



Title	ファジィ集合値関数の可測性
Author(s)	宮腰, 政明; 新保, 勝
Citation	北海道大學工學部研究報告, 119, 43-51
Issue Date	1984-02-15
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/41843">http://hdl.handle.net/2115/41843</a>
Type	bulletin (article)
File Information	119_43-52.pdf



[Instructions for use](#)

## ファジィ集合値関数の可測性

宮腰 政明 新保 勝

(昭和58年9月30日受理)

### Measurability of Fuzzy Set-Valued Functions

Masaaki MIYAKOSHI and Masaru SHIMBO

(Received September 30, 1983)

#### Abstract

The concept of set-valued functions are extended into fuzzy set-valued functions, and the measurability and the integrability of fuzzy set-valued functions are considered. Some fundamental properties of integrals of fuzzy set-valued functions are investigated.

#### 1. はしがき

ファジィ集合論の見地から測度論へのアプローチには、菅野<sup>(1)</sup>, Klement<sup>(2)</sup>等の研究がある。彼らの理論は、与えられた $\sigma$ -集合体のファジィ拡大<sup>(1)(2)</sup>を考へて、その上での測度の構成、その性質等を研究するものである。又、これらの研究に近いものとしては Kwakernaak の fuzzy random variables<sup>(3)</sup>の理論がある。最近の研究では、Dubois and Pradeによるファジィ写像の differential calculus<sup>(4)</sup>があるが、その積分論は Riemann 積分に限定されている。ここでは、Dubois・Pradeの考へを一般化して、次のような問題の定式化を出発点とする。

「今、2つの可測空間 $(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{G})$ に対し、ファジィ写像 $\tilde{f}$ が

$$\begin{aligned} & (X, \mathcal{F}) \quad (Y, \mathcal{G}) \\ & \tilde{f}: X \longrightarrow \tilde{P}(Y) \end{aligned}$$

で定義されるとき、 $\tilde{f}$ の $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ -可測性をどのように定義するか。」

但し、 $\tilde{P}(\cdot)$ は $\cdot$ 上のファジィ集合の全体を表す。

この問題のファジィ集合論的アプローチは、計量経済学の分野での市場均衡の解析のための集合値関数の概念、及び、Lyapunov<sup>(5)</sup>, Blackwell<sup>(6)</sup>, Richter<sup>(7)</sup>, Aumann<sup>(8)</sup>, Debreu<sup>(9)</sup>の研究と関連して、ファジィ集合値関数の応用の分野の方向を示唆していると思われる。

#### 2. 強 $\alpha$ 切断と関数 $\tau$

##### (1) 強 $\alpha$ 切断

今、 $X$ を空でない集合、 $I \triangleq [0, 1]$ とすると、 $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$ を、パラメータ $\alpha$ をもつ $X$ の部分集合の族とする。このとき、族 $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$ が次の2つの条件

$$(i) \quad \alpha < \beta \quad A_\alpha \supseteq A_\beta, \quad (\text{単調性})$$

$$(ii) \quad \bigcup_{\alpha < \beta} A_\beta = A_\alpha, \quad (\text{上からの連続性})$$

但し,  $\alpha, \beta \in I$  であり  $\alpha < \beta$  は  $\{\beta | \alpha < \beta \text{ かつ } \beta \in I\}$  を表す。

を満足するとき, 族  $\{A_\alpha, \alpha \in I\}$  を  $X$  上の強  $\alpha$  切断 (strong  $\alpha$ -cuts, 以下 SAC)<sup>(10)</sup> という。

$\tilde{A}$  を  $X$  上のファジィ集合とすると,

$$\tilde{A}_\alpha \triangleq \{x | h_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}, \quad \alpha \in I$$

で定義される部分集合  $\tilde{A}_\alpha$  の族  $\{\tilde{A}_\alpha, \alpha \in I\}$  は  $X$  上の SAC であることは容易に示せる。

SAC の概念は, 次の表現定理<sup>(10)</sup> によりファジィ集合論において重要である。

[定理]

$X$  上の SAC の全体と  $X$  上のファジィ集合の全体は同等である。

SAC には次の性質がある。

$\Lambda = \{\lambda\}$  を任意の空でない指標集合,  $\tilde{A}, \{\tilde{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  を  $X$  上のファジィ集合及びファジィ集合の族とし,  $f$  を  $X$  から他の集合  $Y$  への関数,  $f$  によるファジィ集合  $\tilde{A}$  の像を  $f(\tilde{A})$  と表すとき,

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda\right)_\alpha &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\tilde{A}_\lambda)_\alpha, & \alpha \in I \\ f(\tilde{A})_\alpha &= f(\tilde{A}_\alpha), & \alpha \in I \\ f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{A}_\lambda\right)_\alpha &= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f((\tilde{A}_\lambda)_\alpha), & \alpha \in I \end{aligned}$$

(2) 関数  $\tau$

$X, Y$  を空でない集合とする。

$$\tilde{P}(Y)^X \triangleq \{f | f: X \longrightarrow \tilde{P}(Y)\},$$

$\tilde{P}(Y^X) \triangleq Y^X$  ( $X$  から  $Y$  への関数全体の集合) の上でのファジィ集合の全体, と定義する。ここで, 以後の議論の基本となる  $\tilde{P}(Y^X)$  から  $\tilde{P}(Y)^X$  への関数  $\tau$  を定義する。

$$\tau \triangleq \{\tau_x, x \in X\}$$

但し,  $\tau_x$  は射影関数で

$$\tau_x: Y^X \longrightarrow Y: f \in Y^X \longrightarrow \tau_x f \triangleq f(x) \in Y$$

と定義される。

今,  $\tau$  を  $\mu \in \tilde{P}(Y^X)$  に作用させると

$$\tau_x: \tilde{P}(Y^X) \longrightarrow \tilde{P}(Y): \mu \in \tilde{P}(Y^X) \longrightarrow \tau_x \mu \triangleq \tau_x(\mu) \in \tilde{P}(Y)$$

となる。但し,

$$\tau_x(\mu)_\alpha \triangleq \{\tau_x f | f \in \mu_\alpha\}, \quad \alpha \in I$$

とする。明らかに,  $\{\tau_x(\mu)_\alpha, \alpha \in I\}$  は  $Y$  上の 1 つの SAC となるから, 表現定理により, この族  $\{\tau_x(\mu)_\alpha, \alpha \in I\}$  は  $\tilde{P}(Y)$  の 1 つの要素を一意に決定する。

従って,

$$\tau: \tilde{P}(Y^X) \longrightarrow \tilde{P}(Y)^X: \mu \in \tilde{P}(Y^X) \longrightarrow \tau(\mu) \triangleq \{\text{関数} : x \longrightarrow \tau_x(\mu)\} \in \tilde{P}(Y)^X$$

なる写像を考えることができる。

$\tau$  は次のような性質をもつ。

(i)  $\tau(\mu) = \tau(\nu)$  となる  $\mu \neq \nu$  ( $\mu, \nu \in \tilde{P}(Y^X)$ ) が存在する。

(ii)  $f \in Y^X$  とするとき,  $\mu_f \triangleq 1/f \in \tilde{P}(Y^X)$ ,  $\widehat{f}$  を  $\widehat{f}(x) \triangleq 1/f(x) \in \tilde{P}(Y)$  とする関数 ( $f$  の埋め込み) とするとき,

$$\tau(\mu_f) = \widehat{f}.$$

今,  $\mu \in (Y^X)$ ,  $\tilde{f} \in \tilde{P}(Y)^X$  に対し,

$$\tau_x(\mu) = \tilde{f}(x) \quad \text{for } \forall x \in X$$

であるとき,

$$\tau(\mu) = \tilde{f}$$

と書く。

さらに,  $*$  を  $Y^X$  上の 2 項演算, すなわち,  $f, g \in Y^X$  ならば  $f * g \in Y^X$  とするとき,  $*$  を  $\tilde{P}(Y^X)$  上に次のように拡張する。  $\mu, \nu \in \tilde{P}(Y^X)$  とし

$$(\mu * \nu)_a \triangleq \{f * g \mid f \in \mu_a, g \in \nu_a\}, \quad a \in I$$

と定義すると  $\{(\mu * \nu)_a, a \in I\}$  が  $Y^X$  上の SAC であることは容易に示せる。従って, この SAC によって一意に決定される  $\tilde{P}(Y^X)$  の要素を再び  $\mu * \nu$  と書き,  $*$  を  $\mu, \nu$  に作用させたものと定義する。

### 3. 可測性と積分

ここでは, はしがきで与えられたファジィ集合値関数の可測性に対する 1 つの定義を与える。

(1) 可測性

2 つの可測空間  $(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{T})$  が与えられたとき,  $[\mathcal{F}/\mathcal{T}]$  で  $\mathcal{F}/\mathcal{T}$  一可測関数の全体を表す。

定義:

2 つの可測空間  $(X, \mathcal{F}), (Y, \mathcal{T})$  が与えられたとき, 関数  $\tilde{f} \in \tilde{P}(Y)^X$  に対し,  $\tilde{f} = \tau(\mu)$  となる  $\mu \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{T}])$  が存在するとき,  $\tilde{f}$  は  $\mathcal{F}/\mathcal{T}$  一可測という。

$g$  を非  $\mathcal{F}/\mathcal{T}$  一可測関数とすると,  $g$  の埋め込み  $\widehat{g}$  は  $\mathcal{F}/\mathcal{T}$  一可測とはならないので,  $\mathcal{F}/\mathcal{T}$  可測とはならない  $\tilde{P}(Y)^X$  の要素がある。  $\tilde{P}(Y)^X$  の要素で  $\mathcal{F}/\mathcal{T}$  一可測とはならないもののクラスが, 普通の意味での非  $\mathcal{F}/\mathcal{T}$  一可測関数の埋め込みのクラスに限定されるか否かは不明である。

次に  $\mathcal{F}/\mathcal{T}$  一可測関数の性質を示す。

$*$  が  $Y$  上の 2 項演算であるとき, これを

$$f, g \in Y^X \text{ に対し, } f * g(x) \triangleq f(x) * g(x)$$

と定義し,  $Y^X$  上に  $*$  を拡張する。又, この 2 項演算  $*$  の  $\tilde{P}(Y)^X$  上への拡張も容易である。さらに  $Y^X$  上の 2 項演算  $*$  が  $\mathcal{F}/\mathcal{T}$  一可測性を保存するならば, 次の性質 1 が示せる。

[性質 1]

$\tilde{f}, \tilde{g}$  が  $\mathcal{F}/\mathcal{T}$  一可測関数であって, 2 項演算  $*$  が可測性を保存すれば

$$\tilde{f} * \tilde{g} \tag{1}$$

も  $\mathcal{F}/\mathcal{T}$  一可測である。

(証明) 定義より,  $\tilde{f} = \tau(\mu)$ ,  $\tilde{g} = \tau(\nu)$  となる  $\mu, \nu \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{T}])$  が存在する。もし,  $\mu, \nu$  に 2 項演

注-1)  $X$  上のファジィ集合  $\tilde{A}$  の台  $\{x \mid h_{\tilde{A}}(x) > 0\}$  が有限集合  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  であるとき, ファジィ集合  $\tilde{A}$  を  $\tilde{A} \triangleq h_{\tilde{A}}(x_1)/x_1 + h_{\tilde{A}}(x_2)/x_2 + \dots + h_{\tilde{A}}(x_n)/x_n$  と表現する。

算\*を作用させた $\mu * \nu$ に対し、

$$\tilde{f} * \tilde{g} = \tau(\mu * \nu)$$

が成立すれば、 $\mu * \nu \in \tilde{P}(\mathcal{F}/\mathcal{G})$ であることと定義より $\tilde{f} * \tilde{g}$ が可測であることがいえる。

定義より、

$$(\mu * \nu)_\alpha = \mu_\alpha * \nu_\alpha, \quad \alpha \in I$$

となり、 $\mu_\alpha * \nu_\alpha \subset [\mathcal{F}/\mathcal{G}]$ は明らかである。

$\forall x \in X$ について、

$$(1) \text{の左辺} = \tilde{f} * \tilde{g}(x) = \tilde{f}(x) * \tilde{g}(x) = \tau_x(\mu) * \tau_x(\nu)。$$

2項演算は写像であるから、SACのもつ性質より、

$$(\tau_x(\mu) * \tau_x(\nu))_\alpha = \tau_x(\mu)_\alpha * \tau_x(\nu)_\alpha = \tau_x(\mu_\alpha) * \tau_x(\nu_\alpha)$$

となる。

(1)の右辺より

$$\tau_x(\mu * \nu)_\alpha = \tau_x((\mu * \nu)_\alpha) = \tau_x(\mu_\alpha * \nu_\alpha)。$$

従って、 $\tau_x(\mu)_\alpha * \tau_x(\nu)_\alpha = \tau_x(\mu_\alpha * \nu_\alpha)$ を示せばよい。実際、

$$z \in \tau_x(\mu_\alpha) * \tau_x(\nu_\alpha) \iff z \in f(x) * g(x) \text{ かつ } f \in \mu_\alpha, g \in \nu_\alpha \text{ となる } f(x), g(x) \text{ が存在する。}$$

$$\iff \text{故に、} f * g \in \mu_\alpha * \nu_\alpha \text{ かつ } z = \tau_x(f * g)。 \quad (\text{証明終})$$

以下では、 $(Y, \mathcal{G}) \triangleq (\mathbf{R}, \mathcal{B})$ とする。但し、 $\mathbf{R}$ は実数の全体、 $\mathcal{B}$ はBorel集合体を表す。又、 $\tilde{P}(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}$ 上のファジィ集合(ファジィ数)<sup>(11)</sup>で次の条件を満足するものの全体を表す。

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} h\tilde{a}(x) = 1$$

但し、 $\tilde{a}$ は $\mathbf{R}$ 上のファジィ数、 $h_a$ はそのメンバシップ関数、 $\sup$ は上限値を表す。

次の性質は、性質1より明らかである。

[性質 2]

$\tilde{f}, \tilde{g}$ が $\mathcal{F}/\mathcal{B}$ -可測関数ならば、

和 $\tilde{f} + \tilde{g}$ 、積 $\tilde{f} \cdot \tilde{g}$ も $\mathcal{F}/\mathcal{B}$ -可測関数となる。

(2)可積分性と積分の定義

ここでは、ファジィ数とその値としてもつ関数の可積分性と積分の定義を与える。

今、ある測度空間 $(X, \mathcal{F}, m)$ を固定し、

$$\begin{aligned} & (X, \mathcal{F}, m) \quad (\mathbf{R}, \mathcal{B}) \\ & \tilde{f}: X \longrightarrow \tilde{P}(\mathbf{R}) \end{aligned}$$

を考える。

$A$ に対し、

$[\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m^A \triangleq [\mathcal{F}/\mathcal{B}]$ の部分集合で $A$ 上で $m$ -可積分となる関数の全体、と定義する。

$A$ 上の $m$ -積分を

$$l_A: [\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m^A \longrightarrow \mathbf{R}: f \in [\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m^A \longrightarrow l_A(f) \triangleq \int_A f \, dm \in \mathbf{R}$$

なる写像 $l_A$ と考えて、 $l_A$ を $\mu \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m^A)$ に作用させて

$$l_A: \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m^A) \longrightarrow \tilde{P}(\mathbf{R}): \mu \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m^A) \longrightarrow l_A(\mu) \in \tilde{P}(\mathbf{R})$$

なる $l_A(\mu) \in \tilde{P}(\mathbf{R})$ をえる。

但し、 $l_A(\mu)$ は $l_A(\mu)_\alpha = l_A(\mu_\alpha) \triangleq \{l_A(f) \mid \mu_\alpha \in f\}$ なる $\mathbf{R}$ 上のSACで決定されるファジィ数である。

$\tilde{f}$ が $\mathcal{F}/\mathcal{B}$ -可測ならば $\tilde{f}=\tau(\mu)$ なる $\mu \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F}/\mathcal{B})$ が存在するから、 $\tilde{f}$ の $A$ 上の $m$ 積分 $\int_A \tilde{f} dm$ を

$$\int_A \tilde{f} dm \triangleq I_A(\mu)$$

として定義するのは妥当であるが、一般には、 $\tilde{f}$ に対し $\mu$ が一意に定まらないので、その積分も一意には決定できない可能性がある。次の補題はこの難点を解消するために必要となる。

**[補題 1]**

$\tau^{-1}(\tilde{f})$ で $\tilde{f}=\tau(\mu)$ となる $\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F}/\mathcal{B})$ の要素の全体とすると、

$$\zeta(\tilde{f}) \triangleq \bigcup_{\mu \in \tau^{-1}(\tilde{f})} \mu$$

で定義された $\zeta(\tilde{f})$ は性質

- (i)  $\zeta(\tilde{f}) \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F}/\mathcal{B})$ ,
- (ii)  $\tau(\zeta(\tilde{f})) = \tilde{f}$

をもつ。

(証明) (i)の証明は、 $\alpha=0$ として、SACの性質より

$$\zeta(\tilde{f})_0 = \left( \bigcup_{\mu \in \tau^{-1}(\tilde{f})} \mu \right)_0 = \bigcup_{\mu \in \tau^{-1}(\tilde{f})} \mu_0 \subseteq [\mathcal{F}/\mathcal{B}],$$

となるから明らか。

(ii)の証明は、SACの性質より、 $\forall x \in X$ について、

$$\tau_x(\zeta(\tilde{f})) = \tau_x\left(\bigcup_{\mu \in \tau^{-1}(\tilde{f})} \mu\right) = \bigcup_{\mu \in \tau^{-1}(\tilde{f})} \tau_x(\mu) = \bigcup_{\mu \in \tau^{-1}(\tilde{f})} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(x)$$

となることから明らか。

(証明終)

以上のことから次の定義をえる。

定義：可積分性と積分。

$$(X, \mathcal{F}, m) \quad (\mathbf{R}, \mathcal{B})$$

$$\tilde{f}: X \longrightarrow \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{R})$$

なる関数 $\tilde{f}$ が、 $A \in \mathcal{F}$ に関して、ある $\mu \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F}/\mathcal{B})_m^A$ が存在して、

$$\tilde{f} = \tau(\mu)$$

となるとき、 $\tilde{f}$ は $A$ 上で $m$ 可積分という。

$\tau_*^{-1}(\tilde{f})$ で $\tilde{f}=\tau(\mu)$ となる $\mu \in \tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{F}/\mathcal{B})_m^A$ の全体を表し、

$$\zeta^*(\tilde{f}) \triangleq \bigcup_{\mu \in \tau_*^{-1}(\tilde{f})} \mu$$

と定義する。 $\tilde{f}$ が $\mathcal{F}/\mathcal{B}$ -可積分ならば $\tau_*^{-1}(\tilde{f})$ は空ではなく、補題1より $\tilde{f}=\tau(\mu)$ となる $\mu$ の中で最大の要素となる。 $\tilde{f}$ の $A$ 上の $m$ 積分を

$$\int_A \tilde{f} dm \triangleq I_A(\zeta^*(\tilde{f}))$$

として定義する。

## (3) 積分の基本的性質

ここでは、ファジィ数値関数の積分の基本的性質を明らかにする。

[補題 2]

$$\zeta^*(\tilde{f} + \tilde{g}) \supseteq \zeta^*(\tilde{f}) + \zeta^*(\tilde{g}),$$

$$l_A(\mu + \nu) = l_A(\mu) + l_A(\nu),$$

$$l_{A+B}(\mu) \subseteq l_A(\mu) + l_B(\mu)$$

但し,  $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m^A)$ ,  $A, B \in \mathcal{F}$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,

第2式に対し,  $\mu, \nu \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m^A)$

第3式に対し,  $\mu \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m^{A+B})$

一般に,  $A, B \in \mathcal{F}$  かつ  $A \subseteq B$  ならば

$$\mu \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m^B) \implies \mu \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m^A)$$

(証明略)

ファジィ数値関数の積分については次のような性質がある。

[性質 3]

(1)  $A$  上で  $m$  可積分な関数  $f$  の埋め込み  $\hat{f}$  について,  $\hat{f}$  は  $A$  上で  $m$  可積分であり

$$\int_A \hat{f} \, dm = 1 / \int_A f \, dm,$$

(2)  $A$  が  $m$  測度零集合ならば, 任意の  $\mathcal{F}/\mathcal{B}$ -可測関数  $\tilde{f}$  について

$$\int_A \tilde{f} \, dm = 1/0$$

(3)  $\tilde{f}, \tilde{g}$  が  $A$  上で  $m$  可積分ならば, 和  $\tilde{f} + \tilde{g}$  も  $A$  上で  $m$  可積分で

$$\int_A (\tilde{f} + \tilde{g}) \, dm \supseteq \int_A \tilde{f} \, dm + \int_A \tilde{g} \, dm,$$

(4)  $\tilde{f}$  が  $A+B$  ( $A, B \in \mathcal{F}$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ) 上で  $m$  可積分ならば,  $\tilde{f}$  は各  $A, B$  上で  $m$  可積分であり,

$$\int_{A+B} \tilde{f} \, dm \subseteq \int_A \tilde{f} \, dm + \int_B \tilde{f} \, dm.$$

(証明) 補題2より明らか。

(証明終)

この性質の(3), (4)より, ファジィ数値関数の  $m$  積分は, 一般に, 線形性, 加法性をもつとはかぎらないことがわかる

次に, 積分の値そのものの性質について述べる。それは, ファジィ数の凸性<sup>(12),(13)</sup> に関することであり, 凸性の定義は以下の通りである。

ファジィ数  $\tilde{a}$  が凸である。  $\iff$  任意の  $\alpha \in I$  について  $\tilde{a}_\alpha$  が凸集合すなわち区間となる。

[性質 4]

可測空間  $(X, \mathcal{F})$  が測度  $m$  に関して非アトム的<sup>(14)</sup> であれば  $m$  可積分関数  $\tilde{f}$  に対し

$$\int_X \tilde{f} \, dm$$

は凸である。

(証明)

可積分性の定義より, ある  $\mu_0 \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m)$  ( $A = X$  のときは,  $A$  は省略) があって

$$\tilde{f} = \tau(\mu_0)$$

又、積分の定義より、

$$\int_X \tilde{f} \, d\mu = l_A(\zeta^*(\tilde{f})),$$

$$\zeta^*(\tilde{f}) = \bigcup_{\mu \in \tau^{-1}(\tilde{f})} \mu$$

であり、

$$\zeta^*(\tilde{f})_\alpha = \bigcup_{\mu \in \tau^{-1}(\tilde{f})} \mu_\alpha, \quad \alpha \in I$$

である。又、 $\forall \alpha < 1$  について  $(\mu_0)_\alpha \neq \emptyset$  であるから、 $\zeta^*(\tilde{f})_\alpha \neq \emptyset$ 。

従って、

$\forall \alpha \in I$  に対し

$$\left(\int_X \tilde{f} \, d\mu\right)_\alpha = l_X(\zeta^*(\tilde{f}))_\alpha = l_X(\zeta^*(\tilde{f})_\alpha) \neq \emptyset.$$

一方、ファジィ数の凸性の定義によって、任意の  $\alpha \in I$  に対し、

$$l_X(\zeta^*(\tilde{f}))_\alpha$$

が凸集合であることを示せばよい。

$l_X(\zeta^*(\tilde{f}))_\alpha$  が 1 つの要素のみから成るときは明らかに凸である。

$l_X(\zeta^*(\tilde{f}))_\alpha \ni z_1, z_2$  かつ  $z_1 \neq z_2$  と仮定する。

従って、

$$f_1 \in (\mu_1)_\alpha, f_2 \in (\mu_2)_\alpha, \int_X f_1 \, d\mu = z_1, \int_X f_2 \, d\mu = z_2$$

となる  $\mu_1, \mu_2 \in \tau^{-1}(\tilde{f})$  が存在する。

仮定と Debreu ([9], 定理 7.1) より、任意の  $\rho \in [0, 1]$  に対応して

$$\int_{E_\rho} f_1 \, d\mu = \rho z_1, \quad \int_{E_\rho^c} f_2 \, d\mu = \rho z_2$$

となる  $E_\rho \in \mathcal{F}$  が存在する。

従って、

$$\left. \begin{array}{l} E_\rho \text{ 上で } f_1 \\ E_\rho^c \text{ 上で } f_2 \end{array} \right\}$$

に一致する  $f_\rho \in [\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m$  が存在し、

$$\int_X f_\rho \, d\mu = \int_{E_\rho} f_1 \, d\mu + \int_{E_\rho^c} f_2 \, d\mu = \rho z_1 + (1-\rho) z_2$$

となる。又、 $f_\rho$  について、定義より、任意の  $x \in X$  に対し、

$$\tau_x f_\rho \in \tilde{f}(x)_\alpha$$

が成立する。実際

$$\left. \begin{array}{l} E_\rho \ni x \text{ のとき } \tau_x f_\rho = \tau_x f_1 = f_1(x) \\ E_\rho^c \ni x \text{ のとき } \tau_x f_\rho = \tau_x f_2 = f_2(x) \end{array} \right\} \in \tilde{f}(x)_\alpha$$



である。

従って、 $\nu_\alpha \ni f_\rho$ となる $\nu \in \tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m)$ で $\tau_*^{-1}(\tilde{f})$ の要素となるものの存在を示せばよい。

$$\delta_0 \triangleq \sup \{ \beta \mid f_1 \in (\mu_1)_\beta \text{ かつ } f_2 \in (\mu_2)_\beta \}$$

とする。SACの定義から、 $\delta_0 > \alpha$ となり、又、 $\delta_0 > \forall \beta$ に対し $f_1 \in (\mu_1)_\beta, f_2 \in (\mu_2)_\beta$ となる。

今、次のように定義する。

$$\beta < \delta_0 \text{ のとき, } \nu_\beta \triangleq (\mu_1)_\beta \cup (\mu_2)_\beta \cup \{f_\rho\}$$

$$\beta \geq \delta_0 \text{ のとき, } \nu_\beta \triangleq (\mu_1)_\beta \cup (\mu_2)_\beta$$

但し、 $\delta_0 = 1$ のとき、第1式のみ有効とする。

このとき、 $\{\nu_\beta, \beta \in I\}$ は $[\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m$ 上のSACとなることは容易に示せる。

実際、

$\gamma < \delta_0$ のとき、

$$\begin{aligned} \bigcup_{\gamma < \beta} \nu_\beta &= \left( \bigcup_{\gamma < \beta < \delta_0} \nu_\beta \right) \cup \left( \bigcup_{\delta_0 \leq \beta} \nu_\beta \right) = \bigcup_{\gamma < \beta < \delta_0} \{ (\mu_1)_\beta \cup (\mu_2)_\beta \cup \{f_\rho\} \} \cup \left\{ \bigcup_{\delta_0 \leq \beta} ((\mu_1)_\beta \cup (\mu_2)_\beta) \right\} \\ &= \bigcup_{\gamma < \beta} \{ (\mu_1)_\beta \cup (\mu_2)_\beta \} \cup \{f_\rho\} = (\mu_1)_\gamma \cup (\mu_2)_\gamma \cup \{f_\rho\} = \nu_\gamma, \end{aligned}$$

$\gamma \geq \delta_0$ のとき、

$$\bigcup_{\gamma < \beta} \nu_\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} \{ (\mu_1)_\beta \cup (\mu_2)_\beta \} = (\mu_1)_\gamma \cup (\mu_2)_\gamma = \nu_\gamma,$$

又、単調性は明らかである。

このSAC $\{\gamma_\alpha, \alpha \in I\}$ によって決定される $\tilde{P}([\mathcal{F}/\mathcal{B}]_m)$ の要素を、再び、 $\gamma$ と書くと、

$\forall x \in X$ と $\forall \beta \in I$ について

$\beta < \delta_0$ のとき

$$\begin{aligned} \tau_x(\gamma)_\beta &= \tau_x(\gamma_\beta) = \tau_x((\mu_1)_\beta \cup (\mu_2)_\beta \cup \{f_\rho\}) = \tau_x((\mu_1)_\beta) \cup \tau_x((\mu_2)_\beta) \cup \{\tau_x(f_\rho)\} \\ &= \tilde{f}(x)_\beta \cup \tilde{f}(x)_\beta \cup \{f_\rho(x)\} = \tilde{f}(x)_\beta \end{aligned}$$

$\beta \geq \delta_0$ のときも同様にして証明できる。

従って、 $\gamma \in \tau_*^{-1}(\tilde{f})$ となる。故に、 $\zeta^*(\tilde{f})_\alpha \geq \nu_\alpha \ni f_\rho$ となり、

$$l_X(f_\rho) = \rho z_1 + (1-\rho)z_2 \in l_X(\zeta^*(\tilde{f}))_\alpha \text{ となる。}$$

各 $\rho \in [0, 1]$ に対して、このような $\gamma$ を構成して、それを $\gamma_\rho$ と書けば

$$\bigcup_{\rho \in [0,1]} \gamma_\rho \in \tau_*^{-1}(\tilde{f})$$

となり、従って、任意の $\rho \in [0, 1]$ に対し、

$$f_\rho \in \left( \bigcup_{\rho \in [0,1]} \gamma_\rho \right)_\alpha \text{ かつ } \int_X f_\rho \, dm = \rho z_1 + (1-\rho)z_2 \in l_X(\zeta^*(\tilde{f}))_\alpha$$

となるので、 $l_X(\zeta^*(\tilde{f}))_\alpha$ は凸集合となる。

(証明終)

#### 4. あ と が き

本論文では、ファジィ集合値(ファジィ数値)関数の可測性と積分の定義を与え、その基本的性質を調べた。その積分の従来のルベーグ積分と著しく異なる結果として、一般に、(1)線形性が

成立しない, (2) 加法性が成立しない, ことがわかった。又, 測度空間の非アトム性の条件のもとで, 積分値の凸性が示された。この結論は fuzzy random variables<sup>(3)</sup> の期待値の凸性に関する補助確率空間の条件の緩和を示唆する。

これらファジィ数値関数の積分の基本的性質は, その値が非数値的な, 例えば, 言語的値<sup>(15)</sup>をとる母数をもつ母集団のパラメータを推定するような「ファジィ統計」<sup>(16)</sup>の理論的基礎となるものである。

尚, 本研究の一部は文部省科学研究費の援助により行なわれたことを付記する。

### 参考文献

- 1) 菅野道夫: 計測自動制御学会論文集, 第8巻(昭47) No. 2, p. 94; 第9巻(昭48) No. 3, p. 361.
- 2) E. Klement: Fuzzy sets and systems, 4(1980) p. 83.
- 3) H. Kwakernaak: Information Sciences, 15(1978) p. 1; 17(1979) p. 253.
- 4) D. Dubois and H. Prade: Fuzzy sets and systems, 8(1978) p. 1; p. 105; p. 225.
- 5) Lyapunov, A.: Bull. Acad. Sci. URSS Ser. Math., 4(1940) p. 465.
- 6) D. Blackwell: Proc. A. M. S., 2(1951) p. 390.
- 7) H. Richter: Math. Annalen, 150(1963) p. 85.
- 8) G. Debreu: Proc. 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 2(1967) p. 351.
- 10) 菅野道夫: “集中講義録”, 北大大学院情報工学専攻(昭53).
- 11) M. Mizumoto and K. Tanaka: Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, Eds. M. M. Gupta, R. K. Ragade, R. R. Yager (1979) North-Holland, p. 153.
- 12) L. A. Zadeh: Information and Control, 8(1965) p. 238.
- 13) Lowen, R.: Fuzzy sets and systems, 3(1980) p. 291.
- 14) P. R. Halmos: Measure Theory, Springer Verlag (1974).
- 15) L. A. Zadeh: Information Sciences, 8(1975) p. 199.
- 16) M. Miyakoshi and M. Shimbo: Fuzzy sets and systems (to appear).