Title	α-エントロピーに基づく推定量の分散について
Author(s)	佐藤, 義治; 種市, 信裕; 河口, 至商
Citation	北海道大學工學部研究報告, 124, 69-76
Issue Date	1985-01-31
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/41901
Type	bulletin (article)
File Information	124_69-76.pdf

北海道大学工学部研究報告
第 124 号（昭和 60 年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University, No. 124 (1985)

α ―エントロピーに基づく推定量の分散について

佐藤義治　種市信裕　河口至商

（昭和 59 年 9 月 29 日受理）

On the variances of estimators based on an α―entropy

Yoshiharu SATO, Nobuhiro TANEICHI and Michiaki KAWAGUCHI

(Received September 29, 1984)

Abstract

The estimation problem in which the probabilities of multinomial distribution are the functions of unknown parameters is discussed. Three types of estimators are offered using the theory of parameter space of the multinomial distribution based on an α-entropy, reported in the previous paper. These estimators include the maximum likelihood estimator, minimum chi-square and minimum modified chi-square estimator as their special cases. The variances of these estimators are calculated up to the second order and their magnitudes are evaluated for a finite number of samples.

1. は じ め に

統計的推論と情報理論におけるエントロピーとが密接な関連にあることは，Kullback-Leibler の情報量，Rényi の information gain，赤池の情報量基準（AIC）さらには最尤推定量（MLE）や Fisher の情報量などからも明らかである。また確率分布間の“Divergence”とか“Inaccuracy”に基づく距離の概念，確率分布空間に導入される微分可能多様体に基づく情報幾何学（information geometry）[4]　やそれによる統計的推論[1),2),3),6),7),10)]　においてもエントロピーはその中核をなしているものと考えられる。

本報告では，より一般的な Havrda & Charvát[9] の α ―エントロピーを用いて，統計的推定の問題を従来の結果が良く知られている多項分布をとり上げて議論する。α ―エントロピーによる多項分布に関する統計的母数空間の理論[16] を用いて，α ―推定量ともいうべき 3 種の推定量を提案する。これらの推定量と従来の推定量との関連を明らかにし，それらの性質を研究する第一段階として推定量の標本分散を二次のオーダー，すなわち標本数を N としたとき $1/N^2$ のオーダーまで評価する。さらにこれらの結果を用いて，最尤推定量との比較を行う。

2. α ―エントロピーに基づく多項分布の母数空間

有限離散確率分布

$$Q_n \equiv \{q=(q_1, q_2, \cdots, q_n) \mid q_i \geqq 0\ ,\ \Sigma\, q_i = 1\}$$

情報工学専攻　情報数理工学第一講座

に対するエントロピー関数としてつぎの2つの型のものが知られている。[11)]

$$\text{I)}\begin{cases} H_\alpha^{\beta_i}(q)=\{\sum_{i=1}^{n} q_i^{\alpha+\beta_i-1}/\sum_{i=1}^{n} q_i^{\beta_i}-1\}/(1-\alpha), & \alpha\neq 1 \\ H_1^{\beta_i}(q)=-\sum_{i=1}^{n} q_i^{\beta_i}\log q_i/\sum_{i=1}^{n} q_i^{\beta_i}, & \alpha=1 \end{cases}$$

$$\text{II)}\begin{cases} \hat{H}_\alpha^{\beta_i}(q)=\log\{\sum_{i=1}^{n} q_i^{\alpha+\beta_i-1}/\sum_{i=1}^{n} q_i^{\beta_i}\}/(1-\alpha), & \alpha\neq 1 \\ \hat{H}_1^{\beta_i}(q)=H_1^{\beta_i}(q), & \alpha=1 \end{cases}$$

これらはいずれも特殊な場合，すなわち$\alpha=1$かつ$\beta_i=1$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ のときShannonのエントロピーとなり，その自然な拡張となっている。ここでは I)の型のエントロピーにおいて $\beta_i=1$とした Havrda & Charvât の α—エントロピー，

$$H_\alpha(q)=\begin{cases} \{\sum_{i=1} q_i^{\alpha}-1\}/(1-\alpha), & \alpha\neq 1 \\ -\sum_{i=1}^{n} q_i\log q_i, & \alpha=1 \end{cases} \tag{2.1}$$

を用いる。またII）の型において $\beta_i=1$としたものは Rényi のα —エントロピーとして知られている。

N回の試行に基づくn個のカテゴリーの発生頻度 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に関する多項分布の確率密度関数を

$$f(x\mid\pi)=f(x_1,\cdots,x_n\mid\pi_1,\cdots,\pi_n)=N!\prod_{i=1}^{n}(\pi^{x_i}/x_i!) \tag{2.2}$$

と表わす。このとき N を固定すると多項分布 (2,2) は各カテゴリーの生起確率

$$P\{k\}=\pi_k>0,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

を与えると一意に定まる。このとき可能な$\pi=(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n)$ の全体は $(n-1)$ 次元単体

$$S_n=\{\pi 1\ \pi_i\geqq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\pi_i=1\}\subset E^n$$

の内部 IntS_n を構成する。ただし E^n は n 次元ユークリッド空間である。このようなn項分布の全体を $F_n=\{f(x\mid\pi)\}$ と表わすとき，自然な位相同型φ：

$$F_n\xrightarrow{\varphi}(\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_{n-1})=\pi^*\subset E^{n-1}$$

を定義することができる。したがって F_n は唯一の局所座標近傍 (π^*, φ) をもつ微分可能多様体と見なすことができる。

多様体 F_n の接空間 T 上に α—エントロピー (2.1) を用いて，Burbea et al.[5)] によるαオーダー・エントロピー計量 (α—order entropy metric) テンソル $\overset{\alpha}{g}$ を導入する。T上の自然標構 $\partial/\partial\pi_i$, $(i=1, 2, \cdots, n-1)$ に関する成分は

$$\begin{aligned}\overset{\alpha}{g}(\partial/\partial\pi_i, \partial/\partial\pi_j)=\overset{\alpha}{g}_{ij}&=\partial^2 H_\alpha(\pi)/\partial\pi_i\partial\pi_j \\ &=\alpha(\delta_{ij}\pi^{\alpha-2}+\pi_n^{\alpha-2})\end{aligned} \tag{2.3}$$

として得られる。テンソル $\overset{\alpha}{g}$ はリーマン計量テンソン場をなし，これを用いて多様体 F_n をリーマン多様体（又はリーマン空間）と見なすことができる。これに関してつぎの定理が成り立つ。

定理[16)]： α ーエントロピーに基づく退化しない n 項分布の母数空間を，計量テンソル（2.3）をもつ（$n-1$）次元リーマン空間とするならば，この空間は，n 次元ユークリッド空間（$z_1, z_2, \cdots, z_n$）につぎのような超曲面として埋め込むことができる。

$$\begin{cases} Z_i=\pi_i^{\alpha/2}/\sqrt{\alpha}, \ (i=1, 2, \cdots, n-1) \\ Z_n=(1-\pi_1-\cdots-\pi_{n-1})^{\alpha/2}/\sqrt{\alpha} \end{cases} \tag{2.4}$$

なお上記定理の証明は文献16）を参照されたい。

3. 多項分布の確率が母数の関数である場合の推定

未知母数を $\theta=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r)$ とし，確率 π_i がそれぞれ θ の関数

$$\pi_i=\pi_i(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_r), \ (i=1, 2, \cdots, n-1, \ r\leqq n-1) \tag{3.1}$$

で与えられているとき，ヤコビアン

$$B_a^i=(\partial\pi_i/\partial\theta_a), \ (a=1, 2, \cdots, r)$$

の階数を r とするならば，(3,1) は（$n-1$）次元リーマン空間（2,4）内の r 次元部分空間となる。

N 個の観測値により各カテゴリーの観測比率が

$$p=(p_1, p_2, \cdots, p_n)=(x_1/n, x_2/n, \cdots, x_n/n)$$

として得られたとき，これをもとに未知母数 $\theta=(\theta_1, \cdots, \theta_r)$ を推定するための基準としてはつぎの3つのものが考えられる。

a) 直交推定量

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\overset{\alpha}{g}_{ij}(\pi(\theta))B_a^i(\theta)(p_j-\pi_j(\theta))=0$$

b) 推定値の接空間 T_θ における最小距離推定量

$$\min_\theta \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\overset{\alpha}{g}_{ij}(\pi(\theta))(p_i-\pi_i(\theta))(p_j-\pi_j(\theta))$$

c) 観測値の接空間 T_p における最小距離推定量

$$\min_\theta \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\overset{\alpha}{g}_{ij}(p)(p_i-\pi_i(\theta))(p_j-\pi_j(\theta))$$

直交推定量 a）は最尤推定量の概念を拡張したものである。観測点 p と推定値 $\pi(\hat{\theta})$ との差 $D=(D_j)=(p_j-\pi_j(\hat{\theta}))$ を点 $\pi(\hat{\theta})$ の接空間で評価したときベクトル D が接空間に直交するという意味での直交推定量である。この推定量は $\alpha=1$, すなわち, (1) が Shannon のエントロピーとなるときには最尤推定量となることは甘利[1)] 等によっても明らかにされている。 推定量

b) はDの長さが推定値 $\pi(\hat{\theta})$ の接空間の計量に関して最小となる推定量である。これは$\alpha=1$のとき，最小カイ2乗推定量となる。また推定量 c) はDの長さを観測点pでの接空間の計量で測ったとき最小となる推定量であり，$\alpha=1$ のときには最小修正カイ2乗推定量[12] である。計量テンソル (2.3) からわかるように $\alpha=2$ のときリーマン空間 F_n はユークリッド空間となるため，推定量 a), b), c) はいずれもユークリッド距離を最小とする推定量

$$\min_{\theta} \sum_{i=1}^{n} (p_i-\pi_i(\theta))^2$$

となっている。

以下では (3.1) において $r=1$ とする。推定基準 a), b), c) に関し，(2.3) を用いてそれぞれについての推定方程式を書き下すとつぎのようになる。

$$f_a(\theta,p)=\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{\alpha-2}\pi_i'(p_i-\pi_i)=0 \tag{3.2}$$

$$f_b(\theta,p)=(\alpha-2)\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{\alpha-2}\pi_i'(p_i-\pi_i)^2-2\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{\alpha-2}\pi_i'(p_i-\pi_i)=0 \tag{3.3}$$

$$f_c(\theta,p)=\sum_{i=1}^{n} p_i^{\alpha-2}\pi_i'(p_i-\pi_i)=0 \tag{3.4}$$

ただし　$\pi_i'=d\pi_i/d\theta$.

一般に推定方程式 $f(\theta,p)=0$ がつぎの2つの条件を満たすならば，その解は Fisher consistent であることが知られている。[13]

条件1：　$\pi_i(\theta)$，$i=1, 2, \cdots, n$ は真の値の近傍において C^2 級の関数である。

条件2：　推定方程式 $f(\theta,p)=0$ は θ と $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$ に関して C^2 級の関数であり，　$f(\theta, \pi(\theta))\equiv 0$　を満たす。

推定方程式 (3.2), (3.3), (3.4) はいずれも条件2を満たすので，関数 (3.1) が条件1を満たす関数である限り，これらの推定方程式を解いて得られる解はいずれも Fisher consistent な推定量である。

推定方程式 $f(\theta,p)=0$ の解をθ^*とするとき，$f(\theta^*,p)=0$ をTaylor展開してつぎのように表わす。

$$\begin{aligned}(\theta^*-\theta)f'+&\sum_{i=1}^{n}(p_i-\pi_i)f_i\\ =-(1/2)&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(p_i-\pi_i)(p_j-\pi_j)f_{ij}-(1/2)(\theta^*-\theta)^2f''\\ &-(\theta^*-\theta)\sum_{i=1}^{n}(p_i-\pi_i)f_i'+\varepsilon\end{aligned} \tag{3.5}$$

ただし，$f'=df/d\theta$, $f_i=\partial f/\partial\pi_i$, $f_{ij}=\partial^2 f/\partial\pi_i\partial\pi_j$, $f_i'=\partial^2 f/\partial\theta\partial\pi_i$ とする。上式の両辺をf'で割りつぎのようにおく。

$$(\theta^*-\theta)+\sum_{i=1}^{n}(p_i-\pi_i)f_i/f' \sim S_N \tag{3.6}$$

また条件 1,2 の下では真の値を θ とすると $\theta^*\to\theta$ のとき

$$|N^{1/2}(\theta^*-\theta)f'+N^{1/2}\sum_{i=1}^{n}(p_i-\pi_i)f_i|\to 0 \qquad (3.7)$$

が成り立つ。

推定方程式 (3.2), (3.3), (3.4) を (3.6) の f に代入すると左辺はいずれもつぎのようになる。

$$\theta^*-\theta-Z_\alpha/i_\alpha \qquad (3.8)$$

ここに $\pi_i'=d\pi_i/d\theta$ として

$$i_\alpha\equiv\sum_{i=1}^{n}\pi_i^{\alpha-2}(\pi_i')^2, \qquad (3.9)$$

$$Z_\alpha\equiv\sum_{i=1}^{n}\pi_i^{\alpha-2}\pi_i'(p_i-\pi_i) \qquad (3.10)$$

とおく。また右辺の S_N は推定方程式に対応してそれぞれ添字 a, b, c をつけて表わすとつぎのように書くことができる。

$$S_{Na}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Omega_{ij}(p_i-\pi_i)(p_j-\pi_j) \qquad (3.11)$$

$$S_{Nb}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\Omega_{ij}+\Delta_{ij})(p_i-\pi_i)(p_j-\pi_j) \qquad (3.12)$$

$$S_{Nc}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\Omega_{ij}-2\Delta_{ij})(p_i-\pi_i)(p_j-\pi_j) \qquad (3.13)$$

ただし

$$\Omega_{ij}\equiv\{L_i-K\pi_i^{\alpha-2}\pi_i'\}\pi_j^{\alpha-2}\pi_j',$$

$$L_i\equiv\{(\alpha-2)\pi_i^{\alpha-3}(\pi_i')^2+\pi_i^{\alpha-2}\pi_i''\}/i_\alpha^2, \quad \pi_i''=d^2\pi_i/d\theta^2,$$

$$K\equiv\{(\alpha-2)\mu_{30}^{\alpha}+(3/2)\mu_{11}^{\alpha}\}/i_\alpha^3,$$

$$\mu_{rs}^{\alpha}\equiv\sum_{i=1}^{n}\pi_i^{\alpha}(\pi_i'/\pi_i)^r(\pi_i''/\pi_i)^s,$$

$$\Delta_{ij}\equiv\{(\alpha-2)\pi_i^{\alpha-3}(\pi_i')^2/i_\alpha^2-(1/2)\mu_{30}^{\alpha}\pi_i^{\alpha-2}\pi_i'/i_\alpha^3\}\pi_j^{\alpha-2}\pi_j'-\delta_{ij}M_i$$

$$M_i\equiv(\alpha-2)\pi_i^{\alpha-3}\pi_i'/2i_\alpha$$

なるものとする。これらをまとめて (3.6) をつぎのように書く。

$$\theta^*-\theta-Z_\alpha/i_\alpha\sim S_N \qquad (3.14)$$

S_N は上記 S_{Na}, S_{Nb}, S_{Nc} のいずれかを表わすものとする。(3.14) の両辺の期待値をとり

$$E(\theta^*-\theta)\sim E(S_N)\equiv b(\theta)/N$$

とおく。すなわち推定量 θ^* のバイアスを $b(\theta)/N$ と評価して,

$$\hat{\theta}=\theta^{*}-b(\theta^{*})/N \tag{3.15}$$

とすると，$\hat{\theta}$ は$O(1/N)$ までバイアスが修正される。(3.7) より，$\theta^{*}-\theta$ をZ_α/i_α でおきかえて

$$\hat{\theta}\sim\theta^{*}-b(\theta)/N-b'(\theta)Z_\alpha/Ni_\alpha$$

として $\hat{\theta}$ の分散を計算するとつぎのようになる。

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\hat{\theta})&=\mathrm{V}(\theta^{*})+\mathrm{V}(b'(\theta)Z_\alpha/Ni_\alpha)-2\mathrm{Cov}(\theta^{*},b'(\theta)Z_\alpha/Ni_\alpha)\\&=\mathrm{V}(\theta^{*})+\frac{\{b'(\theta)\}^{2}\eta_\alpha}{N^{3}i_\alpha^{2}}-2\frac{b'(\theta)}{Ni_\alpha}\left(\frac{\eta_\alpha}{Ni_\alpha}+\frac{\xi_\alpha}{N^{2}}\right)\\&=\mathrm{V}(\theta^{*})-2\frac{b'(\theta)\eta_\alpha}{N^{2}i_\alpha^{2}}+0\ (1/N^{3})\end{aligned} \tag{3.16}$$

ただし

$$\eta_\alpha\equiv N\mathrm{V}(Z_\alpha) \tag{3.17}$$

$$\xi_\alpha\equiv N^{2}\mathrm{E}(\mathrm{S}_N Z_\alpha) \tag{3.18}$$

とした。これに対して

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\mathrm{S}_N)&\sim\mathrm{V}(\theta^{*}-Z_\alpha/i_\alpha)\\&=\mathrm{V}(\theta^{*})+\mathrm{V}(Z_\alpha/i_\alpha)-2\,\mathrm{Cov}(\theta^{*},\ Z_\alpha/i_\alpha)\\&=\mathrm{V}(\theta^{*})-\frac{1}{N}\left(\frac{\eta_\alpha}{i_\alpha^{2}}\right)-\frac{2\,\xi_\alpha}{N^{2}i_\alpha}\end{aligned} \tag{3.19}$$

となるので

$$\varphi_\alpha\sim N^{2}\mathrm{V}(\mathrm{S}_N) \tag{3.20}$$

とおくと (3.16)，(3.19) からつぎのように分散を評価することができる。

$$\mathrm{V}(\theta^{*})=\frac{1}{N}\left(\frac{\eta_\alpha}{i_\alpha^{2}}\right)+\frac{1}{N^{2}}\varphi_\alpha+\frac{1}{N^{2}}\ \frac{2\xi_\alpha}{i_\alpha}+0\ (1/N^{2}) \tag{3.21}$$

$$\mathrm{V}(\hat{\theta})=\frac{1}{N}\left(\frac{\eta_\alpha}{i_\alpha^{2}}\right)+\frac{1}{N^{2}}\varphi_\alpha+\frac{2}{N^{2}i_\alpha}\left(\xi_\alpha-b'(\theta)\frac{\eta_\alpha}{i_\alpha}\right)+0\,(1/N^{2}) \tag{3.22}$$

バイアス修正された推定量の分散 (3.22) について考察してみよう。ここで提案した推定量が1次有効性をもつのは $\alpha=1$ の場合に限る。これは $\alpha=1$ のとき (3.9)，(3.10)，(3.17) より

$$\eta_\alpha=i_\alpha=i\,(\text{Fisher の情報量})$$

となり (1/N) の係数は $1/i$ となることから確かめられる。Rao の一連の論文[13),14),15)] においては2次の有効性が論じられ，最尤推定量と他の推定量，すなわち最小カイ2乗，最小修正カイ2乗，最小 Haldane discrepancy，最小 Hellinger 距離，最小 KL separator 推定量との

比較において，$1/N^2$ の係数は最尤推定量が最小となることを示している。前述したように $\alpha=1$ においては，推定量 a) は最尤推定量であり b)，c) はそれぞれ最小カイ２乗，最小修正２乗推定量である。したがって $\alpha=1$ だけで考えると Rao の結果から最尤推定量が最良(２次有効推定量) であるが，(3.22) の $1/N^2$ の係数に関しては，α が正の範囲で変化し，推定量が α をパラメータにもつため，その分散も α によって調整が可能である。したがって標本数 N が有限の範囲では最尤推定量の分散より小さな分散をもつ推定量が存在する可能性がある。$\alpha=1$ のときの最尤推定量の分散は

$$\mathrm{V_{MLE}}\ (\hat{\theta})=\frac{1}{N}\left(\frac{1}{i}\right)+\frac{1}{N^2}\,\varphi_1$$

であるから，

$$\left\{\varphi_\alpha-\varphi_1+\frac{2}{i_\alpha}\left(\xi_\alpha-\mathrm{b}'\frac{\eta_\alpha}{i_\alpha}\right)\right\}\Big/\left(\frac{\eta_\alpha}{i_\alpha^2}-\frac{1}{i}\right)>N \tag{3.23}$$

を満たす N については，

$$\mathrm{V_{MLE}}\ (\hat{\theta})\ >\ \mathrm{V}\,(\hat{\theta})$$

となる。以上のことを具体的な例を用いて次章で説明する。

4. 数 値 計 算 例

４項分布 $\pi=(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4)$ に関する Fisher[8] のモデル

$$\pi_1=(2+\theta)/4,\quad \pi_2=(1-\theta)/4,\quad \pi_3=(1-\theta)/4,\quad \pi_4=\theta/4 \tag{4.1}$$

について，推定方程式 (3.2)，(3.3)，(3.4) を用いて，$\alpha=0.5\sim3.0$，$\theta=0.8$ としたときの推定量の分散を計算し，(3.22) における $1/N$ と $1/N^2$ の係数の値を示したものが表－1である。ここでの３つの推定法は $\alpha=1$ においていずれも $1/N$ の係数が最小となる（１次有効推定量）ことが見られ，また $\alpha=1$ だけについてみると $1/N^2$ の係数が最小となるのは直交推定量(最尤推定量) の場合であることは Rao の結果からも明らかである。分散 (3.21)，(3.22)からもわかるように，どの推定法においても各 α の値に関して $1/N$ の係数は等しいが，$1/N^2$ の係数はいずれの α の値に対しても直交推定量 ($f_a=0$) のものが最小であることがわかる。$1/N^2$ の係数に注目すると，$\alpha=2$ においては零となっているが，これは (4.1) のモデルが θ に関して線形の場合には常に零となるが，一般には零とは限らない。この例での $\alpha=2$ においては $1/N$ の係数が $\alpha=1$ の場合に比べてかなり大きいので $1/N^2$ までの分散を考えると (3.23) から最尤推定量より分散が小さくなるのは標本数が高々10個程度である。ところが $\alpha=1.5$ について考えると直交推定量においては，$1/N$ の係数の $\alpha=1$ のものとの差に比べて，$1/N^2$ の係数の差がかなり大きいことから (3.23) より標本数 N が 1,000 個位までは最尤推定量の分散より小さいことがわかる。

表－1　３つの推定方式による推定量の分散に対する各オーダーの係数

	Orthogonal (f_a=0)		Min. dist (f_b=0)		Min. dist (f_c=0)	
α	$1/N$	$1/N^2$	$1/N$	$1/N^2$	$1/N$	$1/N^2$
0.25	0.3487	0.1643	0.3487	5.8143	0.3487	22.3728
0.50	0.3466	0.1946	0.3466	4.1877	0.3466	15.8548
0.75	0.3451	0.2034	0.3451	2.8123	0.3451	10.4747
1.00	0.3446	0.1765	0.3446	1.6961	0.3446	6.2550
1.25	0.3449	0.1150	0.3449	0.8647	0.3449	3.1924
1.50	0.3447	0.0479	0.3447	0.3398	0.3447	1.2429
1.75	0.3455	0.0104	0.3455	0.0765	0.3455	0.2780
2.00	0.3600	0.0000	0.3600	0.0000	0.3600	0.0000
2.25	0.4235	−0.0009	0.4235	0.2328	0.4235	−0.0645
2.50	0.5816	−0.0024	0.5816	0.9775	0.5816	−0.3758
2.75	0.8534	−0.0259	0.8534	2.2067	0.8534	−1.1986
3.00	1.2100	0.0000	1.2100	3.8650	1.2100	−2.5400

参 考 文 献

1) Amari, S.: Ann. Statist., 10 (1982), pp. 357-385.
2) Amari, S.: Biometrika, 69(1982), pp. 1-17.
3) Amari, S. and Kumon, M.: Ann. Inst. Statist. Math., 35 (1983), pp. 1-24.
4) 甘利俊一：電子通信学会論文誌A, 66. A (1983), pp. 492-499.
5) Burbea, J. and Rao, C. R.: Jour. Multi. Analysis, 12(1982), pp. 575-596.
6) Eguchi, S.: Ann. Statist., 11 (1983), pp. 793-803.
7) Eguchi, S.: Ann. Inst. Statist. Math., 36 (1984), pp. 199-206.
8) Fisher, R.A.: Statistical Methods for Research Workers, Oliver and Boyd (1925).
9) Havrda, J. and Charvat, F.: Kybernetka, 33 (1967), pp. 30-35.
10) Kumon, M. and Amari, S.: Proc. Roy. Soc. (London), A-386 (1983), pp. 429-458.
11) Mathai, A. M. and Rathie, P. N.: Basic concepts in Information Theory and Statistics, John Wiley & Sons, New York (1975).
12) Neyman, J.: Proc. Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., (1949), pp.239-273.
13) Rao, C. R.: Proc. 4th Berkeley Symp., 1 (1961), pp. 531-545.
14) Rao, C. R.: Jour. Roy. Statist. Soc. Ser. B,24 (1962), pp. 46-72.
15) Rao, C. R.: Sankhya, 25 (1963), pp. 189-206.
16) Taneichi, N., Sato, Y. and Kawaguchi, M.: Bull. Fac. Eng. Hokkaido Univ., 121 (1984), pp. 59-67.