HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	PRT多バース駅における出発待ち行列の解析
Author(s)	栗原, 正仁; 中田, 勝啓; 加地, 郁夫
Citation	北海道大學工學部研究報告, 111, 37-48
Issue Date	1982-10-30
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/41761
Type	bulletin (article)
File Information	111_37-48.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

北海道大学工学部研究報告
第111号（昭和57年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 111 (1982)

PRT多バース駅における出発待ち行列の解析

栗原正仁* 中田勝啓** 加地郁夫*

(昭和57年6月30日受理)

Analysis of Departure Queue in PRT Multiberth Station

Masahito KURIHARA, Katsuhiro NAKADA and Ikuo KAJI

(Received June 30, 1982)

Abstract

A multiberth off-line station in personal rapid transit systems (PRT) is modeled as a Markov renewal process with some non-regeneration points. Several measures of effectiveness, such as expected departure queue length, expected waiting time for departure, entrance factor, utilization factor, and departure rate are calculated.

The numerical examples illustrate the relationships among them under several traffic conditions.

1. まえがき

PRT(Personal Rapid Transit system)[16]は新交通システムの一つに分類されるもので，デマンド運転による完全な個別輸送システムである。路線形状は一般に密なネットワーク状であり，駅はオフラインに設けられ，本線の車両の流れを妨げないようにしている。車両は2～6人乗りと小さく，3秒以下という最小運転時隔で自動運行される。我が国では CVS(Computer-controlled Vehicle System)[17,18]がその代表的なものである。

筆者らはPRTのトラヒック制御の立場から,その基礎研究として十字路[7,13]および駅部[1→6,8,10→12]をモデル化し，そのふくそう現象を解析してきた。特に文献(5)(6)(8)(10)では多バース駅モデルをとりあげ，マルコフ再生理論により解析している。

多バース駅モデルが通常の待ち行列モデルと著しく異なる点は，駅のバース(サービス窓口)にいる車両（トランザクション）は，客の乗降（サービス）が終了しても直ちに出駅（退去）できるとは限らない点にある。システムへの到来過程および退去過程の実現値に依存する判定条件により出発可とされてはじめて出駅できる。車両はそれまで出発待ちの状態にあり，ここに出発待ち行列が形成される。出発待ち行列の特性を明らかにすることは多バース駅設計ひいてはシステム全体の設計に有用な資料を提供するものであるが，前期文献の研究においては手法上の限界のため解析されていなかった。

* 電気工学科 系統工学講座
** 玉川大学工学部

本論文では出発待ち行列を含む駅の状態推移を，非再生点を含み得るように拡張されたマルコフ再生理論[14,15]により解析し，定常状態での平均出発待ち行列長，平均乗降車両数，平均空バース数，平均出発待ち時間，平均バース空き時間，平均入駅時間間隔，迂回率，利用率を求める。さらに数値例においては，駅に対する負荷として入力負荷，出力負荷というパラメータを定義し，この両負荷が出発待ち行列長および乗降車両数に与える影響を明らかにする。

2. モ デ ル

3.1. PRT 多バース駅モデル

図1に駅部の概略を示す。駅には n 個のバースが並列に設置される。本線への車両到来はパラメータ λ のポアソン過程に従うものとする。到来車両が入駅希望車，入駅非希望車である確率をそれぞれ β, $1-\beta$ とする。入駅希望車は，チェックポイントを通過したとき駅に空バースがあれば入駅するが，そうでなければ本線側を走行する。駅での乗降時間は各バースとも独立で平均 $1/\mu$ の指数分布に従うものとする。乗降を終了した車は出発待ちとなる。

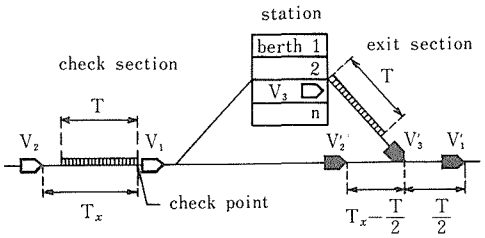

図1 PRT n バース駅概略図

バースの出口から側線に沿った部分および本線上のチェックポイントの手前の部分に走行時間にしてTに等しい車両検知区間を設け，それぞれ出口区間(Exit section) およびチェック区間(Check section) と呼ぶことにする。解析の便宜上，両区間長とも時間にして等しくTとしている。出発待ち車両は，この両区間のいずれにも他の車両が存在しないときに限り出駅できる。出口区間に車両が存在しないことは，出駅車両の車頭時間間隔を必ずT以上に保つための条件である。チェック区間に車両が存在しないことは本線との合流を安全に行なうための条件で，このとき図1に示すように合流部で合流車両の前後に T/2 以上の間隔が生じ，安全に流入できるよう設計されている。

2.2. 等価な待ち行列モデル

PRT 多バース駅モデルを抽象化した等価な待ち行列モデルを図2に示す。このモデルは車両

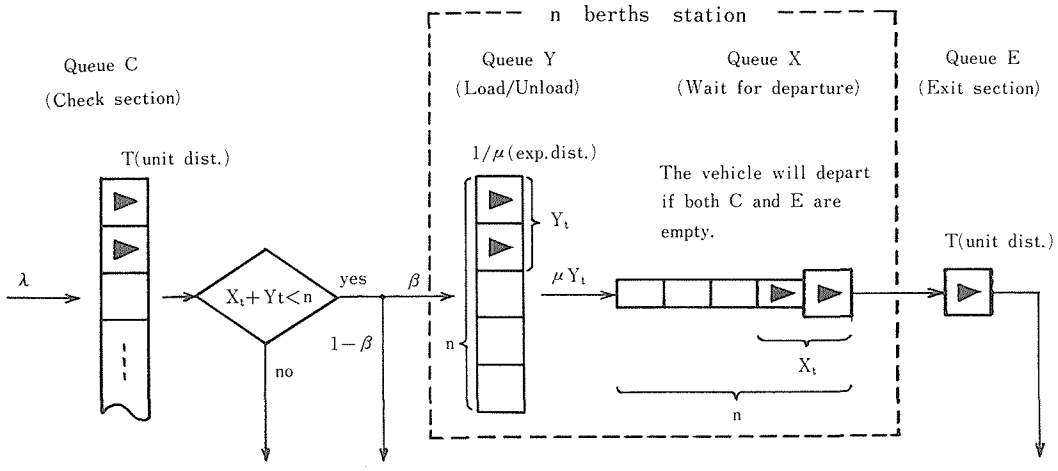

図2 等価な待ち行列モデル

をトランザクションとし，サービス施設として直列な4つのキュー (queue)を持つ。

キューCはサービス窓口を無限個持つ。各々のサービス時間は一定値Tである。サービスはチェック区間通過中であることに対応する。

キューYは，バース数に等しいn個の窓口を持ち，待ち合い室を持たない。各々のサービス時間は平均$1/\mu$の指数分布に従う。サービスは乗降中であることに対応する。時刻tにおいてこのキュー内にいる車両の数，すなわち乗降車両数をY_tと表わす。

キューXは，1個のサービス窓口と n−1個の待ち合い室を持つ。サービス時間は他のキューの状態に依存する。すなわち，キューC及びキューEのいずれも空($idle$)のとき直ちにサービスが終了する。サービスは出発待ち車両群のうち次に出発できる1台に選ばれている車両が，出発可能になるのを待っている状態に対応する。待ち合い室内の車は，出発待ち車両群のうち次に出発できる1台に選ばれるのを待っている車である。時刻tにおいてこのキュー内にいる車両の数、すなわち出発待ち行列長をX_tと表わす。

キューEは1個のサービス窓口のみからなる。サービス時間は一定値Tである。サービスは出口区間通過中であることに対応する。

キューXおよびYの状態がnバース駅の状態を表わしている。時刻tにおける空バース数は，$Z_t = n - X_t - Y_t$で表わされる。

次に，この4つのキューを移動する車両の流れを述べる。車両はキューCへパラメータλでポアソン到来する。キューCでのサービスが終わるとチェックポイントに達する。ここで入駅希望車 (確率β) でかつ空バースが存在する ($X_t + Y_t < n$) ときはキューYへ進むが，それ以外のときはシステムから立ち去る。キューYへ進んだ車両はすでに述べたサービス規律に従ってキューX，キューEの順に進み，システムから立ち去る。

チェックポイント及びキューXへの到来過程はそれぞれパラメータλ，μY_tのポアソン到来となっていることに注意されたい。

図2において，特にT=0のときはキューC，キューEは削除してよい。又，キューXのサービス時間も0となるのでキューXも削除でき，結局キューYのみとなる。従ってこのシステムは平均$1/\mu$の指数サービスを行なうn個の窓口を持ち，待ち合い室を持たないブロッキングシステムで，到来がパラメータ$\beta\lambda$のポアソン過程で表わせるM/M/n(0)モデルとなる。この場合，定常状態において$X_t = x$，$Y_t = y$である確率$R(x, y)$は従来の理論から

$$R(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \quad x > 0 \\ \dfrac{\frac{1}{y!}\left(\frac{\beta\lambda}{\mu}\right)^y}{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(\frac{\beta\lambda}{\mu}\right)^k} & ; \quad x = 0 \end{cases} \tag{1}$$

又，ブロック率は，

$$D = R(0,\ n) \tag{2}$$

となる。Tが大きくなるにつれて$x > 0$である確率が増し，出発待ち行列が形成され，又ブロック率が増すものと考えられる。

以下での本論文の第一の目的は，一般に$T \geqq 0$のときの$R(x, y)$およびDを求めることである。

3. 状態の定義と推移

3.1. 再生点と非再生点

出発待ち車両はチェック区間および出口区間に車両がいないときに限り出駅できると述べたが，実際には両区間を常に観測している必要はない。次の両条件を満たす時点にチェック区間のみを観測すればよい。

- 出口区間には絶体に車両がいない。
- チェック区間に車両がいるか否かは観測しなければわからない。

この両条件を満たすため，次のような規則で出発可否判定を行う。

(1) 時刻 t_0 で出発可 ($T_x \geqq T$) と判定されたとき，その後Tだけ経過した時点 t_0+T まで判定は行わない。(1−a) 時刻 t_0+T において出発待ち車両がいれば直ちに判定を行い，(1−b) 時刻 t_0+T において出発待ち車両がいなければ，その後出発待ちが生じ次第判定を行う。

(2) 時刻 t_0 で出発不可 ($T_x \leqq T$) と判定されたときは，チェック区間内の先頭車がチェックポイントを通過する時点 t_0+T_x まで判定は行わない。時刻 t_0+T_x において再度判定を行う。

但し，T_x は図1に示されるように，次の到来車がチェックポイントを通過するまでの時間である。出発可否判定を行う時点においては，T_x は平均 $1/\lambda$ の指数分布に従っている。その理由を簡単に述べる。(2) の再判定の時点については明らかであろう。(1−a) の場合，時刻 t_0+T において，次の到来車がチェックポイントを通過するまでの時間を $T'_x=T_x-T$ とする。T_x が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従うとき，$T_x \geqq T$(出発可) の条件の下で T_x-T は平均 $1/\lambda$ の指数分布に従うので，時点 t_0+T において T'_x は平均 $1/\lambda$ の指数分布に従うことがわかる。又，このことから (1−b) の判定時点についても到来が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従うことが明らかとなる。

さて，次に X_t, Y_t の値が変化する時点，及び X_t, Y_t の値は変らないが確率過程 (X_t, Y_t) が再生する時点に着目する。次の時点はいずれも再生点となる。

〔時点S〕 出発可の判定後，Tだけ経過した時点 (t_0+T)

〔時点F〕 出発不可と判定させたチェック区間中の先頭車両がチェックポイントを通過した時点 (t_0+T_x)

〔時点E〕 出発待ち車両がいなくなってT以上経過しているとき，入駅が発生した時点

〔時点R〕 出発待ち車両がいなくなってT以上経過しているとき，乗降中車両のうち1台が乗降を終了し，出発可否判定を受ける時点

又，次の時点はいずれも非再生点である。

〔時点$\hat{S}_0$〕 出発可と判定され，直ちに出発待ち車両が出駅した時点

〔時点$\hat{S}$〕 出発可の判定後時間T以内に，乗降中車両のうち1台が乗降を終了し，出発待ちとなった時点

〔時点$\hat{F}$〕 出発不可の判定後時間 T_x 以内に，乗降中車両のうち1台が乗降を終了し，出発待ちとなった時点

さらに次のように記号を約束する。

S_ν: 時点Sのうち特に，時間Tの間に ν 台の乗降終了があった場合

F^0_ν, F^1_ν: 時点Fのうち特に，時間 T_x の間に ν 台の乗降終了があった場合で，出発不可と判定させたチェック区間内の先頭車が入駅非希望車ならば F^0_ν，入駅希望車ならば F^1_ν と記す。

$\hat{S}_\nu$: 時点$\hat{S}$のうち特に，判定後ちょうど ν 台目の乗降終了があった時点

$\hat{F}_\nu$: 時点$\hat{F}$で特に，判定後ちょうど ν 台目の乗降終了があった時点

これらの各時点と状態推移との関連は次節で明らかになる。

3.2. 状態の定義と推移

確率過程を構成するにあたり，駅の状態を単に (X_t, Y_t) としては解析が困難になる。以下では前節で述べた各時点，すなわち，X_t，Y_t が変化する時点か，又は変化しなくても適当な再生点において状態が推移するように，又，非再生点を含み得るよう拡張されたマルコフ再生理論が適用できるように状態を定義する。

状態空間 S を S_R と S_{NR} に分割して考える。ただし，

$S_R = \{ i \mid$ 状態 i に推移した時点が再生点である$\}$

$S_{NR} = \{ i \mid$ 状態 i に推移した時点が非再生点である$\}$

S_R に属する状態は (x, y) の形で表す。x，y はこの状態に推移してきた時点（再生点）から次に状態推移が起こる時点までの X_t，Y_t(一定) の値である。確率過程がこの状態に留っている間はいつでも $X_t = x$，$Y_t = y$ になっている。

S_{NR} に属する状態は $(x_R, y_R; x, y)$ の形で表す。x，y はこの状態に推移してきた時点（非再生点）から次に状態推移が起こる時点までの X_t，Y_t (一定) の値である。確率過程がこの状態に留っている間はいつでも $X_t = x$，$Y_t = y$ になっている。(x_R, y_R) は最も最近訪れた再生状態を表す。

図 3 に状態の推移規則を手続き的に示す。図において t は実時間であり，中央の大きな 3 つの

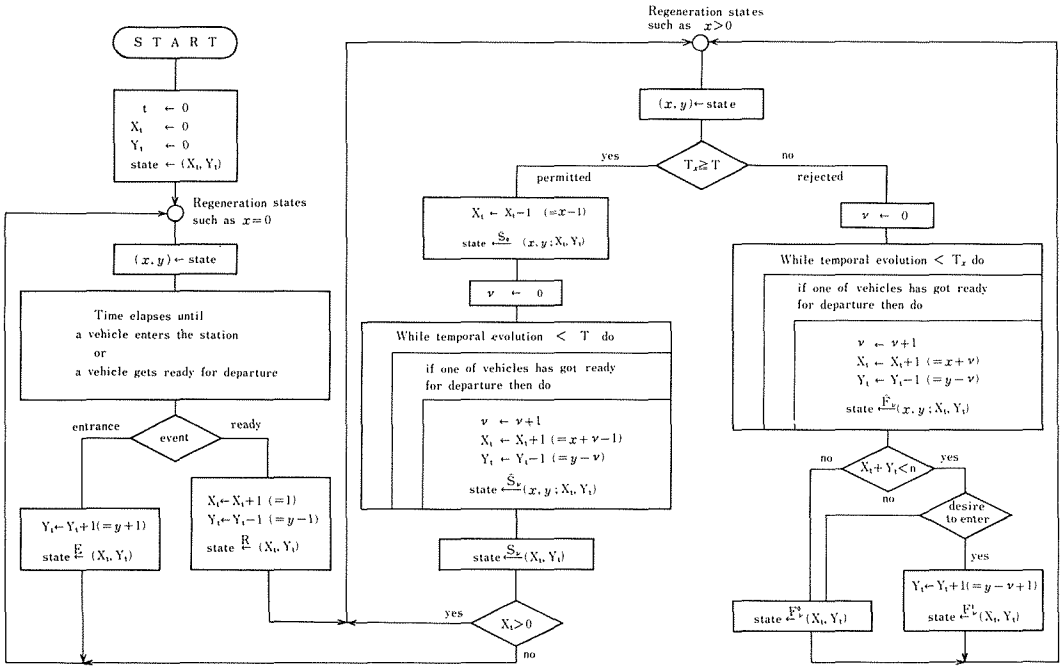

図 3 状態の推移規則

ブロックの実行中にのみ連続的に増加している。他のブロックは分岐や変数の変化を表しており時間を消費しない。state という変数が現在の状態を表している。X_t，Y_t が変化したり，再生点になったりする毎に state が更新されている。図には state への代入を示す矢線の上に，対応する時点の種類を示してある。

図 4 は，1 つの再生状態 (x, y) から次の再生状態までの推移のみに着目した状態推移図である。

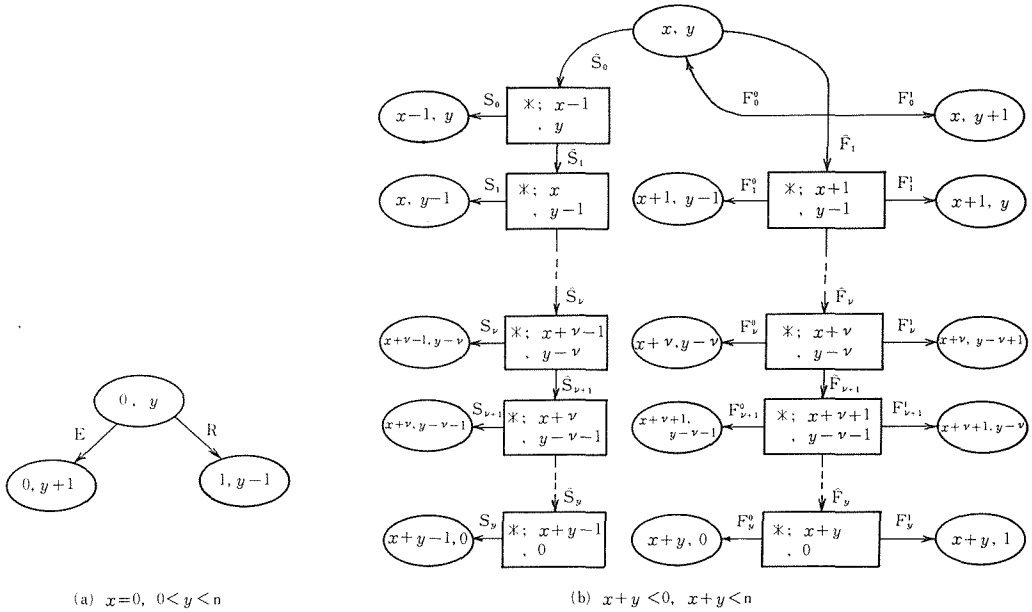

図4 再生状態間の状態推移図

図において，だ円は再生状態，矩形は非再生状態，＊は x, y を省略したものである。(a)は $x=0$，$0<y<n$ の場合で，(b)は $x>0$，$x+y<n$ の場合である。$x=y=0$ の場合は図(a)においてRに対応する矢線をはずし，$x=0$，$y=n$ の場合は図(a)においてEに対応する矢線をはずせばよい。又，$x>0$，$x+y=n$ の場合は図(b)において F^1_ν に対応する矢線をはずし，F^0_ν に対応する矢線上に，F^0_ν とともに F^1_ν を記せばよい。

以上から状態空間Sは次のように表される。

$$S = S_R \cup S_{NR} \tag{3}$$

$$S_R = \{(x, y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq n\}$$

$$S_{NR} = \{(x, y; x+\nu-1,\ y-\nu) \mid x>0,\ y \geqq 0,\ x+y \leqq n,\ 0 \leqq \nu \leqq y\}$$
$$\cup \{(x, y; x+\nu,\ y-\nu) \mid x>0,\ y>0,\ x+y \leqq n,\ 1 \leqq \nu \leqq y\}$$

状態数は以下のように求められる。

$$|S_R| = (n+1)(n+2)/2,\quad |S_{NR}| = n(n+1)(2n+1)/6$$
$$|S| = (n+1)(n^2+2n+3)/3 \tag{4}$$

3.3. 推移確率分布

尾崎らの記法によれば，時刻0で再生状態 $i \in S_R$ に推移してきたとき，時刻tまでに直接状態 $j \in S$ に推移する確率は $Q_{ij}(t)$，時刻tまでに非再生状態 $k_1, k_2, \cdots, k_m \in S_{NR}$ を経由して状態 $j \in S$ に推移する確率は $Q_{ij}^{(k_1, k_2, \cdots, k_m)}(t)$ と表される[14,15]。しかし，本モデルでは i 及び j が示されれば，これを結ぶ経路(直接または $k_1, k_2, \cdots, k_m$)は一意に定まる。従って，特に断らない限りこれを単に $Q_{ij}(t)$ と記すことにする。

再生状態から再生状態までの推移確率分布は次式となる。式の左端には対応する時点を示す。

$$\text{E:}\quad Q_{(0,y)(0,y+1)}(t) = \int_0^t \beta\lambda e^{-\beta\lambda\tau} \cdot e^{-\mu y\tau} d\tau \qquad ;\ y<n \tag{5}$$

$$\text{R: } Q_{(0,\,y)(1,\,y-1)}(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t \mu y e^{-\mu y\tau}\cdot e^{-\beta\lambda\tau}\,d\tau & ;\ 0<y<n\\ \displaystyle\int_0^t \mu n e^{-\mu n\tau}\,d\tau & ;\ y=n\end{cases} \tag{6}$$

$$S_\nu: \quad Q_{(x,\,y)(x+\nu-1,\,y-\nu)}(t)=E_{y,\,\nu}(t) \quad ;\ x>0,\ 0\leqq\nu\leqq y \tag{7}$$

$$F^0_\nu, F^1_\nu: \quad Q_{(x,y)(x+\nu,y-\nu)}(t)=\begin{cases}R_{y,\nu}(t) & ;\ x+y=n,\ x>0,\ 0\leqq\nu\leqq y\\ (1-\beta)R_{y,\nu}(t) & ;\ x+y<n,\ x>0,\ 0\leqq\nu\leqq y\end{cases} \tag{8}$$

$$F^1_\nu: \quad Q_{(x,y)(x+\nu,y-\nu+1)}(t)=\beta R_{y,\nu}(t) \quad ;\ x+y<n,\ x>0,\ 0\leqq\nu\leqq y \tag{9}$$

ただし，

$$E_{y,\nu}(t)=u(t-T)e^{-\lambda T}\Gamma_{y,\nu}(T) \quad ;\ 0\leqq\nu\leqq y \tag{10}$$

$$R_{y,\nu}(t)=\int_0^t\{1-u(\tau-T)\}\lambda e^{-\lambda\tau}\Gamma_{y,\nu}(\tau)\,d\tau \quad ;\ 0\leqq\nu\leqq y \tag{11}$$

$$\Gamma_{y,\nu}(t)=\binom{y}{\nu}(1-e^{-\mu t})^\nu(e^{-\mu t})^{y-\nu} \quad ;\ 0\leqq\nu\leqq y \tag{12}$$

$u(t)$ は単位ステップ関数，$\Gamma_{y,\nu}(t)$ は時間 t の間に y 台中ちょうど ν 台が乗降終了する確率である。

再生状態から非再生状態までの推移確率分布は次式となる。

$$\hat{S}_\nu: \quad Q_{(x,y)(x,y;\,x+\nu-1,\,y-\nu)}(t)=\begin{cases}u(t)e^{-\lambda T} & ;\ x>0,\ \nu=0\\ \displaystyle\int_0^t\{1-u(\tau-T)\}e^{-\lambda T}\gamma_{y,\nu}(\tau)\,d\tau & ;\ x>0,\ 1\leqq\nu\leqq y\end{cases} \tag{13}$$

$$\hat{F}_\nu: \quad Q_{(x,y)(x,y;\,x+\nu,\,y-\nu)}(t)=\int_0^t\{1-u(\tau-T)\}\gamma_{y,\nu}(\tau)\int_\tau^T\lambda e^{-\lambda x}dx\,d\tau \quad ;\ x>0,\ 1\leqq\nu\leqq y \tag{14}$$

ただし，$\gamma_{y,\nu}(t)=(y-\nu+1)\mu\Gamma_{y,\nu-1}(t) \quad ;\ 1\leqq\nu\leqq y$ (15)

$\gamma_{y,\nu}(t)\,dt$ は，時刻0で乗降中車両が y 台であるとき，時刻 t～t+dt でちょうど ν 台目の乗降終了が発生する確率である。すなわち，$\gamma_{y,\nu}(t)$ は，時刻 t までに y 台中ちょうど $\nu-1$ 台の乗降終了がある確率 $\Gamma_{y,\nu-1}(t)$ と，その後時間 dt 内に $y-(\nu-1)$ 台中1台が乗降終了する確率 $(y-\nu+1)\mu dt$ の積として表されている。

以上により，本モデルは式(5)～(9)及び(13)(14)で規定される拡張されたマルコフ再生過程として定式化された。これらのラプラス・スティルチェス変換形 $q_{ij}(s)$ を以下に示しておく。

$$\text{E: } q_{(0,\,y)(0,\,y+1)}(s)=\beta\lambda/(s+\beta\lambda+\mu y) \quad ;\ y<n \tag{16}$$

$$\text{R: } q_{(0,\,y)(1,\,y-1)}(s)=\begin{cases}\mu y/(s+\beta\lambda+\mu y) & ;\ 0<y<n\\ \mu n/(s+\mu n) & ;\ y=n\end{cases} \tag{17}$$

$$S_\nu: \quad q_{(x,\,y)(x+\nu-1,\,y-\nu)}(s)=\eta_{y,\nu}(s) \quad ;\ x>0,\ 0\leqq\nu\leqq y \tag{18}$$

$$F^0_\nu, F^1_\nu: \quad q_{(x,y)(x+\nu,y-\nu)}(s)=\begin{cases}\lambda\varphi_{y,\nu}(s+\lambda) & ;\ x+y=n,\ x>0,\ 0\leqq\nu\leqq y\\ (1-\beta)\lambda\varphi_{y,\nu}(s+\lambda) & ;\ x+y<n,\ x>0,\ 0\leqq\nu\leqq y\end{cases} \tag{19}$$

F^0_ν:

$$F^1_\nu: \quad q_{(x,y)(x+\nu,y-\nu+1)}(s)=\beta\lambda\varphi_{y,\nu}(s+\lambda) \quad ;\ x+y<n,\ x>0,\ 0\leqq\nu\leqq y \tag{20}$$

$$\hat{S}_\nu: \quad q_{(x,y)(x,y;\,x+\nu-1,\,y-\nu)}(s)=\begin{cases}e^{-\lambda T} & ;\ x>0,\ \nu=0\\ (y-\nu+1)\mu e^{-\lambda T}\varphi_{y,\nu-1}(s) & ;\ x>0,\ 1\leqq\nu\leqq y\end{cases} \tag{21}$$

$$\hat{F}_\nu: \quad q_{(x,y)(x,y;\,x+\nu,\,y-\nu)}(s)=(y-\nu+1)\mu[\varphi_{y,\nu-1}(s+\lambda)-e^{-\lambda T}\varphi_{y,\nu-1}(s)] \quad ;\ x>0,\ 1\leqq\nu\leqq y \tag{22}$$

ただし，

$$\eta_{y,\nu}(s)=\binom{y}{\nu}(1-e^{-\mu T})^\nu e^{-[s+\lambda+\mu(y-\nu)]T} \tag{23}$$

$$\varphi_{y,\nu}(s)=\binom{y}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^k\binom{\nu}{k}\frac{1-e^{-[s+\mu(y-\nu+k)]T}}{s+\mu(y-\nu+k)} \tag{24}$$

である。$\varphi_{y,\nu}(s)$ は $\int_0^t\{1-u(\tau-T)\}\Gamma_{y,\nu}(\tau)d\tau$ のラプラス・スティルチェス変換である。

以上の分布においては式(25)(26)の関係が成立することが確かめられる。ただし，式(25)(26)においては本節冒頭で述べた省略記法は用いていない，従って，$q_{ij}(0)$ は状態が i から直接 j へ推移する確率を表し，$q_{ij}^{(k_1,\cdots,k_m)}(0)$ は，いま状態が i であるときその後 k_1, k_2, …, k_m, j という推移が行われる確率を表す。

$$\sum_{j\in S} q_{ij}(0)=1 \quad ; \quad i\in S_R \tag{25}$$

$$q_{ij}^{(k_1,k_2,\cdots,k_m)}(0)=\sum_{l\in S} q_{il}^{(k_1,k_2,\cdots,k_m,j)}(0) \quad ; \quad i\in S_R;\ k_1,k_2,\cdots,k_m, j\in S_{NR} \tag{26}$$

いま，状態空間が再生状態のみの集合 S_R であり，推移確率分布が式(5)～(9)又は(16)～(20)で与えられるような新たな確率過程を考え，これを埋め込まれたマルコフ再生過程と呼ぶ。これは，もとの過程が非再生状態 $(x_R, y_R; x, y)$ であっても，新たな過程においては状態 (x_R, y_R) にとどまっているように構成したものである。又，埋め込まれたマルコフ再生過程の式(16)～(20)において $s=0$ とおいたものを推移確率として構成されるマルコフ連鎖を，対応するマルコフ連鎖と呼ぶ。

4. 解析および数値例

4.1. 極限確率

時刻0で状態が i であるとの条件の下で，時刻 t において状態が j である確率のラプラス・スティルチェス変換形を $p_{ij}(s)$ と表す。この確率は，図4を参照し，時刻 t までに状態 i に再帰しない場合と，時刻 t までに状態 i に再帰した後 $p_{ij}(s)$ に従う場合に分けて考えると次式を得る。

$$p_{(0,y)(0,y)}(s)=1-\delta(n-y)\,q_{(0,y)(0,y+1)}(s)-\delta(y)\,q_{(0,y)(1,y-1)}(s) + h_{(0,y)(0,y)}(s)\,p_{(0,y)(0,y)}(s) \tag{27}$$

$$p_{(x,y)(x,y)}(s)=1-q_{(x,y)(x,y,x-1,y)}(s)-\delta(y)q_{(x,y)(x,y;x+1,y-1)}(s)-\lambda\varphi_{y,0}(s+\lambda) + h_{(x,y)(x,y)}(s)\,p_{(x,y)(x,y)}(s) \quad ; \quad x>0 \tag{28}$$

$$p_{(x,y)(x,y;x+\nu-1,y-\nu)}(s)=q_{(x,y)(x,y;x+\nu-1,y-\nu)}(s)-\delta(y-\nu)\,q_{(x,y)(x,y;x+\nu,y-\nu-1)}(s)-q_{(x,y)(x+\nu-1,y-\nu)}(s) + h_{(x,y)(x,y)}(s)\,p_{(x,y)(x,y;x+\nu-1,y-\nu)}(s) \quad ; \quad x>0,\ 0\leqq\nu\leqq y \tag{29}$$

$$p_{(x,y)(x,y;x+\nu,y-\nu)}(s)=q_{(x,y)(x,y;x+\nu,y-\nu)}(s)\delta(y-\nu)\,q_{(x,y)(x,y;x+\nu+1,y-\nu-1)}(s)-\lambda\varphi_{y,\nu}(s+\lambda) + h_{(x,y)(x,y)}(s)\,p_{(x,y)(x,y;x+\nu,y-\nu)}(s) \quad ; \quad x>0,\ 1\leqq\nu\leqq y \tag{30}$$

ただし，

$$\delta(k)=\begin{cases}1\ ;\ k>0\\ 0\ ;\ k=0\end{cases} \tag{31}$$

又，$h_{ij}(s)$ は状態 $i\in S_R$ から $j\in S_R$ までの初期通過時間分布のラプラス・スティルチェス変換形であり，埋め込まれたマルコフ再生過程から求め得る。特に $h_{(x,y)(x,y)}(s)$ は状態 (x,y) における再帰時間分布である。$\lambda\varphi_{y,\nu}(s+\lambda)$ は $x+y=n$ のときは $q_{(x,y)(x+\nu,y-\nu)}(s)$，$x+y<n$ のときは $q_{(x,y)(x+\nu,y-\nu)}(s)+q_{(x,y)(x+\nu,y-\nu+1)}(s)$ の値である。

式(27)～(30)から $p_{(x,y)(x,y)}(s)$，$p_{(x_R,y_R)(x_R,y_R;x,y)}(s)$ の形をしたすべての確率が求まる。初期状態が一般に (x_0, y_0) の場合は，それぞれ，

$$p_{(x_0,y_0)(x,y)}(s)=h_{(x_0,y_0)(x,y)}(s)\,p_{(x,y)(x,y)}(s) \quad ; \quad (x_0,y_0)\neq(x,y) \tag{32}$$

$$p_{(x_0,y_0)(x_R,y_R;x,y)}(s)=h_{(x_0,y_0)(x_R,y_R)}(s)\,p_{(x_R,y_R)(x_R,y_R;x,y)}(s)\ ;(x_0,y_0)\neq(x_R,y_R) \tag{33}$$

により定まる。

次に定常状態を考える。$t\to\infty$ のとき $H_{ij}(t)\to1$ であるから，$s\to0$ のとき $h_{ij}(s)\to1$ が成り立っている。従って，式(32)(33)より，定常状態 $(s\to0)$ では $p_{ij}(0)$ は i に無関係となることがわか

る。定常状態において状態が $j\in S$ である確率を $p_j=p_{ij}(0)$ と表す。式(27)～(30)の両辺に対して演算$[(-\partial/\partial s)\cdot]_{s\to 0}$ を行い，微分を具体的に計算すれば次式を得る。

$$p_{(0,y)}=\begin{cases}[1/\mu n]/\bar{h}_{(0,n)(0,n)} & ;\ y=n\\ [1/(\beta\lambda+\mu y)]/\bar{h}_{(0,y)(0,y)} & ;\ y<n\end{cases} \tag{34}$$

$$p_{(x,y)}=[y\mu\{\bar{\varphi}_{y,0}(\lambda)-e^{-\lambda T}\bar{\varphi}_{y,0}(0)\}+\lambda\bar{\varphi}_{y,0}(\lambda)]/\bar{h}_{(x,y)(x,y)} \quad ;\ x>0 \tag{35}$$

$$p_{(x,y;x+\nu-1,y-\nu)}=[-\delta(\nu)(y-\nu+1)\mu e^{-\lambda T}\bar{\varphi}_{y,\nu-1}(0)+(y-\nu)\mu e^{-\lambda T}\bar{\varphi}_{y,\nu}(0)+T\eta_{y,\nu}(0)]/\bar{h}_{(x,y)(x,y)} \quad ;\ x>0,\ 0\leqq\nu\leqq y \tag{36}$$

$$p_{(x,y;x+\nu,y-\nu)}=[-(y-\nu+1)\mu\{\bar{\varphi}_{y,\nu-1}(\lambda)-e^{-\lambda T}\bar{\varphi}_{y,\nu-1}(0)\}+(y-\nu)\mu\{\bar{\varphi}_{y,\nu}(\lambda)-e^{-\lambda T}\bar{\varphi}_{y,\nu}(0)\}+\lambda\bar{\varphi}_{y,\nu}(\lambda)]/\bar{h}_{(x,y)(x,y)} \quad ;\ x>0,\ 1\leqq\nu\leqq y \tag{37}$$

ただし，

$$\bar{\varphi}_{y,\nu}(s)=-\partial\varphi_{y,\nu}(s)/\partial s=\binom{y}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu}(-1)^k\binom{\nu}{k}\frac{1-[1+\{s+\mu(y-\nu+k)\}T]e^{-\{s+\mu(y-\nu+k)\}T}}{[s+\mu(y-\nu+k)]} \tag{38}$$

$$\bar{h}_{jj}=[-\partial h_{jj}(s)/\partial s]_{s\to 0} \tag{39}$$

平均再帰時間 $\bar{h}_{jj}(j\in S_R)$ は，埋め込まれたマルコフ再生過程に対応するマルコフ連鎖の極限確率 $\pi_i(i\in S_R)$ を用いて

$$\bar{h}_{jj}=(\sum_{i\in S_R}\pi_i\bar{b}_i)/\pi_j$$

で算出できる。ただし，$\bar{b}_i$ は埋め込まれたマルコフ再生過程の状態 i における平均滞在時間であり，

$$\sum_{\nu=0}^{y}\eta_{y,\nu}(s)=e^{-(s+\lambda)T} \tag{41}$$

$$\sum_{\nu=0}^{y}\varphi_{y,\nu}(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s} \tag{42}$$

であることに注意すれば次式となる。

$$\bar{b}_{(x,y)}=[-\frac{\partial}{\partial s}\sum_{(x',y')\in S_R}q_{(x,y)(x',y')}(s)]_{s\to 0}=\begin{cases}1/\mu n & ;\ x=0,\ y=n\\ 1/(\beta\lambda+\mu y) & ;\ x=0,\ y<n\\ (1-e^{-\lambda T})/\lambda & ;\ x>0\end{cases} \tag{43}$$

4.2. 駅の評価パラメータ

定常状態において出発待ち台数 $X_t=x$，乗降車両数 $Y_t=y$ である確率を $R(x, y)$ とする。$R(x, y)$は式(34)～(37)の結果を用いて次式で計算できる。

$$R(x, y)=p_{(x,y)}+\sum p_{(x_R,y_R;x,y)} \tag{44}$$

ただし，右辺第2項の和は $(x_R, y_R;\ x, y)\in S_{NR}$ であるようなすべての (x_R, y_R) についてとることを表す。

(a) 各種平均数・平均時間　定常状態における平均出発待ち行列長を $\bar{X}=E[X_t]$，平均乗降車両数を $\bar{Y}=E[Y_t]$，平均空バース数を $\bar{Z}=E[n-X_t-Y_t]$ とする。これらは次式で求まる。

$$\bar{X}=\sum_{(x,y)\in S_R}xR(x, y),\quad \bar{Y}=\sum_{(x,y)\in S_R}yR(x, y),\quad \bar{Z}=n-\bar{X}-\bar{Y} \tag{45}$$

平均入駅時間間隔を T_S とする。1つのバースには入駅車 n 台に1台の割合で車両が入線してくるから，バースへの平均入線時間間隔は

$$T_B=nT_S \tag{46}$$

である。

1つのバースでは平均 T_B の周期で空→乗降中→出発待ち→空のサイクルを繰り返す。定常状態では平均して $\bar{X}$ バースが出発待ち，$\bar{Y}$ バースが乗降中，$\bar{Z}$ バースが空であるから，この特定のバースが出発待ち，乗降中，空である確率はそれぞれ $\bar{X}/n$, $\bar{Y}/n$, $\bar{Z}/n$ である。又これらの確率は，それぞれ平均出発待ち時間 t_x，平均乗降時間 t_y，平均バース空き時間 t_Z の周期 T_B に対する比と考えられる。従って

$$(t_x,\ t_y,\ t_t)=(\bar{X}/n,\ \bar{Y}/n,\ \bar{Z}/n)T_B=(\bar{X},\ \bar{Y},\ \bar{Z})T_s \tag{47}$$

となる。ところで，平均乗降時間は $t_y=1/\mu$ であるから式(47)は次式となる。

$$T_S=1/\mu\bar{Y} \tag{48}$$

$$t_x=\bar{X}/\mu\bar{Y},\ t_y=1/\mu,\ t_z=\bar{Z}/\mu\bar{Y} \tag{49}$$

平均出発待ち時間 t_x は，図2においてキューX内の客数を $\bar{X}$，キューXへの平均到来頻度を $\mu\bar{Y}$ としてリトルの公式を適用して得た結果と一致している。

(b) 入駅率，利用率，不利用率　乗降中のときのみバースが有効に利用されていると考えればバースの利用率は

$$\tilde{Y}=\bar{Y}/n \tag{50}$$

となる。これに対応させ

$$\tilde{X}=\bar{X}/n \tag{51}$$

を不利用率と呼ぶ。入駅率は次式となる。

$$E=1/\beta\lambda T_S \tag{52}$$

(c) 入力負荷，出力負荷　これまで，モデルのパラメータは n, β, λ, μ, Tの5個であった。しかし，これまで単位時間のとり方は任意であったので，これを適当にとり，独立なパラメータを4個にできる。たとえばTを単位時間とし，n, β, λT, μT がすぐ考えられる。しかし，以下では平均乗降時間 $1/\mu$ を単位時間と考え，独立なパラメータを n, β, ρ, λT (ただし $\rho=\beta\lambda/n\mu$) として駅の評価パラメータを整理する。

ρ は駅の処理能力 $n\mu$ に対する入駅希望車到来頻度 $\beta\lambda$ の比である。λT はチェック区間の長さTと車両の平均到来時間間隔 $1/\lambda$ の比であり，これが大きいと出発不可とされる確率が大きくなる。後の数値例で明らかになるように，図2のシステムにおいて ρ が増すと入力側キューYの平均客数 $\bar{Y}$ が増し，λT が増すと出力側キューXの平均客数 $\bar{X}$ が増す。このことから ρ を入力負荷，λT を出力負荷と呼ぶ。

(d) 評価パラメータの整理　平均出発待ち行列長 $\bar{X}$，平均乗降車両数 $\bar{Y}$ を n で規格化し，

$$\tilde{X}=\bar{X}/n,\ \tilde{Y}=\bar{Y}/n \tag{53}$$

とおく。これらはそれぞれ式(51)(50)の不利用率，利用率でもある。これを用いて駅の主な評価パラメータを整理しておく。

バースへの平均入線時間間隔　$T_B=1/\tilde{Y}$ $(\times 1/\mu)$ (54)

平均出発待ち時間　$t_x=\tilde{X}/\tilde{Y}$ $(\times 1/\mu)$ (55)

入駅率　$E=\tilde{Y}/\rho$ (56)

式(54)(55)では単位時間が $1/\mu$ であることに注意されたい。

$E\leqq 1$ より $\tilde{Y}\leqq\rho$ がわかる。特に負荷 ρ，λT が十分小さいときは $E\simeq 1$ となるので $\tilde{Y}\simeq\rho$ である。また，$\tilde{Y}$ は各バースからの出駅頻度 $1/T_B$(台/時間・バース)にも等しくなっている。

4.3. 数　値　例

$n=2$, $\beta=0.1$ とし，ρ 及び λT を変化させたときの数値例を図5及び図6に示す。

図5に，ρ を固定し λT を変化させた場合，及び λT を固定し ρ を変化させた場合の $(\tilde{Y}, \tilde{X})$ の

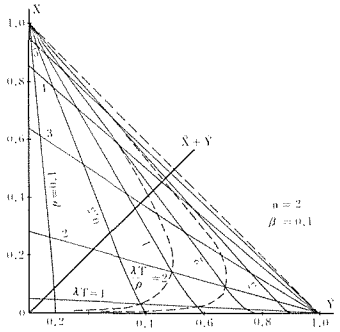

図5 （$\tilde{Y}$, $\tilde{X}$）の軌跡

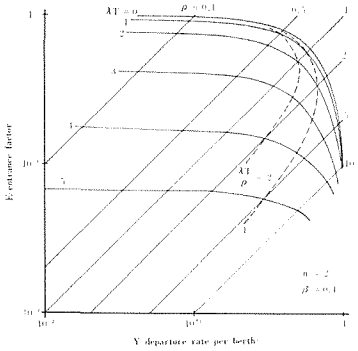

図6 （E, $\tilde{Y}$）の軌跡

軌跡を実線で，又，ρ及びλTを同じ割合で共に変化させた場合の軌跡を破線で示す。（$\tilde{Y}$, $\tilde{X}$）から$\tilde{X}+\tilde{Y}$軸へ乗線をおろせば$\tilde{X}+\tilde{Y}$が読みとれる。又（$\tilde{X}$, $\tilde{Y}$）と原点とを結ぶ直線の傾き$\tilde{X}/\tilde{Y}$は平均出発待ち時間$t_x(\times 1/\mu)$を表している。

図6には図5と同様の方法でρとλTを変化させた場合の（$\tilde{Y}$, E）の軌跡を示す。

(a) ρを固定し，λTを変化させた場合　これはn, β, λ, μを固定し，Tを変化させる状況を考えればよい。$\lambda T=0$のときはM/M/n(0)モデルとなり（$\tilde{Y}$, $\tilde{X}$）は$\tilde{Y}$軸上にある。λTが増加すると（$\tilde{Y}$, $\tilde{X}$）は（0, 1）の方向に移動し，Eは$\tilde{Y}$と同じ割合で減少する。すなわち，出力負荷が増すと出発待ち行列が長くなり，これが空バース数を減少させて入駅率低下を招くため$\tilde{Y}$が減少するものと考えられる。

(b) λTを固定し，ρを変化させた場合　これはn, β, μを固定しλを変化させる一方，$\lambda T=$一定を満たしながらTも変化させる状況を考えればよい。$\rho \ll 1$（$\lambda \ll 1$, $T \gg 1$）のとき，（$\tilde{Y}$, $\tilde{X}$）は$\tilde{X}$軸の近くにあり，t_xは非常に大きな値をとる。この理由は次のように考えられる。出発可となる確率は一定であるが，チェック区間の長さTを大きくしているため出発不可となった場合に再判定を受けるまで待つ時間が長い。又，出口区間の長さTが大きいため出発可となった場合に残りの出発待ち車両が判定を受けるまでの時間が長い。こうしてキューXのサービス率が低下し，待ち行列長および待ち時間が長くなっている。

さて，ρを増加させていく。このとき（$\tilde{Y}$, $\tilde{X}$）は（1, 0）の方向に移動し，Eは減少する。Tが小さくなり，キューXのサービス率が増加するからである。

(b) のケースはn, β, λ, Tを固定し，μを変化させる状況を考えてもよい。但し，単位時間$1/\mu$が変化するので解釈には注意を要する。ρが増加することはμが減少することに等しいが，このとき，$\tilde{Y}$の増加の割合はμの減少の割合ほどではない。そのため，キューXへの平均到着率$\mu\tilde{Y}$は減少し待ち行列長および待ち時間が減少する。しかし，出駅頻度は低下する。

(c) ρとλTを一定の割合で変化させた場合　これはn, β, μ, Tを固定しλを変化させる状況を考えればよい。λを増加させると$\tilde{X}$及び$\tilde{X}+\tilde{Y}$は単調に増加し，Eは単調に減少する。しかし$\tilde{Y}$は，λが小さいうちはρの増加による感度が大きく，増加するが，λが大きくなるとλTによる感度が大きく，減少する。$\tilde{Y}$の最大値を与えるλT[$(\lambda T)_{max}$と記す]は$\lambda T/\rho$によらずn, βで決まるほぼ一定値となる。n=2, β=0.1の場合はほぼ2.15である。

$\lambda T<(\lambda T)_{max}$のうちは$\lambda$が大きくなると，入駅率Eは低下しながらも1バース当りの出駅頻度$\tilde{Y}$は高まるが，$\lambda T>(\lambda T)_{max}$のときは$\lambda$の増大とともにE，Yとも低下する。従って，システム設計にあたっては，交通需要のピーク時においてもλTが$(\lambda T)_{max}$を越えないように設計する必要がある。

(a)(b)(c) いずれの場合も負荷を増せば $\tilde{X}+\tilde{Y}$ が増加するが，その内訳 $\tilde{X}$，$\tilde{Y}$ の変化は負荷の内訳 ρ，λT の変化により異なることに注意されたい。

5. むすび

出発待ち車両数および乗降車両数の同時分布 $R(x, y)$ を求め，これをもとに平均出発待ち行列長，平均出発待ち時間，平均乗降車両数，入駅率，利用率，出駅頻度などの諸量を求めた。更に駅に対する負荷として入力負荷と出力負荷を定義し，これらと駅評価パラメータの関係を数値的に明らかにした。これらのデータはシステム設計の際の貴重な資料となり得る。

今後の課題として，到来車種に応じた出発可否判定や乗降時間を考慮したモデル，駅への乗客の到来を考慮したモデルなどの理論解析や，駅部や交差点を含めたネットワークのシミュレーションによる解析などが残されている。

参考文献

1) 森脇，中田，小原：“CVSにおける交通密度と駅部における車両連行の問題点”，電学論(c)，97，8，pp. 141-148 (昭52-08)
2) 小原，中田：“CVS駅部モデルへのマルコフ再生理論の適用”，信学論(D)，J61-D，9，pp. 695-702 (昭53-09)
3) 中田，加地，土肥：“マルコフ再生理論によるCVS駅部モデルの車両挙動の解析”，信学論(A)，J62-A，10，pp. 705-712 (昭54-10)
4) 中田，加地，土肥：“マルコフ再生理論によるCVS駅部モデルの客オーバフローの解析”，信学論(A)，J63-A，10，pp. 702-709 (昭55-10)
5) 栗原，中田，加地：“CVC多バース駅モデルのマルコフ再生理論による解析”，信学論(A)，J64-A，9，pp. 715-722 (昭56-09)
6) 栗原，中田，加地：“状態部分集合での再帰時間を考慮したマルコフ再生理論によるCVS多バース駅モデルの解析”，信学論(A)，J65-A，7 (昭57-07)
7) 浜松，中田，加地，土肥：“個別軌道輸送システム十字路付近のモデル化とその解析”，信学論(A)，J64-A，10，pp. 835-842 (昭56-10)
8) 栗原，中田，加地：“CVS多バース駅モデルのマルコフ再生理論による解析”，北海道大学工学部研究報告，104，pp. 23-34 (昭56-05)
9) 栗原，中田，加地：“点追従制御方式をとる個別輸送システムCVSの運行シミュレータ”，北海道大学工学部研究報告，106，pp. 4 - 56 (昭56-11)
10) 栗原，中田，加地：“CVS多バース駅モデルのマルコフ再生理論による解析”，電気学会システム・制御研究会資料，SC-81-20 (昭和56-07)
11) 米山，中田，栗原，加地：“離散時間系で扱ったCVS駅部モデルの入駅時間分布の解析”，電気学会システム・制御研究会資料，SC-81-18 (昭56-07)
12) 中田，栗原，加地：“離脱客を考慮したCVS駅部モデルの客待ち行列の解析”，電気学会システム・制御研究会資料，SC-81-19 (昭56-07)
13) 浜松、中田，栗原，加地：“個別軌道輸送システム十字路モデルの車両待ち時間の解析”，電気学会システム・制御研究会資料，SC-81-21 (昭56-07)
14) Nakagawa, Osaki: “Markov Renewal Processes with Some Non-regeneration Points and Their Applications to Reliability Theory”, Microelectronics and Reliability, 15, pp. 633-636 (1976)
15) Nakagawa, Osaki: “Stochastic behavior of a two-unit standby redundant system”, INFOR, 12, 1 (1974)
16) 荒屋：“新交通システムと自動運転制御”，信学誌，64，1，pp. 43-49 (昭56-01)
17) 石井：“CVS(Computer-controlled Vehicle System)”，信学誌，56，12，pp. 1656-1659 (昭48-12)
18) 機械振興協会：“CVS 技術レポート” (昭52-03)