



Title	マルコフ連鎖によるPRT2バス駅モデルの解析
Author(s)	中村, 隆志; 栗原, 正仁; 加地, 郁夫
Citation	北海道大學工學部研究報告, 115, 47-58
Issue Date	1983-07-30
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/41807">http://hdl.handle.net/2115/41807</a>
Type	bulletin (article)
File Information	115_47-58.pdf



[Instructions for use](#)

## マルコフ連鎖による PRT 2バース駅モデルの解析

中村 隆志\* 栗原 正仁 加地 郁夫

(昭和58年3月31日受理)

### An Analysis of a PRT 2-berth Station Model by the Markov Chain Theory

Takashi NAKAMURA, Masahito KURIHARA  
and Ikuo KAJI

(Received March 31, 1983)

#### Abstract

An off-line station with two berths in personal rapid transit systems (PRT) modeled as a discrete-time Markov chain is presented. By using a flow graph modification, expressions are given for the distribution of the first passage time from each state to the state subset which corresponds to the event that a vehicle enters a station. In the case where the time of getting on and off a vehicle is fixed, an expression is then obtained for the distribution of the recurrence time of the state subset. The expression corresponds to the distribution of the interval times of entrances. The mean interval time of entrances is calculated and some numerical results are presented. Furthermore, the difference between two berths and one berth is discussed.

#### 1. ま え が き

PRT (Personal Rapid Transit system)<sup>1)</sup> はタクシーのように個人乗車を原則とする完全な個別輸送システムである。運転方式は各駅に発生するデマンドに応じて空車の配分、割り当てなどを行うデマンド運転である。駅は通過車線である本線 (Main line) から分岐した支線 (Off line) に設けられ、本線の車両の走行を妨げないようにしている。PRT の代表的なものとして我が国ではCVS (Computer-controlled Vehicle System)<sup>2)</sup> がある。

PRT の駅部モデルのふくそう解析は文献(3)~(9)に詳細に報告されている。特に文献(6), (7)では多バース駅モデルを設定し、マルコフ再生理論により解析している。これらでは入駅時間間隔分布のLS変換およびその期待値などを求めているが、実際の分布の形状は明らかになっていない。入駅時間間隔分布等の形状を明らかにすることは多バース駅設計、さらにはシステム全体の設計に有用な資料を提供するものと思われる。

本論文ではこのような目的のため、2バース駅モデルを離散時間マルコフ連鎖として解析する。それにより、入駅までの初期通過時間分布、入駅時間間隔分布などを求める。さらに1バース駅の場合との比較を行う。

---

電気工学科 系統工学講座

\*小樽商科大学商学部管理科学科勤務

## 2. 2 バース駅モデル

### 2.1 2 バース駅モデルの概要

図1に駅部の概略を示す。駅には2個のバースが並列に設置される。車両の運行は移動目標方式(Moving target method)である。すなわち、計算機内において仮想の移動セル(Moving cell)を算出し、このセルの前端を目標として1台の車両を追跡させる。セルの時間間隔は  $\Delta t$  とする。本線のセルと支線のセルは分岐部(Diverging point),合流部(Merging point)で同期するように割り当てられる。到来したセルに割り付けられた車両の有無,および車両の種類を検出するために分岐部またはその手前の本線上にチェックポイント(Check point)を設ける。チェックポイントは任意のセルがそこを通過したとき,それと同時に出発させた車両が本線上を走行するそのセルと合流部で同期できるような位置に設置される。

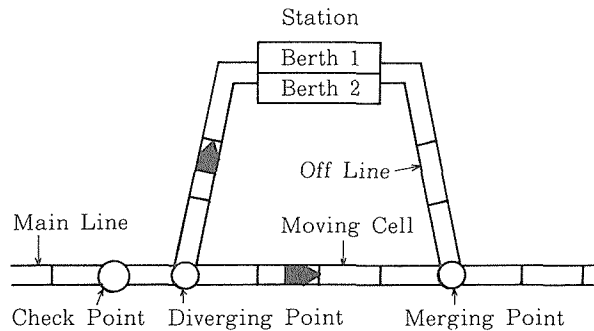


図1 PRT 2 バース駅概略図

解析の便宜上, 駅には常に客がいるものとする。

### 2.2 車両の到来

本線上の到来車両は入駅希望車(当該駅を目的とする客が乗車している車両), 空車, 他駅希望車(当該駅以外を目的とする客が乗車している車両)の3種類とする。また, 車両割付けのないセルを空セルと名付ける。

各車両および空セルの到来確率をそれぞれ次のように表わす。

$$\begin{aligned} \alpha &: \text{入駅希望車の到来確率} & \rho &: \text{空車の到来確率} \\ r &: \text{他駅希望車の到来確率} & \beta &: \text{空セルの到来確率} \end{aligned}$$

$$\alpha + \rho + r + \beta = 1 \quad (1)$$

また, 入駅希望車と空車の到来確率の和を  $\eta$  と定義しておく。

$$\eta = \alpha + \rho \quad (2)$$

### 2.3 乗降時間

駅での客の乗降は2個のバースとも独立で同一の一般分布に従うものとする。

入駅希望車, 空車の入駅から乗降終了までの時間をそれぞれ確率定数  $T_\alpha$ ,  $T_\rho$  で表わす。また,  $F_\alpha(t)$ ,  $F_\rho(t)$  をそれぞれ入駅希望車, 空車の乗降時間の確率分布関数とする。

$$F_\alpha(t) = \Pr\{T_\alpha \leq t\} \quad (3)$$

$$F_\rho(t) = \Pr\{T_\rho \leq t\} \quad (4)$$

少なくとも時刻  $t$  までは乗降が終了しない確率をそれぞれ  $R_\alpha(t)$  (入駅希望車),  $R_\rho(t)$  (空車) とする。

$$R_{\alpha}(t) = \Pr\{T_{\alpha} > t\} = 1 - F_{\alpha}(t) \quad (5)$$

$$R_{\rho}(t) = \Pr\{T_{\rho} > t\} = 1 - F_{\rho}(t) \quad (6)$$

ここで、入駅希望車、空車の車種を区別せずに客の乗降を考える。車両の入駅から乗降終了までの時間を確率変数  $T_0$  で表わす。入駅を許可された車両に対する入駅希望車、空車の割合は、それぞれ  $\alpha/(\alpha + \rho)$ ,  $\rho/(\alpha + \rho)$  であるから、少なくとも時刻  $t$  までは乗降が終了しない確率  $R(t)$  は次のように与えられる。

$$R(t) = \Pr\{T_0 > t\} = \frac{\alpha}{\alpha + \rho} R_{\alpha}(t) + \frac{\rho}{\alpha + \rho} R_{\rho}(t) \quad (7)$$

乗降が終了した車両は出駅が可能となるまで出発待ちとなる。

#### 2.4 入駅と出駅

入駅希望車、空車はチェックポイントを通過したときに駅に出发待ち車両があるか、または空いているバースがあれば本線から分岐して入駅する。このとき入駅する車両の割り付けられていたセルは本線上で空セルとなる。したがって、出発待ち車両が駅にある場合は入駅する車両がチェックポイントを通過すると同時に車両を出駅させ、合流部でこの空セルに割り付けることができる。出発待ち車両の出駅はチェックポイントを空セルが通過した場合にも可能であり、本線上を走行するこの空セルに出駅車両が割り付けられる。この場合、車両の入っていたバースは空となる。他駅希望車は常に本線上を走行するため、車両の出駅はできない。

駅には2個のバースがあるため、入駅、出駅に関し、次のような規則を設ける。

- (i) バース1、バース2がともに空となるとときに入駅希望車、空車が到来したならば、バース1に車両を入れる。
- (ii) バース1、バース2の車両がともに出発待ちとなるとときに出駅が可能となったならば、バース1の車両を出駅させる。

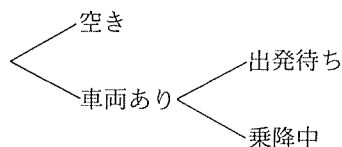
### 3. 状態の定義と推移

#### 3.1 状態の定義

各セルの前端がチェックポイントを通過する時点に着目してマルコフ連鎖モデルを形成する。時間集合  $T$  は次のような離散集合となる。

$$T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots\} \quad (8)$$

一つのバースの物理的状态は次のように分類することができる。



このバースの物理的状态を次のように数値で表わす。

- 2 : 空き
- 1 : 出発待ち

0 :	乗降経過時間 = 0	}	乗降中
1 :	乗降経過時間 = $\Delta t$		
2 :	乗降経過時間 = $2\Delta t$		
⋮	⋮		

駅の物理的状態は2個のバースの物理的状態の組み合わせとなる。この駅の状態をマルコフ連鎖モデルの状態とし、 $(i, j)$  で表わす。 $i$  はバース1の状態、 $j$  はバース2の状態を示す。

$i = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ,  $j = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$  のすべての組  $(i, j)$  が状態空間  $S$  を形成する。

### 3.2 状態の推移

任意の時点  $k\Delta t$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) で状態が  $(i, j)$  であるとき、次の時点  $(k+1)\Delta t$  で状態が  $(l, m)$  に推移する確率（推移確率）を  $p_{(i,j),(l,m)}$  とする。

ここで、車両の入駅から  $j\Delta t$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) で乗降中であるという条件で  $(j+1)\Delta t$  でも乗降中である確率を  $\sigma_j$  とする。 $\sigma_j$  は推移確率を求めるときに必要となる。式(7)より

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \Pr\{T_0 > (j+1)\Delta t | T_0 > j\Delta t\} = \Pr\{T_0 > (j+1)\Delta t\} / \Pr\{T_0 > j\Delta t\} \\ &= \frac{\alpha R_\alpha \{(j+1)\Delta t\} + \rho R_\rho \{(j+1)\Delta t\}}{\alpha R_\alpha (j\Delta t) + \rho R_\rho (j\Delta t)} \end{aligned} \quad (9)$$

次に各状態からの推移を記す。

#### a. 状態 $(-2, -2)$ からの推移

この状態では2個のバースがともに空となっている。状態推移は到来車種により決定される。

- (1) 空セル, 他駅希望車が到来したとき 駅の状態は変わらない。状態推移は  $(-2, -2) \rightarrow (-2, -2)$  である。
- (2) 入駅希望車, 空車が到来したとき 入駅規則により車両はバース1に入る。状態推移は  $(-2, -2) \rightarrow (0, -2)$  となる。

推移確率は次のようになる。

$$p_{(-2,-2),(-2,-2)} = \beta + r, \quad p_{(-2,-2),(0,-2)} = \eta \quad (10)$$

#### b. 状態 $(-2, -1), (-1, -2)$ からの推移

これらの状態では一方のバースが空、もう一方のバースが発待ちとなっている。

- (1) 他駅希望車が到来したとき 駅の状態は変わらない。状態推移は  $(-2, -1) \rightarrow (-2, -1)$  および  $(-1, -2) \rightarrow (-1, -2)$  である。
- (2) 空セルが到来したとき 出発待ち車両は出駅し、車両の入っていたバースは空となる。状態推移は  $(-2, -1) \rightarrow (-2, -2)$  および  $(-1, -2) \rightarrow (-2, -2)$  である。
- (3) 入駅希望車, 空車が到来したとき 出発待ち車両は出駅し、到来車両は入駅規則によりバース1に入る。状態推移は  $(-2, -1) \rightarrow (0, -2)$  および  $(-1, -2) \rightarrow (0, -2)$  である。

推移確率は次のようになる。

$$p_{(-2,-1),(-2,-1)} = r, \quad p_{(-2,-1),(-2,-2)} = \beta, \quad p_{(-2,-1),(0,-2)} = \eta \quad (11)$$

$$p_{(-1,-2),(-1,-2)} = r, \quad p_{(-1,-2),(-2,-2)} = \beta, \quad p_{(-1,-2),(0,-2)} = \eta \quad (12)$$

c. 状態  $(-1, -1)$  からの推移

この状態ではバース 1, バース 2 がともに出発待ちとなっている。

- (1) 他駅希望車が到来したとき 駅の状態は変わらない。状態推移は  $(-1, -1) \rightarrow (-1, -1)$  である。
  - (2) 空セルが到来したとき 出駅規則によりバース 1 の車両が出駅する。状態推移は  $(-1, -1) \rightarrow (-2, -1)$  である。
  - (3) 入駅希望車, 空車が到来したとき 出駅規則によりバース 1 の車両が出駅し, 空になったバース 1 に到来車両が入る。状態推移は  $(-1, -1) \rightarrow (0, -1)$  である。
- 推移確率は次のようになる。

$$p_{(-1,-1),(-1,-1)} = \tau, p_{(-1,-1),(-2,-1)} = \beta, p_{(-1,-1),(0,-1)} = \eta \quad (13)$$

d. 状態  $(-2, j); j = 0, 1, 2, \dots, (i, -2); i = 0, 1, 2, \dots$  からの推移

これらの状態では一方のバースが空で, もう一方のバースが乗降中となっている。状態推移は乗降が終了するか否か, および到来車種により決定される。

- (1) 乗降が終了する場合
  - (i) 他駅希望車が到来したとき 乗降中であったバースは出発待ちとなる。状態推移は  $(-2, j) \rightarrow (-2, -1)$  および  $(i, -2) \rightarrow (-1, -2)$  である。
  - (ii) 空セルが到来したとき 乗降中であったバースの車両は出駅し, そのバースは空となる。状態推移は  $(-2, j) \rightarrow (-2, -2)$  および  $(i, -2) \rightarrow (-2, -2)$  である。
  - (iii) 入駅希望車, 空車が到来したとき 乗降中であったバースの車両は出駅し, 入駅規則によりバース 1 に到来車両が入る。状態推移は  $(-2, j) \rightarrow (0, -2)$  および  $(i, -2) \rightarrow (0, -2)$  である。
- (2) 乗降が終了しない場合
  - (i) 他駅希望車, 空セルが到来したとき 乗降中のバースの乗降経過時間が  $\Delta t$  だけ増加する。状態推移は  $(-2, j) \rightarrow (-2, j+1)$  および  $(i, -2) \rightarrow (i+1, -2)$  である。
  - (ii) 入駅希望車, 空車が到来したとき 空いているバースに到来車両が入り, 乗降中のバースの乗降経過時間が  $\Delta t$  だけ増加する。状態推移は  $(-2, j) \rightarrow (0, j+1)$  および  $(i, -2) \rightarrow (i+1, 0)$  である。

推移確率は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} p_{(-2,j),(-2,-1)} &= \tau(1-\sigma_j), p_{(-2,j),(-2,-2)} = \beta(1-\sigma_j), p_{(-2,j),(0,-2)} = \eta(1-\sigma_j) \\ p_{(-2,j),(-2,j+1)} &= (\beta+\tau)\sigma_j, p_{(-2,j),(0,j+1)} = \eta\sigma_j \end{aligned} \right\} (14)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{(i,-2),(-1,-2)} &= \tau(1-\sigma_i), p_{(i,-2),(-2,-2)} = \beta(1-\sigma_i), p_{(i,-2),(0,-2)} = \eta(1-\sigma_i) \\ p_{(i,-2),(i+1,-2)} &= (\beta+\tau)\sigma_i, p_{(i,-2),(i+1,0)} = \eta\sigma_i \end{aligned} \right\} (15)$$

e. 状態  $(-1, j); j = 0, 1, 2, \dots, (i, -1); i = 0, 1, 2, \dots$  からの推移

これらの状態では一方のバースが出発待ちで, もう一方のバースが乗降中となっている。状態推移は  $(-2, j)$  の場合と同様に決定される。

- (1) 乗降が終了する場合
  - (i) 他駅希望車が到来したとき 乗降中であったバースは出発待ちとなる。状態推移は  $(-1, j) \rightarrow (-1, -1)$  および  $(i, -1) \rightarrow (-1, -1)$  である。

- (ii) 空セルが到来したとき 出駅規則によりバス1の車両が出駅し、バス1は空となる。バス2は出発待ちである。状態推移は  
 $(-1, j) \rightarrow (-2, -1)$  および  $(i, -1) \rightarrow (-2, -1)$  である。
- (iii) 入駅希望車, 空車が到来したとき 出駅規則によりバス1の車両が出駅し、空となるバス1に到来車両が入る。バス2は出発待ちである。状態推移は  
 $(-1, j) \rightarrow (0, -1)$  および  $(i, -1) \rightarrow (0, -1)$  である。

(2) 乗降が終了しない場合

- (i) 他駅希望車が到来したとき 乗降中のバスの乗降経過時間が  $\Delta t$  だけ増加する。状態推移は  $(-1, j) \rightarrow (-1, j+1)$  および  $(i, -1) \rightarrow (i+1, -1)$  である。
- (ii) 空セルが到来したとき 出発待ち車両は出駅し、その車両の入っていたバスは空となる。乗降中のバスの乗降経過時間は  $\Delta t$  だけ増加する。状態推移は  
 $(-1, j) \rightarrow (-2, j+1)$  および  $(i, -1) \rightarrow (i+1, -2)$  である。
- (iii) 入駅希望車, 空車が到来したとき 出発待ち車両は出駅し、その車両の入っていたバスに到来車両が入る。乗降中のバスの乗降経過時間は  $\Delta t$  だけ増加する。状態推移は  
 $(-1, j) \rightarrow (0, j+1)$  および  $(i, -1) \rightarrow (i+1, 0)$  である。

推移確率は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} p_{(-1, j), (-1, -1)} &= r(1 - \sigma_j), p_{(-1, j), (-2, -1)} = \beta(1 - \sigma_j), p_{(-1, j), (0, -1)} = \eta(1 - \sigma_j) \\ p_{(-1, j), (-1, j+1)} &= r\sigma_j, p_{(-1, j), (-2, j+1)} = \beta\sigma_j, p_{(-1, j), (0, j+1)} = \eta\sigma_j \end{aligned} \right\} (16)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{(i, -1), (-1, -1)} &= r(1 - \sigma_i), p_{(i, -1), (-2, -1)} = \beta(1 - \sigma_i), p_{(i, -1), (0, -1)} = \eta(1 - \sigma_i) \\ p_{(i, -1), (i+1, -1)} &= r\sigma_i, p_{(i, -1), (i+1, -2)} = \beta\sigma_i, p_{(i, -1), (i+1, 0)} = \eta\sigma_i \end{aligned} \right\} (17)$$

f. 状態  $(i, j); i = 0, 1, 2, \dots, j = 0, 1, 2, \dots$  からの推移

この状態は2個のバスが両方とも乗降中となっている。状態推移は到来車種、およびバス1, バス2の乗降がそれぞれ終了するか否かにより決定される。

(1) 両方のバスの乗降がともに終了しない場合

到来車種によらず、バス1, バス2の乗降時間がともに  $\Delta t$  だけ増加する。状態推移は  $(i, j) \rightarrow (i+1, j+1)$  である。

(2) バス1の乗降が終了し、バス2の乗降が終了しない場合

乗降中であるバス2の乗降経過時間は  $\Delta t$  だけ増加する。バス1の状態は次のように到来車種に依存する。

(i) 他駅希望車が到来したとき バス1の車両は出発待ちとなる。状態推移は  
 $(i, j) \rightarrow (-1, j+1)$  である。

(ii) 空セルが到来したとき バス1の車両は出駅する。状態推移は  
 $(i, j) \rightarrow (-2, j+1)$  である。

(iii) 入駅希望車, 空車が到来したとき バス1の車両は出駅し、バス1に到来車両が入る。状態推移は  $(i, j) \rightarrow (0, j+1)$  である。

(3) バス2の乗降が終了し、バス1の乗降が終了しない場合

バス1の乗降が終了し、バス2の乗降が終了しない場合と同様の推移となる。

(i) 他駅希望車が到来したとき 状態推移は  $(i, j) \rightarrow (i+1, -1)$  である。

(ii) 空セルが到来したとき 状態推移は  $(i, j) \rightarrow (i+1, -2)$  である。

(iii) 入駅希望車, 空車が到来したとき 状態推移は  $(i, j) \rightarrow (i+1, 0)$  である。

(4) 両方のバースの乗降がともに終了するとき

両方のバースとも車両の出駅が可能となるが、出駅規則によりバース 1 の車両が出駅する。

(i) 他駅希望車が到来したとき 両バースとも出発待ちとなる。状態推移は

$$(i, j) \rightarrow (-1, -1) \text{ である。}$$

(ii) 空セルが到来したとき バース 1 の車両が出駅し、バース 2 は出発待ちとなる。状態推移は  $(i, j) \rightarrow (-2, -1)$  である。

(iii) 入駅希望車、空車が到来したとき バース 1 の車両が出駅し、バース 1 に到来車両が入る。バース 2 は出発待ちとなる。状態推移は  $(i, j) \rightarrow (0, -1)$  である。

推移確率は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} p_{(i,j),(i+1,j+1)} &= \sigma_i \sigma_j \\ p_{(i,j),(-1,j+1)} &= \gamma(1-\sigma_i)\sigma_j, p_{(i,j),(-2,j+1)} = \beta(1-\sigma_i)\sigma_j, p_{(i,j),(0,j+1)} = \eta(1-\sigma_i)\sigma_j \\ p_{(i,j),(i+1,-1)} &= \gamma\sigma_i(1-\sigma_j), p_{(i,j),(i+1,-2)} = \beta\sigma_i(1-\sigma_j), p_{(i,j),(i+1,0)} = \eta\sigma_i(1-\sigma_j) \\ p_{(i,j),(-1,-1)} &= \gamma(1-\sigma_i)(1-\sigma_j), p_{(i,j),(-2,-1)} = \beta(1-\sigma_i)(1-\sigma_j), p_{(i,j),(0,-1)} \\ &= \eta(1-\sigma_i)(1-\sigma_j) \end{aligned} \right\} (18)$$

図 2 に状態推移図を示す。

この図から明らかのように  $(-2, 0)$ ,  $(-1, 0)$  および  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ , …… は一時状態となる。これは入駅、出駅に関する規則、および 2 個のバースに同じ時点では入駅車両が入らないことに起因している。他の状態はすべて再帰状態である。一時状態と再帰状態の状態部分集合をそれぞれ  $S_T$ ,  $S_R$  と定義しておく。

$$S_T = \{(-2, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 1), (2, 2), \dots\} \quad (19)$$

$$S_R = S - S_T \quad (20)$$

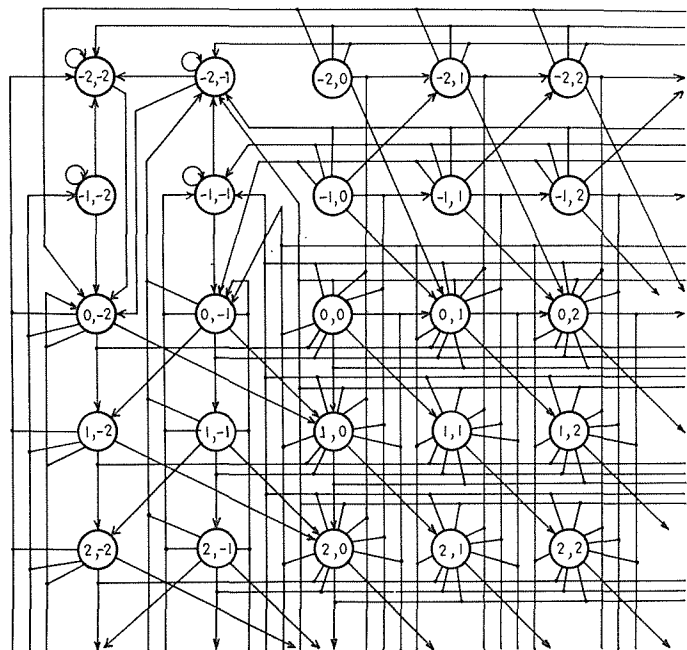


図 2 状態推移図

#### 4. 2 バース 駅モデルの解析

##### 4.1 入駅までの初期通過時間分布

入駅に対応する状態は状態  $(i, j) \in S_R$  で  $i = 0$  または  $j = 0$  の状態である。これらの状態部分集合を  $S_0$  と定義する。

$$S_0 = \{(0, -2), (0, -1), (0, 1), (0, 2), \dots, (1, 0), (2, 0), \dots\} \quad (21)$$



文献(7)と同様に各状態  $(i, j) \in S$  から状態部分集合  $S_0$  までの初期通過時間分布  $h_{(i, j), S_0}(k)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) を求める。 $h_{(i, j), S_0}(k)$  は時刻 0 で状態  $(i, j)$  にあるときに時刻  $k\Delta t$  で入駅が発生する確率である。 $k$  ステップで  $S_0$  に推移する事象は、1 ステップで  $S_0$  に推移する場合と、1 ステップで  $(l, m) \in S_0$  に推移し、その後  $h_{(l, m), S_0}(k-1)$  に従って  $S_0$  に推移する場合とが考えられるので次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} h_{(i, j), S_0}(k) &= \sum_{(l, m) \in S_0} p_{(i, j), (l, m)} \delta(k-1) + \sum_{(l, m) \in S_0} p_{(i, j), (l, m)} h_{(l, m), S_0}(k-1); k = 1, 2, \dots \\ h_{(i, j), S_0}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} (22)$$

ただし  $\delta(k) = \begin{cases} 1; k = 0 \\ 0; k \neq 0 \end{cases}$

$h_{(i, j), S_0}(k)$  の Z 変換を  $H_{(i, j), S_0}(Z)$  とする。

$$H_{(i, j), S_0}(Z) = \sum_{(l, m) \in S_0} p_{(i, j), (l, m)} Z + \sum_{(l, m) \in S_0} p_{(i, j), (l, m)} Z H_{(l, m), S_0}(Z) \quad (23)$$

図 2 の状態推移図の各状態間の弧に付けられる推移確率  $p_{(i, j), (l, m)}$  を  $p_{(i, j), (l, m)} Z$  に置き換えたフローグラフを考える。マルコフ連鎖のフローグラフによる解析は文献(10)にまとめられている。

このフローグラフに吸収状態  $a$  を加え、各状態  $(i, j) \in S$  を始点とし、 $(l, m) \in S_0$  を終点とする弧の終点を  $a$  に変えた図 3 のようなフローグラフを作成する。図 3 の各状態  $(i, j)$  から  $a$  までのゲインが状態部分集合  $S_0$  への初期通過時間分布の Z 変換  $H_{(i, j), S_0}(Z)$  となる。

図 3 より、まず  $H_{(-2, -2), S_0}(Z)$  を求め、以後、式(23)の関係をを用いながら、すべての  $H_{(i, j), S_0}(Z)$  を求める。

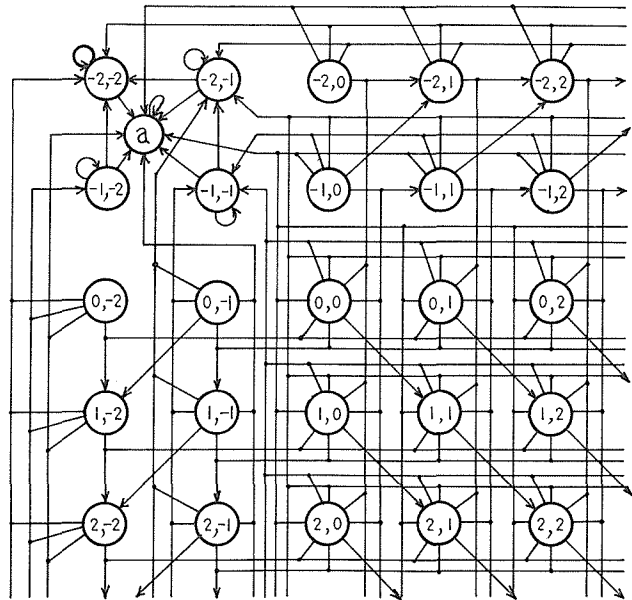


図 3 吸収状態  $a$  を加えて変形したフローグラフ

$$\begin{aligned} H_{(-2, -2), S_0}(Z) &= H_{(-2, -1), S_0}(Z) = H_{(-1, -2), S_0}(Z) = H_{(-1, -1), S_0}(Z) \\ &= H_{(-2, j), S_0}(Z) = H_{(i, -2), S_0}(Z) = H_{(-1, j), S_0}(Z) = H_{(i, -1), S_0}(Z) \\ &= \eta Z / \{1 - (1 - \eta) Z\} \quad ; i = 0, 1, 2, \dots, j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (24)$$

$$H_{(i, j), S_0}(Z) = \frac{\eta \sum_{l=0}^{\infty} (1 - \sigma_{i+l} \sigma_{j+l}) \prod_{m=0}^{l-1} (\sigma_{i+m} \sigma_{j+m}) Z^{l+1}}{1 - (1 - \eta) Z} \quad ; i = 0, 1, 2, \dots, j = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

ただし  $\prod_{m=0}^{-1} (\sigma_{i+m} \sigma_{j+m}) = 1$  とする。

逆変換を行うと

$$\begin{aligned} h_{(-2,-2),s_0}(k) &= h_{(-2,-1),s_0}(k) = h_{(-1,-2),s_0}(k) = h_{(-1,-1),s_0}(k) \\ &= h_{(-2,j),s_0}(k) = h_{(i,-2),s_0}(k) = h_{(-1,j),s_0}(k) = h_{(i,-1),s_0}(k) \\ &= \eta(1-\eta)^{k-1}u(k-1) \quad ; k = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} h_{(i,j),s_0}(k) &= \sum_{l=0}^{\infty} (1-\sigma_{i+l}\sigma_{j+l}) \prod_{m=0}^{l-1} (\sigma_{i+m}\sigma_{j+m}) \eta(1-\eta)^{k-l-1}u(k-l-1) \\ & \quad ; k = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (27)$$

$$\text{ただし } u(k) = \begin{cases} 1 & ; k \geq 0 \\ 0 & ; k < 0 \end{cases}$$

式(26)は少なくとも一方のバースは乗降中ではない状態から入駅までの初期通過時間分布であり、 $k-1$ ステップ他駅希望車または空セルが到来し、次の1ステップで入駅希望車または空車が到来する確率を示している。式(27)は両方のバースがともに乗降中の場合であり、 $l$ ステップの間、両方のバースの乗降が継続し、その後 $k-l-1$ ステップの間、他駅希望車、空セルが到来し、次の1ステップで入駅希望車、空車が到来する事象の確率のすべての可能な $l$ に関する和を表わしている。これらは物理的な考察からも推測できる。

平均初期通過時間  $\bar{h}_{(i,j),s_0}$  は  $\bar{h}_{(i,j),s_0} = [\partial H_{(i,j),s_0}(Z)/\partial Z]_{z=1}$  より次式となる。

$$\begin{aligned} \bar{h}_{(-2,-2),s_0} &= \bar{h}_{(-2,-1),s_0} = \bar{h}_{(-1,-2),s_0} = \bar{h}_{(-1,-1),s_0} \\ &= \bar{h}_{(-2,j),s_0} = \bar{h}_{(i,-2),s_0} = \bar{h}_{(-1,j),s_0} = \bar{h}_{(i,-1),s_0} = 1/\eta \quad ; i = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (28)$$

$$\bar{h}_{(i,j),s_0} = 1/\eta + \sum_{l=0}^{\infty} \prod_{m=0}^l \sigma_{i+m}\sigma_{j+m} \quad ; i = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

#### 4.2 入駅時間間隔分布

入駅時間間隔分布は状態部分集合  $S_0$  における再帰時間として求めることができる。 $S_0$  への再帰時間分布を  $h_{S_0,s_0}(k)$  とする。

ここで、状態  $(i, j)$  の平衡状態確率を  $\pi_{(i,j)}$  とする。

$$\pi_{(i,j)} = \sum_{(l,m) \in S_R} \pi_{(l,m)} p_{(l,m),(i,j)} \quad \sum_{(i,j) \in S_R} \pi_{(i,j)} = 1 \quad (30)$$

$S_0$  に推移してきたという条件の下で、それが  $(i, j) \in S_0$  への推移である確率は  $\pi_{(i,j)} / \sum_{(l,m) \in S_0} \pi_{(l,m)}$  である。また、状態  $(i, j)$  にあるとき、その後  $k$  ステップで  $S_0$  に推移する確率は  $h_{(i,j),s_0}(k)$  である。したがって次式を得る。

$$h_{S_0,s_0}(k) = \frac{\sum_{(i,j) \in S_0} \pi_{(i,j)} h_{(i,j),s_0}(k)}{\sum_{(l,m) \in S_0} \pi_{(l,m)}} \quad ; k = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

乗降時間が一般分布のとき、 $h_{S_0,s_0}(k)$  を解析的な形で求めることは容易ではない。しかし、式(30)により平衡状態確率を数値的に求めることにより、 $h_{S_0,s_0}(k)$  の分布の形状を知ることができる。

ここでは、乗降時間が入駅希望車、空車の車種によらず一定の場合の  $h_{S_0,s_0}(k)$  を求める。

乗降時間を車種によらず一定値  $nAt$  とする。この場合は  $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{n-1} = 1$ ,  $\sigma_n = \sigma_{n+1} = \dots = 0$  であるから、図2の状態推移図は簡略化され、有限マルコフ連鎖となる。

状態部分集合  $S_0$  は次式となる。

$$S_0 = \{(0, -2), (0, -1), (0, 1), (0, 2), \dots (0, n), (1, 0), (2, 0), \dots (n, 0)\} \quad (32)$$

$(i, j) \in S_0$  から  $S_0$  への初期通過時間分布は式(26), (27)より次のようになる。

$$\begin{aligned} h_{(0,-2), S_0}(k) &= h_{(0,-1), S_0}(k) = \eta(1-\eta)^{k-1}u(k-1) \\ h_{(0,1), S_0}(k) &= h_{(1,0), S_0}(k) = \eta(1-\eta)^{k-n}u(k-n) \\ h_{(0,2), S_0}(k) &= h_{(2,0), S_0}(k) = \eta(1-\eta)^{k-(n-1)}u(k-(n-1)) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ h_{(0,n-1), S_0}(k) &= h_{(n-1,0), S_0}(k) = \eta(1-\eta)^{k-2}u(k-2) \\ h_{(0,n), S_0}(k) &= h_{(n,0), S_0}(k) = \eta(1-\eta)^{k-1}u(k-1) \quad ; k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

これらを式(31)に代入すると

$$\begin{aligned} h_{S_0, S_0}(k) &= [(\pi_{(0,-2)} + \pi_{(0,-1)} + \pi_{(0,n)} + \pi_{(n,0)}) \\ &\quad \eta(1-\eta)^{k-1}u(k-1) \\ &\quad + (\pi_{(0,n-1)} + \pi_{(n-1,0)})\eta(1-\eta)^{k-2} + \dots \\ &\quad + (\pi_{(0,2)} + \pi_{(2,0)})\eta(1-\eta)^{k-(n-1)}u(k-(n-1)) \\ &\quad + (\pi_{(0,1)} + \pi_{(1,0)})\eta(1-\eta)^{k-n}u(k-n)] \\ &\quad / \sum_{(l,m) \in S_0} \pi_{(l,m)} \quad ; k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (33)$$

平衡状態確率を求めなくとも,  $\pi_{(0,-2)} + \pi_{(0,-1)} + \pi_{(0,n)} + \pi_{(n,0)}$ ,  $\pi_{(0,n-1)} + \pi_{(n-1,0)}$ ,  $\dots$ ,  $\pi_{(0,2)} + \pi_{(2,0)}$ ,  $\pi_{(0,1)} + \pi_{(1,0)}$  の比がわかれば  $h_{S_0, S_0}(k)$  を得ることができる。そこで, 状態部分集合  $S_1$  を次のように定義する。

$$S_1 = \{(0, 1), (1, 0)\} \quad (34)$$

平衡状態では  $S_1$  から出ていく確率フローは  $S_1$  に入る確率フローに等しい。したがって

$$\sum_{\substack{(i,j) \in S_1 \\ (l,m) \in S}} \pi_{(i,j)} p_{(i,j),(l,m)} = \sum_{(i,j) \in S_1} \pi_{(i,j)} = \sum_{\substack{(i,j) \in S_1 \\ (l,m) \in S}} \pi_{(l,m)} p_{(l,m),(i,j)} \quad (35)$$

$S_1$  に着目した状態推移図を図4に示す。図4から容易に式(35)の関係を導くことができる。

$$\pi_{(0,1)} + \pi_{(1,0)} = \eta(\pi_{(0,-2)} + \pi_{(0,-1)} + \pi_{(0,n)} + \pi_{(n,0)}) \quad (36)$$

同様の手法により次式を得る。

$$\pi_{(0,2)} + \pi_{(2,0)} = \dots = \pi_{(0,n-1)} + \pi_{(n-1,0)} = \eta(\pi_{(0,-2)} + \pi_{(0,-1)} + \pi_{(0,n)} + \pi_{(n,0)}) \quad (37)$$

式(36), (37)を式(33)に代入すると  $h_{S_0, S_0}(k)$  が求まる。

$$h_{S_0, S_0}(k) = \begin{cases} 0 & ; k = 0 \\ \eta / (1 + (n-1)\eta) & ; k = 1, 2, \dots, n \\ h_{S_0, S_0}(n) (1-\eta)^{k-n} = \eta(1-\eta)^{k-n} / (1 + (n-1)\eta) & ; k = n+1, n+2, \dots \end{cases} \quad (38)$$

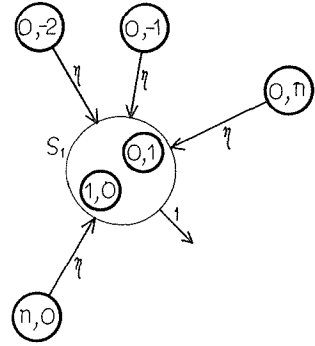


図4  $S_1$  に着目した状態推移

平均入駅時間間隔  $\bar{h}_{s_0, s_0}$  は次式で与えられる。

$$\bar{h}_{s_0, s_0} = \sum_{k=0}^{\infty} k h_{s_0, s_0}(k) = 1/\eta + \sum_{k=1}^{n-1} k/(1/\eta + n - 1) \tag{39}$$

4.3 1 バース 駅モデルとの比較

乗降時間が車種によらず一定 ( $n \Delta t$ ) の場合 1 バース 駅モデルの入駅時間間隔分布を求める。2 バース の場合と同様にバースの状態を  $-2, -1, 0, 1, 2, \dots, n$  で表わすと、これらが駅の状態 (マルコフ連鎖モデルの状態) となる。このモデルの状態推移図を図 5 に示す。推移確率  $p_{i,j}$  は  $p_{-2,-2} = \beta + \gamma, p_{-2,0} = \eta, p_{-1,-2} = \beta, p_{-1,-1} = \gamma, p_{-1,0} = \eta, p_{0,1} = p_{0,2} = \dots = p_{n-1,n} = 1, p_{n,-2} = \beta, p_{n,-1} = \gamma, p_{n,0} = \eta$  である。状態 0 への再帰時間分布  $h_{0,0}(k)$  が入駅時間間隔分布となる。2 バース の場合と同様の手法により次式を得る。

$$h_{0,0}(k) = \eta(1-\eta)^{k-n-1} u(k-n-1) \quad ; k = 0, 1, 2, \dots \tag{40}$$

平均入駅時間間隔  $\bar{h}_{0,0}$  は次式となる。

$$\bar{h}_{0,0} = 1/\eta + n \tag{41}$$

図 6, 図 7 に 2 バース と 1 バース の入駅時間間隔分布の数値例を示す。乗降時間は  $4 \Delta t$  としている。

式(38), (40)および図 6, 図 7 から乗降時間が車種によらず一定の場合の 2 バース 駅と 1 バース 駅の入駅時間間隔分布について考察する。

1 バース 駅の場合は車両が入駅後, 乗降が終了するまでの  $n$  ステップ間は入駅ができない。

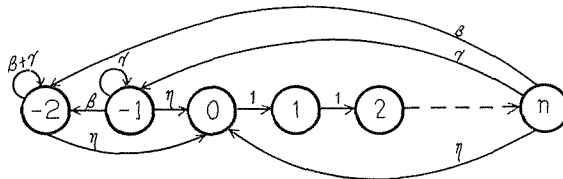


図 5 1 バース 駅モデルの状態推移図

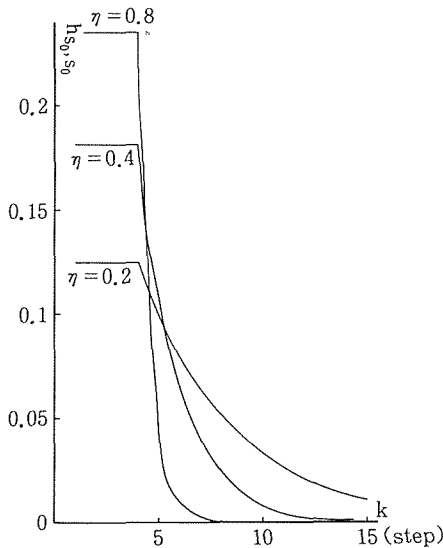


図 6 2 バース 駅の入駅時間間隔分布 (乗降時間 =  $4 \Delta t$ )

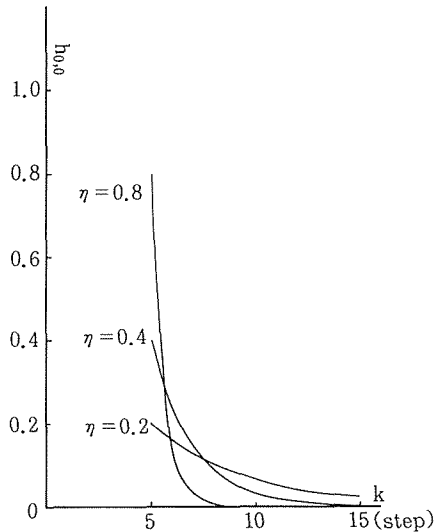


図 7 1 バース 駅の入駅時間間隔分布 (乗降時間 =  $4 \Delta t$ )

これに対して、2バース駅では入駅した車両が乗降中である  $n$  ステップ間も一定の確率で入駅が可能になることがわかる。これは一方のバースが乗降中であっても、もう一方のバースが空となることにより、入駅できる可能性が生ずるためである。特に入駅希望車、空車の到来確率  $\eta$  が 1 に近づくれば、入駅のほとんどが  $1 \sim n$  ステップで発生する。また、入駅時間間隔分布は他駅希望車と空セルの到来確率  $\tau$ ,  $\beta$  の比率には影響を受けない。

図 8 に式(39), (41)で表わされる2バースと1バースの平均入駅時間間隔の数値例を示す。横軸は入駅希望車、空車の平均到来間隔  $1/\eta$  である。2バースの場合、 $1/\eta \rightarrow \infty$  とすると平均入駅時間間隔は漸近的に  $1/\eta$  に近づく。すなわち、到来した入駅希望車、空車のほとんどが入駅できるようになる。しかし、1バースの場合は明らかに  $1/\eta$  には接近しない。これは、文献(6), (7)での解析の結果と同等である。

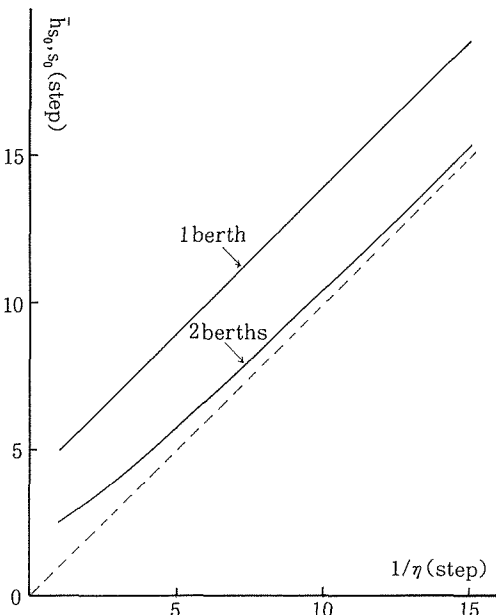


図 8 平均入駅時間間隔 (乗降時間 =  $4dt$ )

## 5. む す び

PRT 2バース駅モデルを離散時間マルコフ連鎖により解析した。この結果、入駅までの初期通過時間分布、および乗降時間が車種によらず一定の場合の入駅時間間隔分布の表式を得た。さらに、1バース駅との比較を行い、2バース駅の基本的特性が明らかとなった。これらの結果はシステム設計の際の有益なデータとなり得るものと思われる。

今後の課題として、乗降時間が車種により異なる場合や任意の一般分布の場合の入駅時間間隔分布に関する考察、駅への乗客の到来を考慮したモデルの解析などが残されている。

## 参 考 文 献

- 1) 荒屋：“新交通システムと自動運転制御”，信学誌，**64**, 1, p. 43-49 (昭56-01)。
- 2) 石井：“CVS (Computer-controlled Vehicle System)”，信学誌，**56**, 12, p. 1656-1659 (昭48-12)。
- 3) 小原，中田：“CVS 駅部モデルへのマルコフ再生理論の適用”，信学論 (D), J61-D, 9, p. 695-702。
- 4) 中田，加地，土肥：“マルコフ再生理論による CVS 駅部モデルの車両挙動の解析”，信学論 (A), J62-A, 10, p. 705-712 (昭54-10)。
- 5) 中田，加地，土肥：“マルコフ再生理論による CVS 駅部モデルの客オーバーフローの解析”，信学論 (A), J63-A, 10, p. 702-709 (昭55-10)。
- 6) 栗原，中田，加地：“CVS 多バース駅モデルのマルコフ再生理論による解析”，信学論 (A), J64-A, 9, p. 715-722 (昭56-09)。
- 7) 栗原，中田，加地：“状態部分集合での再帰時間を考慮したマルコフ再生理論による CVS 多バース駅モデルの解析”，信学論 (A), J65-A, 7 (昭57-07)。
- 8) 栗原，中田，加地：“PRT 多バース駅における出多待ち行列の解析”，北海道大学工学部研究報告，**111**, p. 37-48 (昭57-10)。
- 9) 米山，中田，栗原，加地：“離散時間系で扱った CVS 駅部モデルの入駅時間分布の解析”，電気学会システム・制御研究会資料，SC-81-18 (昭56-07)。
- 10) Howard, R. A.: Dynamic Probabilistic Systems, Vol. I. (Markov models), (1971), Wiley.