^k\cdot k!\, e^k\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right) \tag{3-9}$$

上式はライプニッツの公式[7]を用いて容易に導出可能である。(3-8)式と(3-9)式の比較により，前式中の無限級数和は，関数 e erfc $(F+H)$ を $h(H)$ に関してテーラー展開したものであることが容易に確かめられる。したがって

$$e\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}(-h\sqrt{4Dt})^k\, e^k\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \tag{3-10}$$

であり，(13/16)式の結果と一致する。他の $m.\ n$ についても同様のことが考えられる。

この級数展開法で得られた(3-6)，あるいは(3-8)式はテーラー展開の意味するごとく，パラメーター h (あるいは変数 $h\sqrt{Dt}$) が小さい時には有効である。一方 $h\sqrt{Dt}$ が大きい場合には見通しをよくするため式の変形（例えば(13/16)式を得たような操作）を必要とする。ここで任意の (m,n) に対し有限級数和の表現になおして行くのは面倒なので，次の方法で述べる微分方程式利用での導出を調べることにする。

3-2 微分方程式による方法 (2-2)式右辺を変数 x の関数とし，$(h-d/dx)^n$ を作用させ

$$\left(h-\frac{d}{dx}\right)^n f(t) = L^{-1}\left\{\left(h-\frac{d}{dx}\right)^n \frac{e^{-qx}}{q^m(q+h)^n}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{e^{-qx}}{q^m}\right\} \tag{3-11}$$

のようにパラメーター h を像関数中から消去することが出来る。結果として残った像関数 e^{-qx}/q^m は指数 m により，みかけ上異なる逆変換値（原関数）をもつ。m による区分は $m\geq 2$, $m<2$ である。ここではまず $m\geq 2$ を考察し，その後 $m<2$ を問題にする。

$m\geqslant 2$ であれば先に引用した(3-4)式を(3-11)式に代入して次式を得る。

$$\left(h-\frac{d}{dx}\right)^n f(t) = \frac{\sqrt{4Dt}^{\,m}}{4t}\, i^{m-2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \qquad (m\geqslant 2) \tag{3-12}$$

この非同次微分方程式は形式的に次の解をもつ*。

$$f(t) = e^{hx}\underbrace{\int_x^{\infty}\!\!\cdots\!\!\int}_{n} e^{-hx}\,\frac{\sqrt{4Dt}^{\;m}}{4t}\; i^{m-2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)(dx)^n \qquad (m\geqq 2) \tag{3-13}$$

(3-13) 式の多重積分は次のような部分積分法の繰返し適用により実施できる。いま表現整理のため係数 h^n を乗じた次の形を考える。

$$\begin{aligned}
&h^n\underbrace{\int_x^{\infty}\!\!\cdots\!\!\int}_{n} e^{-hx}\, i^{m-2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)(dx)^n \qquad (m\geqq 2)\\
&=(-)^{m+1}\sum_{j=0}^{n-1} e^{H^2}\, i^j\operatorname{erfc}(F+H)\cdot(2H)^{j-m+2}+\sum_{j=0}^{m-3}(-2H)^{j-m+2}\sum_{k=0}^{n-1}h^k\underbrace{\int_x^{\infty}\!\!\cdots\!\!\int}_{k}\\
&\qquad e^{-hx}\, i^j\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)(dx)^k+e^{-hx}\, i^{m-2}\operatorname{erfc}(F)
\end{aligned}$$

上式は右辺第 2 項に繰返し積分を含む漸化形式のものであるが，逐次これを決めて，

$$\begin{aligned}
&=(-)^m\left\{e^{-hx}\sum_{j=0}^{m-2}(-)^j\binom{m+n-j-3}{n-1}\sqrt{4Dth^2}^{\;j-m+2}\, i^j\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right.\\
&\qquad\left.-e^{(h\sqrt{Dt})^2}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{m+n-j-3}{m-2}\frac{i^j\operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right)}{\sqrt{4Dth^2}^{\;m-2-j}}\right\}
\end{aligned} \tag{3-14}$$

(3-14) 式を (3-13) 式に代入し，問題とした像関数—原関数に関する次の式を得る。

$$\begin{aligned}
L^{-1}\left\{\frac{e^{-qx}}{q^m(q+h)^n}\right\}&=(-)^m D\,\frac{\sqrt{4Dt}^{\;m-2}}{h^n}\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left\{\sum_{j=0}^{m-2}\binom{m+n-j-3}{n-1}\frac{(-)^j\, e^j\operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)}{\sqrt{4Dth^2}^{\;m-j-2}}\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{j=0^{**}}^{n-1}\binom{m+n-j-3}{m-2}\frac{e^j\operatorname{erfc}\left(\dfrac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right)}{\sqrt{4Dth^2}^{\;m-j-2}}\right\}
\end{aligned} \tag{3-15}$$

上式中 $e^j\operatorname{erfc}\xi$ はすでに (3-7) 式で定義したように $e^{\xi^2}i^j\operatorname{erfc}\xi$ である。また $m\geqq 2$ であり，積分操作が少なくても 1 回以上加わっていることから $n\geq 1$ である。級数和中の (　) で示されたものは (3-2) 式で示されたように広義の 2 項係数を意味する。

(3-15) 式は $m\geqq 2$, $n\geqq 1$ であれば任意の (m, n) を指定することで，最初に目的とした簡単な

---

*　微分方程式 $(d/dx-h)^j z(x)=q(x)$, $h=$ 定数，の一般解は次式で求められる[6]。

$$z = e^{hx}\left\{\underbrace{\int^x\!\!\cdots\!\!\int}_{j} e^{-hx}\, q(x)\,(dx)^j+\sum_{k=1}^{j} c_k x^{k-1}\right\}$$

ここで $e^{hx}\sum c_k x^{k-1}$ は同次方程式 $(q(x)=0)$ の一般解である。

さて (3-12) 式では非同次要素 $i^{m-2}\operatorname{erfc}(x/\sqrt{4Dt})$ からなる被積分関数は区間 $(0, \infty)$ で繰返積分が可能である。また非同次方程式の解中，$c_k=0$ が要請される。これはパラメーター h の正負にかかわらず得られた非同次方程式の解が x の定義された区間で有限値を保障されねばならぬこと，および多重不定積分を定積分型 $\int_a^x\cdots dx$, $a\to\infty$ で定義していることによる。また次の関係により多重積分の上限，下限の交換が可能である。

$$\left(h-\frac{d}{dx}\right)^n f(t) = (-)^n\left(\frac{d}{dx}-h\right)^n f(t), \qquad \underbrace{\int_x^{\infty}\!\!\cdots\!\!\int}_{n}\cdots(dx)^n = (-)^n\int_{\infty}^{x}\!\!\cdots\!\!\int\cdots(dx)^n$$

**　第 2 級数和中の添字下限は $m\geqq 2$ の範囲では正しいが $m<2$ の時以下に述べるように修正する必要がある。

代数計算で，関係を具体化出来る。

さて $m \geqq 2$, $n \geqq 1$ であれば (3-15) 式は問題がない。本報告では $n \geqq 0$ を問題にしており，$n=0$ の時には，話の展開に基礎式として用いた像関数—原関数の関係をそのまま引用すればよいとして，$n \neq 0$ で $m<2$ の時の問題解決が必要である。通常の有限級数和において添字 j が逆順に変えられる時 $\left(\sum_{j=0}^{m-2} \cdots\right.$ において例えば $m=0$ とした時の $\left.\sum_{j=0}^{-2} \cdots\right.$ のような計算$\Big)$ は和を定義しないとするのが普通である。本問題ではこのことは関数に含まれる2つの変数 F, $F+H$ のうち m の条件によって $(m<2)$ 変数 F のみの関数 (誤差関数) とはならないことに対応する。

今逆順和は定義しないとしても，級数中に含まれる2項係数の要素が (m, n) の組合せによっては，負値をとる可能性がある。以下広義の2項係数をさらに拡張することを試みた。

3-3 広義2項係数の拡張 2項係数として例えば $\binom{k}{r}$ を問題にする時

$$\binom{k}{r}=\binom{k}{k-r}=\frac{k\,!}{r\,!\,(k-r)\,!}={}_kC_r$$

はその定義式である。各要素 k, r, $k-r$ が負でなければ $0\,!=1$ と定義して問題はない。しかし負の要素が入りこむと負数の階乗値は定義しないのが普通であるが，上の係数も $r>n$, または $r<0$ の時 $\binom{k}{r}=0$ と解釈し，また ${}_{-n}C_r=(-)^r_{n+r-1}C_r\,(n>0)$ と変換するのが普通のようである[7]。ただし後者の関係は r 値の正負で零になることがあると考えられる。いずれにしても負の要素が入って来ると複雑になる。本報告の $m<2$ はまさにこの場合である。

さて負の要素が入るような状況下では2項係数を階乗関数で定義するのではなしにガンマ関数を導入し，その計算も不定形極限値計算まで拡張することを検討する。

3-3-1 $\binom{m+n-j-3}{n-1}$ について 左掲の広義2項係数をガンマ関数で書くと次式となる。

$$\binom{m+n-j-3}{n-1}=\frac{\Gamma(m+n-j-2)}{\Gamma(n)\,\Gamma(m-j-1)} \qquad (j=0\sim m-2)$$

ガンマ関数は整変数が負の時にはその値が $\pm\infty$ である。今，$n \geqq 1$ の条件下で $\Gamma(m+n-j-2)$, $\Gamma(m-j-1)$ の様子を変数で分類すると次のようになる。ただし ε は $0<\varepsilon<1$ なる任意の数である。

i)	$m+n-j-2>\varepsilon$ かつ $m-j-1>\varepsilon$	すなわち $j<m-1-\varepsilon$	階乗関数	
ii)	$m+n-j-2>\varepsilon$ かつ $m-j-1<\varepsilon$	すなわち $m-1-\varepsilon<j<m+n-2-\varepsilon$	零係数	$m<2$ では考えない。
iii)	$m+n-j-2<\varepsilon$ かつ $m-j-1>\varepsilon$	この条件は $n \geqq 1$ ではあり得ない。	—	
iv)	$m+n-j-2<\varepsilon$ かつ $m-j-1<\varepsilon$	すなわち $j>m+n-2-\varepsilon$	不定形	

上の分類と m, n, j の関係を Fig. 2 に示した。なお○印は j のとり得る格子点を示す。図より明らかなことは破線で示したように $m \geqq 2$ では広義2項係数はすでに述べたように階乗関数に帰着する。一方 $m=0, 1$ の時には n の値により広義2項係数値はゼロ，あるいは不定形をとる。$m=0, 1$ の時の像関数—原関数の関係はまだ述べていないが，ここで不定形となる場合を仮に極限計算で係数のみ決めておく。

$j>m+n-2.5$ で広義2項係数が不定形をとるとき，次の関数公式[3]を適用してまとめられる。

$$\Gamma(-z+n)/\Gamma(-z)=(-)^n\,\Gamma(z+1)/\Gamma(z-n+1)$$

$$\binom{m+n-j-3}{n-1}=\frac{\Gamma(m+n-j-2)}{\Gamma(n)\,\Gamma(m-j-1)}=\frac{(-)^{n+1}}{\Gamma(n)}\cdot\frac{\Gamma(j-m+2)}{\Gamma(j-m-n+3)}$$

3-3-2 $\binom{m+n-j-3}{m-2}$ について 3-3-1 と同様左の広義2項係数をガンマ関数で書き直す。

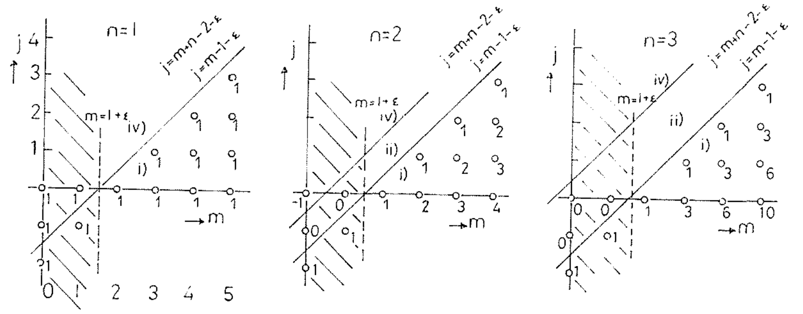

Fig. 2. Generalized binomial coefficients for $\binom{m+n-j-3}{n-1}$ $(0<\varepsilon<1)$

Lattice points in hatched areas have values, but they are regarded as zero because of empty sums.

$$\binom{m+n-j-3}{m-2}=\frac{\Gamma(m+n-j-2)}{\Gamma(m-1)\,\Gamma(n-j)}\qquad(j=0,\cdots,n-1)$$

やはり整変数で分類して (ただし $n-j>0$ である)

i)	$m+n-j-2>\varepsilon$ かつ $m-1>\varepsilon$		階乗関数
ii)	$m+n-j-2>\varepsilon$ かつ $m-1<\varepsilon$		零係数
iii)	$m+n-j-2<\varepsilon$ かつ $m-1>\varepsilon$	この条件の格子点はない	—
iv)	$m+n-j-2<\varepsilon$ かつ $m-1<\varepsilon$		不定形

であり，同様に Fig. 3 に整理した。なお不定形を直した時，その係数は次の通りである。

$$\binom{m+n-j-3}{m-2}=\frac{(-)^{n+j+1}}{\Gamma(n-j)}\cdot\frac{\Gamma(2-m)}{\Gamma(j-m-n+3)}=(-)^{n+j+1}\binom{1-m}{n-j-1}$$

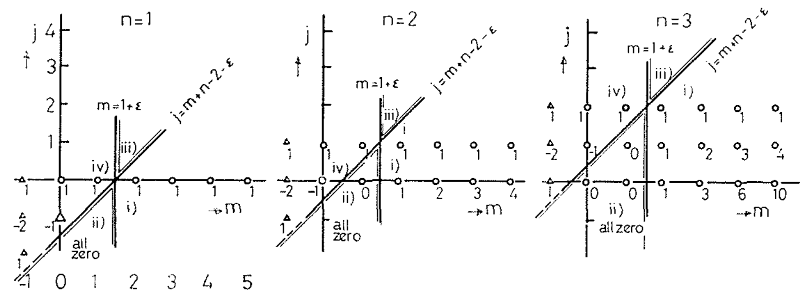

Fig. 3. Generalized binomial coefficients for $\binom{m+n-j-3}{m-2}$ $(0<\varepsilon<1)$

Area i) is the usual Pascal's triangle with partial cut.
Area ii) is all zero region and iii) is not defined.
Area iv) is the triangle with alternating signs.

なお図中に示した数値は Fig. 2 の時と同様，拡張された広義2項係数の値である。

さて先の(3-15)式の級数和の上限までで示されたものの係数は○印で示した通りであり，$m\geqq2$ では問題がない。しかし $m<2$ の場合にはこの広義2項係数は iv) 領域へと拡張されることが考えられ，(3-3-1 のように原関数の変数が変ることによって級数の片方を削除するなどという理由がない) これらを△印で示した。注意すべきは $m<2$ の時，具体的には $m=0$, $n=1$ で $j=0$ は別として $j=-1$ で値をもっていると考えられることである。

もしこのようにiv)領域まで拡張された広義2項係数値が存在する(これは$m<2$に限る)なら(3-15)式，さかのぼって(3-11)式は次の形に書直されることが予想される。

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-qx}}{q^m(q+h)^n}\right\} \overset{?}{=} (-)^{m+1} D \frac{\sqrt{4Dt}^{\,m-2}}{h^n} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \sum_{j=m+n-2}^{n-1} \binom{m+n-j-3}{m-2} \frac{e^j \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right)}{\sqrt{4Dth^2}^{\,m-j-2}} \quad (m<2) \tag{3-16}$$

上式中級数和の下限は広義2項係数中零になる格子点を除外してある。

次に$m<2$の場合を(3-11)式にもとづき検討する。

3-4 $m<2$における原関数一像関数の関係 簡単のため$m=0$を考える。(3-11)式より

$$\left(h-\frac{d}{dx}\right)^n f(t) = L^{-1}\left\{\frac{e^{-qx}}{q^m}\right\}_{m=0} = L^{-1}\{e^{-qx}\}$$

$L^{-1}\left\{e^{-qx}\right\}$は(6/1)式と考えてもよいし，(3-12)式において$m=2$とし，これをxで2回微分したものと考えてもよい。すなわち次の関係がある。

$$L^{-1}\{e^{-qx}\} = \frac{x}{2\sqrt{\pi Dt^3}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} = \frac{4Dt}{4t}\cdot\frac{d^2}{dx^2} \operatorname{erfc}(x/\sqrt{4Dt}) \qquad \text{(from 3-12)} \quad (6/1)$$

したがって次の微分方程式を得る。

$$\left(h-\frac{d}{dx}\right)^n f(t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi Dt^3}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

この微分方程式は容易に解ける。すなわち

$$\begin{aligned}
f(t) &= e^{hx} \underbrace{\int_x^\infty\cdots\int}_{n} e^{-hx} \frac{x}{2\sqrt{\pi Dt^3}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} (dx)^n \\
&= -e^{hx} \underbrace{\int_x^\infty\cdots\int}_{n-1} \left\{\int^x e^{-hx} \frac{x}{2\sqrt{\pi Dt^3}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx\right\} (dx)^{n-1} \\
&= -e^{-x^2/4Dt} e^{(F+H)^2} \underbrace{\int_x^\infty\cdots\int}_{n-1} \left\{\int^F \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{D}{t}} F e^{-(F+H)^2} dF\right\} (dx)^{n-1}, \left(F=\frac{x}{\sqrt{4Dt}},\ H=h\sqrt{Dt}\right)
\end{aligned}$$

とまず1回積分する。さて上式中{ }内の積分については

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int^F F\cdot e^{-(F+H)^2} dF &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int^{F+H} (F+H) e^{-(F+H)^2} d(F+H) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} H \int^{F+H} e^{-(F+H)^2} d(F+H) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(F+H)^2} + H\cdot\operatorname{erfc}(F+H) \qquad (\text{積分定数} \equiv 0)
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
f(t) &= e^{-F^2} e^{(F+H)^2} \sqrt{\frac{D}{4t}} \underbrace{\int_x^\infty\cdots\int}_{n-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-(F+H)^2} (dx)^{n-1} \\
&\quad - e^{-F^2} e^{(F+H)^2} H \sqrt{\frac{D}{t}} \underbrace{\int_x^\infty\cdots\int}_{n-1} \operatorname{erfc}(F+H)(dx)^{n-1} \\
&= e^{-F^2} e^{(F+H)^2} \sqrt{\frac{D}{4t}} (\sqrt{4Dt})^{n-1} i^{n-2} \operatorname{erfc}(F+H) \\
&\quad - e^{-F^2} e^{(F+H)^2} H \sqrt{\frac{D}{t}} (\sqrt{4Dt})^{n-1} i^{n-1} \operatorname{erfc}(F+H)
\end{aligned}$$

$$= e^{-F^2} e^{(F+H)^2} \sqrt{\frac{D}{4t}} \sqrt{4Dt}^{\,n-1} \left\{ i^{n-2} \operatorname{erfc}(F+H) - 2H\, i^{n-1} \operatorname{erfc}(F+H) \right\}$$

を得る。この結果を使用して具体的な n 値を検討してみる。

まず $n=1$ の時

$$f(t) = e^{-F^2} e^{(F+H)^2} \sqrt{\frac{D}{4t}} \left\{ i^{-1} \operatorname{erfc}(F+H) - 2H \operatorname{erfc}(F+H) \right\}$$

$$= e^{-F^2} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} - hD\, e^{-F^2} e^{(F+H)^2} \operatorname{erfc}(F+H)$$

$$\left(\because \quad i^{-1} \operatorname{erfc}(\xi) = -\frac{d}{d\xi} \operatorname{erfc}(\xi) = -\frac{d}{d\xi} \int_\xi^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} \right) \tag{12/12}$$

であり，これは (12/12) 式に他ならない。一方 (3-16) 式より $m=0$, $n=1$ とおいて

$$f(t) = -D \frac{1}{h \cdot 4Dt} e^{-x^2/4Dt} \left\{ -1\, e^{-1} \operatorname{erfc}(F+H)(2H) + 1 \cdot e^0 \operatorname{erfc}(F+H) \cdot (2H)^2 \right\}$$

$$= e^{-F^2} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} - hD\, e^{-F^2} e^{(F+H)^3} \operatorname{erfc}(F+H)$$

$$\left(\because \quad e^{-1} \operatorname{erfc}(\xi) = e^{\xi^2} \cdot i^{-1} \operatorname{erfc}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}},\ e^0 \operatorname{erfc}(\xi) = e^{\xi^2} \operatorname{erfc}(\xi) \right)$$

となり，同一結果を与える。

$n=2$ の時

$$f(t) = e^{-F^2} e^{(F+H)^2} \sqrt{\frac{D}{4t}} \sqrt{4Dt} \left\{ \operatorname{erfc}(F+H) - 2H\, i \operatorname{erfc}(F+H) \right\}$$

$$f(t) = -D \cdot \frac{1}{h^2} \frac{1}{4Dt} e^{-F^2} \left\{ -1 \cdot e^0 \operatorname{erfc}(F+H)(2H)^2 + 1 \cdot e^1 \operatorname{erfc}(F+H)(2H)^3 \right\}$$

であり，簡単な計算で両式は等しいものであることがわかる。これは次の (17) 式の形にも書ける。

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{e^{-qx}}{(q+h)^2} \right\} = -2h \sqrt{\frac{D^3 t}{\pi}} e^{-x^2/4Dt} + D(1+hx+2h^2Dt)$$
$$e^{hx+Dth^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} + h\sqrt{Dt} \right) \tag{17}$$

次に $m=1$ を検討する。やはり (3-11) 式より

$$\left(h - \frac{d}{dx} \right)^n f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{e^{-qx}}{q^m} \right\}_{m=1} = L^{-1} \left\{ \frac{e^{-qx}}{q} \right\}$$
$$= -\frac{4Dt}{4t} \frac{d}{dx} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) = \sqrt{\frac{D}{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

の微分方程式を解く。手法は前に準ずるもので次の解を得る。

$$f(t) = e^{ht} \underbrace{\int_x^\infty \cdots \int}_{n} e^{-ht} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} (dx)^n = e^{-F^2} e^{(F+H)^2} \sqrt{4Dt}^{\,n} \sqrt{\frac{D}{4t}}\, i^{n-1} \operatorname{erfc}(F+H)$$

この結果は $n=1$ とおけば (13/16) 式であり，また (3-16) 式とも一致する。

さて像関数 $e^{-qx}/q^m/(q+h)^n$ で (m, n) はいずれも正とした（但し $n \neq 0$）ものを対象としたが，$0 \leq m < 2$ を負方向に拡張しても (3-16) 式の関係が成立する。したがって帰納的に (3-16) 式の疑問符がとれて

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-qx}}{q^m(q+h)^n}\right\}_{\substack{n>0\\ m<2}} = (-)^{m+1} D\,\frac{\sqrt{4Dt}^{\,m-2}}{h^n}\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \sum_{j=m+n-2}^{n-1} \binom{m+n-j-3}{m-2} \frac{e^j \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} + h\sqrt{Dt}\right)}{\sqrt{4Dth^2}^{\,m-j-2}} \qquad \text{(3–16′)}$$

の関係を得る。上式中級数和をとる範囲を $\sum\limits_{j=m+n-2}^{n-1}$ と書く代りに $\sum\limits_{j\leq n-1}$ としてもよい。なお広義の 2 項係数は拡張されたものであり具体的には

$$\binom{m+n-j-3}{m-2}_{m<2} = \frac{(-)^{n+j+1}}{\Gamma(n-j)}\,\frac{\Gamma(2-m)}{\Gamma(j-m-n+3)} = (-)^{n+j+1}\binom{1-m}{n-j-1}$$

であることはすでに示した。(3–16′) 式はエルミートの多項式を使って変形可能である (付録 A–3)。

4.　ま　と　め

拡張問題のラプラス変換利用解析において表れる一般的な像関数 $e^{-qx}/q^m/(q+h)^n$ $(n\geq 1)$ と原関数の関係をいくつかの手法で整理した。その中から表現の共通性で整理して Fig. 4 に示す。図示したように関係式は $m\geqslant 2$, $m\leqslant 1$ で大別される。しかし $m\leq 1$ では原関数が F のみを変数としないと約束することを除くと，存在しえる拡張された広義 2 項係数で各級数項の和をとるという共通性をもっている。なお相関の一般式は必ずしも簡単な表現ではないが，十分に見通しのきく規則性をそなえているものとみなせよう。なお積分誤差関数の関数値は別として (m, n) の組合せを指定した時当初目的としたように暗算的な容易さで相関式の関連性を計算可能である。

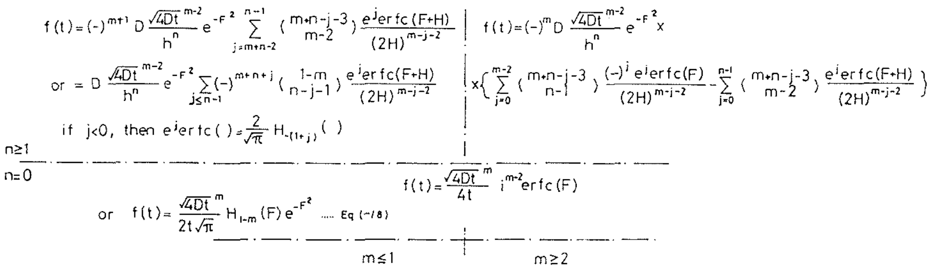

Fig. 4.　Final setting for $f(t)$ of $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$—its image function.

The image are restricted to a type of $e^{-qx}/q^m/(q+h)^n$, where $q=\sqrt{p/D}$.

他に付随的に積分誤差関数の性質，$e^{\pm m} \operatorname{erfc}(x)$ の導入，$\operatorname{erfc}(x+y)$ の展開，$i^n \operatorname{erfc}(x)$ の $\operatorname{erfc}(x)$ と e^{-x^2} による分解など，を検討したがこれらは付録としてまとめた。

なお $m\geq 2$ の場合の Carslaw-Jaecer などに記されている相関との比較を紙面の都合上省略したものもあるが，いずれも簡単に一致を確認出来るであろう。

謝　　　辞

この報告にあたり，工業数学講座，佐久間哲郎教授の御教唆をいただきました。深く感謝致します。

付録　A-1　h-微分による $e^{-qx}/q(q+h)^n$ の導出

n が 1 の時のラプラス変換による原関数，像関数の関係はすでに式が存在 (13/16) し，利用可能である。すなわち

$$\frac{e^{-qx}}{q(q+h)} = D\cdot L\left\{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\, e^{\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right)^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right)\right\} \qquad (13/16)$$

において h を変数とみなし両辺を h で $(n-1)$ 回微分する。

$$\text{左辺の } h \text{ 微分} = \frac{e^{-qx}}{q}\left(\frac{d}{dh}\right)^{n-1}\frac{1}{q+h} = (-)^{n-1}(n-1)!\,\frac{e^{-qx}}{q(q+h)^n} \qquad (\text{A-1})$$

$$\text{右辺の } h \text{ 微分} = L\left\{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(\frac{d}{dh}\right)^{n-1}\left[e^{\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right)^2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right)\right]\right\} \qquad (\text{A-2})$$

右辺についてはライプニッツの定理により

$$\left(\frac{d}{dh}\right)^{n-1}\left\{e^{\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right)^2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right)\right\}$$
$$= \sqrt{Dt}^{\,n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\binom{n-1}{r}\left(\frac{d}{dH}\right)^{n-1-r} e^{(H+F)^2}\cdot\left(\frac{d}{dH}\right)^{r}\operatorname{erfc}(H+F)\Bigg|_{\substack{H=h\sqrt{Dt}\\ F=x/\sqrt{4Dt}}} \qquad (\text{A-3})$$

と書ける。級数中 $r=0$ のときのみ若干表示が異なるので，これを区別して，

$$= \sqrt{Dt}^{\,n-1}\left\{\left(\frac{d}{dH}\right)^{n-1} e^{(H+F)^2}\right\}\operatorname{erfc}(H+F)$$
$$+\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n-1}{r}\sqrt{Dt}^{\,n-1}\left(\frac{d}{dH}\right)^{n-1-r} e^{(H+F)^2}\left(\frac{d}{dH}\right)^{r-1}\left\{\left(\frac{d}{dH}\right)\operatorname{erfc}(H+F)\right\} \qquad (\text{A-4})$$

と書く。式中右辺第 2 項の $\operatorname{erfc}(H+F)$ を微分すると

$$\frac{d}{dH}\operatorname{erfc}(H+F) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-(H+F)^2} \qquad (\text{A-5})$$

であるから，微分は $(d/dH)^{n-1}e^{(H+F)^2}$, $(d/dH)^{n-1-r}e^{(H+F)^2}$ などを実施すればよい。これは次のエルミートの多項式[5] を利用して整理可能である。

$$H_n(x) = (-)^n e^{x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} = \sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{(-)^m\, n!}{m!\,(n-2m)!}(2x)^{n-2m} \qquad (\text{A-6})$$

$$H_n(ix) = i^n e^{-x^2}\left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{x^2} = \sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{n!}{m!\,(n-2m)!}(2x)^{n-2m}\, i^n$$

$$(i:\ \text{imaginary unit, used only here}) \qquad (\text{A-6}')$$

これらを用いて今問題としている h の $(n-1)$ 次微分を書き直すと

$$\left(\frac{d}{dH}\right)^{n-1}\left[e^{(H+F)^2}\operatorname{erfc}(H+F)\right] = \left\{\sqrt{4Dt}\,(H+F)\right\}^{n-1}\left\{\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(n-1)!\,e^{(H+F)^2}\operatorname{erfc}(H+F)}{m!\,(n-1-2m)!\,(2H+2F)^{2m}}\right.$$
$$\left.+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1-r}{2}\right]}\sum_{m'=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}\frac{(n-1)!\quad(-)^{r+m'}}{r\cdot m!\,(n-1-r-2m)!\,m'!\,(r-1-2m')!\,(2H+2F)^{2m+2m'+1}}\right\}$$
$$(\text{A-7})$$

である。この関係を右辺の h 微分式に代入し，左辺の h 微分と等置して次の関係を得る。

$$\frac{e^{-qx}}{q(q+h)^n} = D\cdot L\left\{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left(-\sqrt{4Dt}\,(H+F)\right)^{n-1}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{e^{(H+F)^2}\operatorname{erfc}(H+F)}{m!\,(n-1-2m)!\,(2H+2F)^{2m}}\right.$$
$$\left.+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1-r}{2}\right]}\sum_{m'=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}\frac{(-)^{r+m'}(2H+2F)^{-(2m+2m'+1)}}{r\cdot m!\,(n-1-r-2m)!\,m'!\,(r-1-2m)!}\right. \qquad (\text{A-8})$$

さて L の $\{\cdots[\quad]\}$ 内はかなり煩雑な型であるが，これは積分誤差関数 ($i^n\,\mathrm{erfc}\,x$) を，$n=0$ とした誤差関数 ($\mathrm{erfc}\,x$) と指数関数 (e^{-x^2}) を使用して書きかえたものと密接な関係にある。

積分誤差関数に関するよく知られた漸化式

$$2n\,i^n\,\mathrm{erfc}\,(x)=i^{n-2}\,\mathrm{erfc}\,(x)-2x\,i^{n-1}\,\mathrm{erfc}\,(x),\;\left(i^{-1}\,\mathrm{erfc}\,(x)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2},\;i^0\,\mathrm{erfc}\,(x)\equiv\mathrm{erfc}\,(x)\right) \tag{A-9}$$

を用い，かつ帰納法で容易に証明できる次の関係が成立する。

$$\begin{aligned}e^{x^2}\,i^n\,\mathrm{erfc}\,(x)&=(-x)^n\left\{\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{e^{x^2}\,\mathrm{erfc}\,(x)}{m\,!\,(n-2m)\,!\,(2x)^{2m}}\right.\\&\left.+\sum_{r=1}^{n}\sum_{m=0}^{\left[\frac{n-r}{2}\right]}\sum_{m'=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}\frac{(-)^{r+m'}(2x)^{-(2m+m'+1)}}{r\cdot m\,!\,(n-r-2m)\,!\,m'\,!\,(r-1-2m')\,!}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right\}\quad(n\geq 0)\end{aligned} \tag{A-10}$$ *

(A-10) 式中 n を $n-1$ で書きかえ，かつ $x=H+F$ とおいた関係を (A-8) 式に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{e^{-qx}}{q(q+h)^n}&=DL\left\{e^{-F^2}(-\sqrt{4Dt}\,(H+F))^{n-1}\frac{e^{(H+F)^2}\,i^{n-1}\,\mathrm{erfc}\,(H+F)}{(-(H+F))^{n-1}}\right\}\\&=DL\left\{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\sqrt{4Dt}^{\,n-1}\,e^{\left(h\sqrt{Dt}+\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)^2}\,i^{n-1}\,\mathrm{erfc}\left(h\sqrt{Dt}+\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right\}\end{aligned} \tag{A-11}$$

(A-11) 式は本文で求めた一般式 (3-15) 中 $m=1$ の場合であることは容易に確かめられ得る。

A-2 極限算法による h の消去

$h\fallingdotseq 0$ の相関から h を消去した式を求めようとする時，単に $h=0$ としたのでは不定形になることもある。例えば (16) 式から (11) 式へ変形する極限算法を取上げてみる。(16) 式を仮に $f(h)$ とおく。

$$\begin{aligned}f(h)&=\frac{D}{(-)^n}\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\\&\left\{\frac{e^{\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right)^2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right)-\sum_{r=0}^{n-1}(-2h\sqrt{Dt})^r\,e^{\frac{x^2}{4Dt}}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)}{h^n}\right\}\\&\equiv\frac{D}{(-)^n}\,e^{-\frac{x^2}{4Dt}}\left\{\frac{\mathrm{NUM}}{\mathrm{DEN}}\right\}\end{aligned} \tag{16}$$

常法により $\{\quad\}$ 内の分子，分母を別々に h で $(n-1)$ 回微分する。

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dh}\right)^{n-1}\mathrm{NUM}&=\left(\frac{d}{dh}\right)^{n-1}\left[e^{\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right)^2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}+h\sqrt{Dt}\right)\right]\\&\quad-\left(\frac{d}{dh}\right)^{n-1}\left[\sum_{r=0}^{n-1}(-2h\sqrt{Dt})^r\,e^{\frac{x^2}{4Dt}}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)\right]\\&=(-\sqrt{4Dt})^{n-1}(n-1)\,!\,e^{(H+F)^2}\,i^{n-1}\,\mathrm{erfc}\,(H+F)\\&\quad-(-\sqrt{4Dt})^{n-1}(n-1)\,!\,e^{F^2}\,\mathrm{erfc}\,(F)\end{aligned}$$

$$\left(\frac{d}{dh}\right)^{n-1}\mathrm{DEN}=\left(\frac{d}{dh}\right)^{n-1}[h^n]=n\,!\,h$$

* (A-10) 式は著者らによって新しく導かれた式であると考えている。特徴は $e^{x2}\,\mathrm{erfc}\,(x)$ が決められた時 $i^n\,\mathrm{erfc}\,(x)$ は有限級数和で表わされる係数を用いて表現可能なことにある。
$n=0$ の時 (A-10) 式の第1級数和は $m=0$ の項のみ (係数$=1$)，第2級数和はとらないと約束。

$(n-1)$ 回の微分では

$$\lim_{h\to 0} f(h) = \frac{D}{(-)^n} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \lim_{h\to 0} \frac{(d/dh)^{n-1}\,\mathrm{NUM}}{(d/dh)^{n-1}\,\mathrm{DEN}}$$

$$= \frac{(-\sqrt{4Dt}\,)^{n-1}(n-1)!}{n!} \lim_{\substack{h\to 0\\ H\to 0}} \frac{e^{(H+F)^2}\, i^{n-1}\,\mathrm{erfc}\,(H+F) - e^{F^2}\,\mathrm{erfc}\,(F)}{h} = \frac{0}{0}$$

で不定形である。しかし更に1回で h 微分すると

$$\left(\frac{d}{dh}\right)\left(\frac{d}{dh}\right)^{n-1} \mathrm{NUM} = \left(\frac{d}{dh}\right)^{n} \mathrm{NUM} = (-\sqrt{4Dt}\,)^n\, n!\, e^{(H+F)^2}\, i^n\,\mathrm{erfc}\,(H+F)$$

$$\left(\frac{d}{dh}\right)^{n} \mathrm{DEN} = n!$$

であり，不定形が解消されて

$$\lim_{h\to 0} f(h) = \frac{D}{(-)^n} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \lim_{h\to 0} \frac{(d/dh)^{n}\,\mathrm{NUM}}{(d/dh)^{n}\,\mathrm{DEN}}$$

$$= \frac{D}{(-)^n} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \lim_{H\to 0} \frac{(-\sqrt{4Dt}\,)^n\, n!\, e^{(H+F)^2}\, i^n\,\mathrm{erfc}\,(H+F)}{n!}$$

$$= De^{-\frac{x^2}{4Dt}}\, e^{F^2}\, i^n\,\mathrm{erfc}\,(F)\,\sqrt{4Dt}^{\,n}\,\Big|_{F=\frac{x}{\sqrt{4Dt}}}$$

を得る。これは両辺を $\sqrt{D}^{\,2+n}$ で割ると h の消去された像関数—原関数の関係 (11) 式となる。

A-3　添字 m が負の時の積分誤差関数 $i^{-m}\,\mathrm{erfc}\,(x)$,　または $e^{-m}\,\mathrm{erfc}\,(x)$, $(=e^{x^2}\, i^{-m}\,\mathrm{erfc}\,(x))$ とエルミートの多項式の関係

積分誤差関数 $i^n\,\mathrm{erfc}\,(x)$ は次式で定義される。

$$i^n\,\mathrm{erfc}\,(x) = \int_x^\infty i^{n-1}\,\mathrm{erfc}\,(\xi)\,d\xi \qquad n = 1, 2, \cdots$$

上の関係は x に関し繰返し微分可能である。

$$i^{n-1}\,\mathrm{erfc}\,(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right) i^n\,\mathrm{erfc}\,(x)$$

$$i^{n-2}\,\mathrm{erfc}\,(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right) i^{n-1}\,\mathrm{erfc}\,(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)^2 i^n\,\mathrm{erfc}\,(x)$$

今 $n\leq 0$ の場合にもこの表記法を拡張して

$$i^{-1}\,\mathrm{erfc}\,(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right) i^0\,\mathrm{erfc}\,(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)\int_x^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\xi^2}\,d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}$$

$$i^{-2}\,\mathrm{erfc}\,(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right) i^{-1}\,\mathrm{erfc}\,(x) = \left(-\frac{d}{dx}\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

である。さて上式中右辺は付録 A-1 中 (A-6) 式で示したエルミートの多項式 $H_n(x)$ で書きなおせる。すなわち

$$i^{-1}\,\mathrm{erfc}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_0(x)\, e^{-x^2}; \quad e^{-1}\,\mathrm{erfc}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_0(x)$$

$$i^{-2}\,\mathrm{erfc}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_1(x)\, e^{-x^2}; \quad e^{-2}\,\mathrm{erfc}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_1(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

一般に次の関係が成立する

$$i^{-m}\,\mathrm{erfc}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_{m-1}(x)\, e^{-x^2}\,; \quad e^{-m}\,\mathrm{erfc}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_{m-1}(x)$$

このように任意整数を次数とする積分誤差関数 $i^n\,\mathrm{erfc}\,(x)$ はこれを単独に一つの関数とする他に e^{x^2} を乗じた関数 $e^n\,\mathrm{erfc}\,(x)$ としておくと正の n において合理的であるばかりでなく負の n についても，エルミート多項式へと連けいのとれることが明らかである。

記号および関数

D	diffusivity
F	variable $x/\sqrt{4Dt}$
H	variable $h\sqrt{Dt}$
L	Laplace transformation operator
L^{-1}	inverce Laplace transformation operator
p	parameter for $L\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$
q, h	parameters $q=\sqrt{p/D}$, h is related to the flux at the interface.
j, k, m, m', n, r, r'	integers
t	time
ε	arbitrary constant but $0<\varepsilon<1$
$e^n\,\mathrm{erfc}\,(x)$	$=e^{x^2}\, i^n\,\mathrm{erfc}\,(x)$ A single "e" is not used except $e^{\pm x^2}$, $e^0\,\mathrm{erfc}\,(x) \equiv e\,\mathrm{erfc}\,(x)$
$i^n\,\mathrm{erfc}\,(x)$	A single "i" as an imaginary unit is not used except Eq. A-6, $i^0\,\mathrm{erfc}\,(x) \equiv \mathrm{erfc}\,(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi$
$H_n(x)$	Hermite's polynomial defined by $H_n(x) = (-)^n\, e^{x^2}\, (d/dx)^n\, e^{x^{-2}}$
$\binom{m+n-j}{n-1}$	extended binomial coefficient
$\Gamma(n)$	gamma function
$[m/2]$	Gauss symbol

文　献

1) Carslaw, H. S. and J. C. Jaecer: Conduction of Heat in Solids 2nd edn. Oxford (1959).
2) Crank, J.: Mathematics of Diffusion 2nd edn Oxford (1975).
3) Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi: Higher Transcendental Functions, I Bateman Manuscript Project. N. Y.-Tronto-London McGraw-Hill. (1953).
4) Erdélyi, A., W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi: Tables of Integral Transforms., I Bateman Manuscript Project. p. 245. N. Y.-Tronto-London McGraw-Hill. (1954).
5) 犬井鉄郎: 特殊関数. 岩波 (1966).
6) 木村俊房: 常微分方程式の解法. 培風館 (S. 33).
7) 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信: 数学公式 I, II. 岩波 (1964, 65).
8) 宇野利雄, 洪 姙植: ラプラス変換. 共立 (1979).