



Title	視空間の非リーマン計量的性質とその応用（II）：Gauss曲率と恒常指数の関係の考察とそのVisual Circle実験への適用
Author(s)	山崎, 敏正; 河口, 至商
Citation	北海道大學工學部研究報告, 126, 127-136
Issue Date	1985-05-31
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/41931
Type	bulletin (article)
File Information	126_127-136.pdf



[Instructions for use](#)

視空間の非リーマン計量的性質とその応用(II)

—Gauss 曲率と恒常指数の関係の考察と
その Visual Circle 実験への適用—

山崎 敏正 河口 至商
(昭和59年12月27日受理)

Non-Riemannian Metrical Properties of Visual Space and Their Applications (II)

—Relationship Between Gaussian Curvature and a Measure of
Size Constancy and Analysis of Visual Circle—

Toshimasa YAMAZAKI and Michiaki KAWAGUCHI
(Received December 27, 1984)

Abstract

With respect to the metric introduced into the theory of non-Riemannian (and/or Riemannian) visual space, the Gaussian curvature is obtained. From this, it follows that our geometrical model of visual space is characterized as a Riemannian space of variable curvature. Thus, the model must be applied to some experimental evidences in a dark room except for visual alleys. In this connection, we substantiate the relation of Gaussian curvature to a measure of size constancy (Thouless index). Secondly, we attempt to reproduce theoretically the Visual Circle which indicates the metrical property of visual space experimentally, and have shown a numerical example.

1. 序 論

視覚は眼が外界に提示された物理的刺激対象に反応することによって生ずる心理物理現象の一種である。これによって外界の物理空間は一つの心理的な空間として認識される。後者は前者の物理空間に対して視空間と呼ばれている。一般に興行知覚の要因が豊富な状況においては、人間の経験や偏見などによって個人差が大きくなりより複雑な視知覚現象が現出する。従って両空間の間関係を一意に定めて記述・解釈することは非常に困難である。しかしながら、一方ではこのような複雑な現象もいくつかの基本的な機能の重ね合わせであろうという立場から、昔から暗室のような縮減された観察条件の下での実験的研究が続けられてきた。

この暗室で行われた parallel alley¹⁾ と distance alley²⁾ の結果の相違に見られるような非 Euclid 性に着目して、Luneburg^{3) 4) 5)} は、視空間は負の定曲率 Riemann 空間であるとした。しかしながら、その後の彼の理論に対する実験的検証の結果をみると、視空間が負の定曲率であることに必

ずしも一貫性がないことが明らかになってきている⁹⁾。実際、Hagino & Yoshioka⁷⁾ は新しい心理実験の結果から、Battro ら⁸⁾ は視標の大きさや場所によって、Ehrenstein⁹⁾ は曲率を決める方法に従って、曲率の符号が変化することを指摘している。また彼の理論の中では平行性の概念と計量の概念が明確に分離されていない。

この点に着目して、新保ら^{10) 11)} は同じく幾何学的な立場から、物理空間 (i : 直交座標系) と視空間 (α : 非ホロノーム座標系) の間に局所的に定義される線型変換

$$(dx)^\alpha = A_i^\alpha dx^i, \quad dx^i = A_\alpha^i (dx)^\alpha \quad \text{註1)}$$

を仮定し、両 alley に対して数学的に明確な定式化を行い、非 Riemann 的視空間論を確立した。しかしながら上式の変換テンソル A_i^α の具体的な形は提出されていない。最近、著者らはこの非 Riemann 的視空間論に対して変換テンソルを具体的な形で与え

$$g_{ij} = \delta_{\alpha\beta} A_i^\alpha A_j^\beta$$

で求められる計量テンソルから得られる幾何学的諸量を用いて、両 alley の違いを数値実験的に示した^{12) 13)}。そして、見かけの大きさと距離の問題の観点から、この視空間モデルが一般化された大きさ-距離不変仮説¹⁴⁾: $n=1.5$ を満たすことをみい出した¹⁵⁾。今後、更に visual alleys 以外の暗室における実験的事実に対しても本研究のモデルが適用されるに違いない。

本論文では、上記の計量テンソル g_{ij} から求まる幾何学的不変量、特に Gauss 曲率の意味について、大きさの恒常性(後述)の問題と関連付けながら考察し、従来の Luneburg の理論との比較・検討を試みる。また第3章では alley 実験以外に視空間の計量的な性質を実験的に特徴付ける Visual Circle 実験について論ずる。

2 Gauss 曲率と恒常指数

2.1 視空間モデルの計量的な性質

前論文¹⁵⁾の結果から計量テンソル g_{ij} の成分は

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + 2(a_2 x^1 + b_1) \\ g_{12} &= g_{21} = a_1 x^1 + a_2 x^2 \\ g_{22} &= 1 + 2(a_1 x^2 + b_2) \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

で与えられる。ここで a_1 と a_2 は parallel alley の実験式

$$a_2 x^1 + a_1 x^2 = C \quad (2.1.2)$$

に含まれているパラメータであり、データ点から決定されるべきものである。また b_1 と b_2 は互いに

$$e^{b_1 - b_2} = a_2 / a_1 \quad (2.1.3)$$

を満たしながら変動し得る定数である。なお、定数 C は初期値 (x_b^1, x_b^2) に対して $C = a_2 x_b^1 + a_1 x_b^2$ で与えられる。

計量テンソル g_{ij} からつくられる第一種の Christoffel 記号

$$[kj, i] = \frac{1}{2} (\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}) \quad (\partial_i = \partial / \partial x^i) \quad (2.1.4)$$

に関する Riemann-Christoffel 曲率テンソル

註1) 特にことわりのない限り、繰り返された指標に関しては Einstein の総和規約を採用する。

$$R_{lkji} = \frac{1}{2} (\partial_l \partial_j g_{ki} + \partial_k \partial_i g_{lj} - \partial_l \partial_i g_{kj} - \partial_k \partial_j g_{li}) - g^{hm} ([li, h][kj, m] - [lj, h][ki, m]) \quad (2.1.5)$$

のうち、2次元 Riemann 空間において本質的なのは R_{2112} のみであり、(2.1.1) 式、(2.1.4) 式、(2.1.5) 式から

$$R_{2112} = -\frac{2}{g} \frac{a_1 a_2}{g} \left\{ 1 + b_1 + b_2 - (a_1 - a_2)(x^1 - x^2) \right\}$$

で与えられる。ただし、 g^{hm} は $g^{hm} g_{ml} = \delta^h_l$ から定まる基本テンソルであり

$$g = \det(g_{ij})$$

とする。従って Gauss 曲率 K は

$$K = \frac{2}{g^2} \frac{a_1 a_2}{g} \left\{ 1 + b_1 + b_2 - (a_1 - a_2)(x^1 - x^2) \right\} \quad (2.1.6)$$

となり明らかに定曲率とはならない。また、(2.1.6) 式から直線

$$x^1 = x^2 + \frac{1 + b_1 + b_2}{a_1 - a_2} \quad (2.1.7)$$

を境界として、曲率が正になる領域と負になる領域に分割される。これらの性質が以下のようにして、Battro らによって得られた従来とは異なる visual alleys の実験結果に対して適用される。

Battro ら⁹⁾ は、広々とした平原で被験者に木の棒を用いて visual alleys を構成させる実験を行い、その結果を次のように分類した

regular type・・・visual alleys のデータ点がすべて被験者(0)と最遠点にある標準刺激を通る矩形の外辺と対角線の間位置する

divergent type・・・データ点のいくつかが矩形の外側に位置する

convergent type・・・データ点のいくつかが矩形の対角線と x^1 軸の間に位置する

Fig. 1 において、 \triangle と \square はそれぞれ parallel alley と distance alley のデータ点を表し、実線は本研究のモデルから得られる distance alley の理論曲線をプロットしたものである。具体的には、parallel alley のデータ点から最小二乗法によってパラメータ a_1 と a_2 を求め、定数 b_1 と b_2 を条件式 (2.1.3) を満たすように与えることにより、(2.1.1) 式で得られる g_{ij} から

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ kj \end{matrix} \right\} = g^{ih} [kj, h]$$

で定義される第二種の Christoffel 記号を得る。これにより distance alley を与える理論式

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ kj \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

を Runge-Kutta-Gill 法で解き、その数値解をプロットした。

regular type 及び convergent type の場合には、(2.1.2) 式と (2.1.3) 式から $\{(x^1, x^2) | x^1 \geq 0, x^2 \leq 0\}$ なる領域で考えなければならない。従って Gauss 曲率の符号の分布は **Fig. 2** の左側の通りである。また、divergent type の場合は、同じく (2.1.2) 式と (2.1.3) 式から $\{(x^1, x^2) | x^1 \geq 0, x^2 \geq 0\}$ の領域で考え、曲率の符号の分布は **Fig. 2** の右側のようになる。**Table 1** には、各の被験者に対する境界線の x^1 切片、すなわち (2.1.7) 式の右辺第 2 項 ($=x_a$) の値が示されている。これからわかるように、曲率の分布の様子が被験者により異なる。また、**Table 2** には (2.1.6) 式に従って distance alley 上の各点における Gauss 曲率の値が示されている。曲率の値が各点

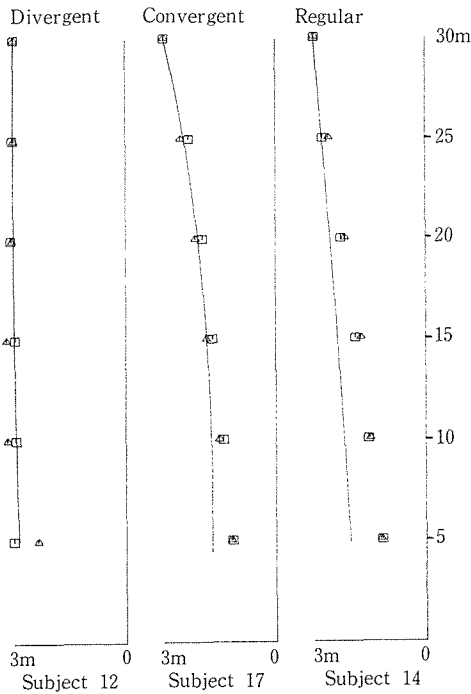


Fig. 1 A test of the model using the data of Battro et al.: data points of parallel and distance alleys are designated by triangles and squares, respectively; theoretical curves of distance alley according to the model by solid lines.

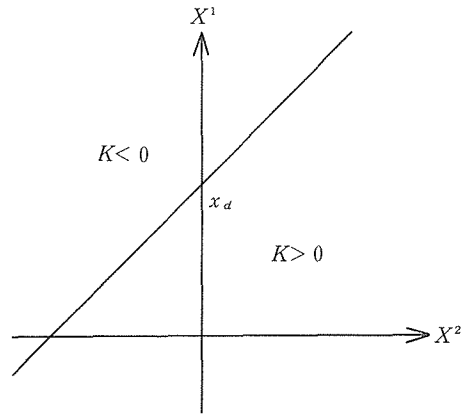


Fig. 2 The distribution of the sign of K . The boundary line is given by (2.1.7).

Table 1. Parameters which characterize the distribution of K for three subjects.

Subject	$\frac{a_2}{a_1}$	x_d (m)
14	0.0717	280
12	0.0143	3000
17	0.0701	60

Table 2. Data points of parallel and distance alleys and the distribution of K values for Subject 14 and Subject 17.

Distance of stakes (m)	Subject 14				Subject 17			
	data points		K		data points		K	
	parallel alley (m)	distance alley (m)	calculated from Luneburg's method	calculated from this model	parallel alley (m)	distance alley (m)	calculated from Luneburg's method	calculated from this model
30	3	3	-0.374	³ 0.509	3	3	¹ C	³ 0.135
25	2.6	2.76	0.296	0.532	2.535	2.32	C	0.144
20	2.185	2.285	0.444	0.563	2.155	1.962	C	0.157
15	1.76	1.895	0.158	0.603	1.87	1.70	² D	0.173
10	1.51	1.545	-0.757	0.656	1.525	1.405	0.303	0.193
5	1.23	1.185	0.047	0.724	1.21	1.17	0.869	0.219

¹"C" means that K cannot be calculated from Luneburg's method due to convergent type.

²"D" means that K cannot be calculated from Luneburg's method due to divergent type.

³The values of $K \times 10^4$ are shown in this column.

で異なっているが、これは Luneburg の理論に従って Battro らが求めた曲率の値からも明らかである。従って、両眼視空間が負の定曲率であるという Luneburg の仮説は成立しない。これについては次節でより詳細に議論される。

2. 2 Gauss 曲率と恒常指数

大きさの恒常性とは、対象の観察距離が変化する時、対象の張る視角は視角の法則に従って変化するにもかかわらず、見かけの大きさは比較的一定に保たれる現象をいう。大きさの恒常性の最初の組織的な研究は Martius¹⁶⁾ によるものとされている。彼が行った実験は“被験者から一定の距離に一定の大きさの標準刺激（木の棒）を提示し、標準刺激とは異なる距離に提示される比較刺激を使って標準刺激と等しく見える大きさを求める”という方法をとっている。alley 実験では対象の大きさではなく alley の対の間隔に注目するという点において多少問題があるにしても、大きさの恒常性を広く空間知覚の問題として考えるならば、alley 実験は Martius による実験と共に大きさの恒常性の実験的研究の2つの源流をなす¹⁷⁾。

大きさの恒常性は、刺激の条件、空間条件、時間条件、観察条件・観察態度などによって変化する。異なる条件による恒常性の度合を相互に比較するために恒常度を示す指数が必要となり、古くからいくつかの恒常指数が考えられ、それについて多くの議論がなされてきた。その中で最も一般的に広く使われているのが Thouless 指数¹⁸⁾

$$Z = \frac{\log P - \log S}{\log R - \log S} (\times 100) \quad (2.2.1)$$

である。ただし、 S は刺激特性、 P は対応する現象的な特性、 R は対応する“真の”あるいは物理的な特性とする。

alley 実験を大きさの恒常性の問題と関連付け、その alley 曲線を Thouless 指数によって再表現しようとする試みが Battro & Reggini¹⁹⁾ によってなされた。彼らは、Thouless 指数が alley 上の各点で一定であると仮定し、big open field における alley 実験の結果からこの仮定の妥当性を主張している。しかしながら Blumenfeld の distance alley 実験のデータから Thouless 指数を計算すると Z が一定にならないのである。なお、distance alley 実験に関する Thouless 指数の求め方は以下の通りである (Fig. 3 参照)。すなわち、上記の S 、 P 、 R はそれぞれ

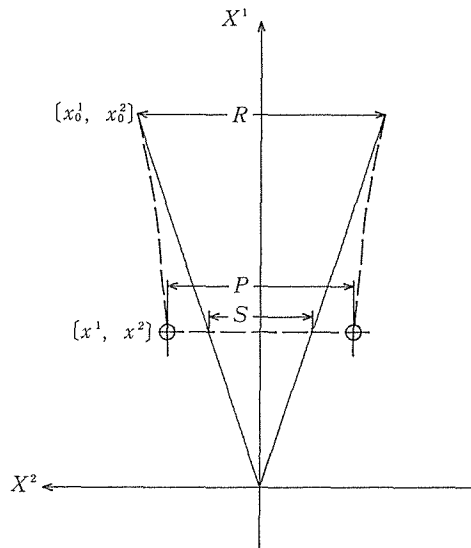


Fig. 3 Parameters used to calculate Thouless index.

S : 視角の法則に従った刺激の理論的な大きさ

P : 対象の見かけの大きさ (可動光点間の間隔)

R : 対象の真の大きさ (標準刺激の光点間の間隔)

となる。こうして、被験者から標準刺激までの距離と比較刺激までの距離をそれぞれ x_0^1 , x^1 とすれば, S は

$$S = \frac{x^1}{x_0^1} R$$

で与えられる。これらの値を (2.2.1) 式に代入すればよい。結局, Thouless 指数は

$$Z = \log \left(\frac{x^2}{x^1} \cdot \frac{x_0^1}{x_0^2} \right) / \log \left(\frac{x_0^1}{x^1} \right) \quad (2.2.2)$$

で与えられる。ただし座標 (x_0^1, x_0^2) , (x^1, x^2) はそれぞれ標準刺激と比較刺激の位置を表す。

こうして、各々の実験点 (x^1, x^2) に対して、(2.2.2) 式からは Thouless 指数 Z , (2.1.6) 式からは Gauss 曲率 K がそれぞれ求まることになる。Table 3 には Blumenfeld の 3 人の被験者 Lo, Ge, Go に対して distance alley の実験データから得られる Z と K の値が示されている。

Table 3. Thouless index (Z) and Gaussian curvature (K) calculated from the data of Blumenfeld's distance alley.

observation distance (cm)	Subject					
	Lo		Ge		Go	
	Z	1K	Z	1K	Z	1K
320	24.90	2.09	—	—	14.18	0.82
240	28.57	3.52	30.97	1.61	22.85	1.45
160	34.47	7.52	45.80	3.60	36.72	3.26
120	40.99	13.04	59.14	6.47	47.04	3.26
80	50.19	28.61	75.78	14.55	55.50	13.05

¹The values of $K \times 10^6$ are depicted in this column.

一方, Luneburg の両眼視空間論において Gauss 曲率を大きさの恒常性に関連付けた研究がいくつかある。Luneburg⁵⁾ は、大きさの恒常性は Gauss 曲率が -1 に近づく程長く保たれると結論している。また石井²⁰⁾ は、 $Z = F(\sigma, K)$ ^{註 2)} なる関数関係が成立することを理論的に考察し、Luneburg と同様の結果を得ている。すなわち恒常度は K の絶対値が大なる程大きくなる。更に実際の実験データによってこの事を確かめている²¹⁾。我々が得た結果に関しても、すべての被験者に対して Thouless 指数と Gauss 曲率は単調な関係にあり、上記の事を反映していることがわかる。

3. Visual Circle の解析

視空間の計量的な性質、特に Gauss 曲率に関する Luneburg の仮説がいろいろな方法により理論的、実験的に検証されてきた。その中で alley 実験の手続き等の困難さを回避するために、人間のより簡単な視覚経験に訴える心理実験が Hagino & Yoshioka⁷⁾ によって考案された。この実験は Visual Circle 実験と呼ばれている。

Visual Circle 実験とは、暗室内で両眼を含む水平面に一定の距離を隔てた 2 光点 Q_0 , Q_1 を提示

註 2) σ は奥行知覚の程度を表す個人定数である。

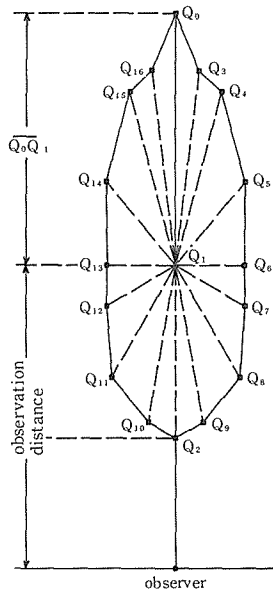


Fig. 4 Illustration of stimulus configuration in the Visual Circle experiment as seen from above. Small squares represent points of light stimuli: Q_0 and Q_1 are fixed, and other points are movable on the radial tracks depicted by dotted lines.

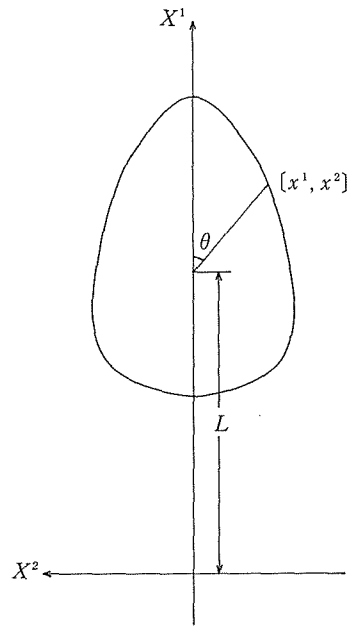


Fig. 5 Parameters used to reproduce Visual Circle by means of the model.

し、他の光点 Q_i を、それらが見かけ上 Q_1 を中心とする半径 $\overline{Q_0Q_1}$ の円周上に位置するように並べさせる実験をいう (Fig. 4 参照)。Hagino らは各々の観察距離 (被験者から Q_1 までの距離) に対して、比較刺激 $\overline{Q_1Q_i}$ ($i=2, \dots, 16$) の長さが見かけ上標準刺激 $\overline{Q_0Q_1}$ の長さと等しくなるように Q_i の位置を決める実験を行った。なお、可動光点 Q_i は中心 (Q_1) と Q_i を通る直線上を動くようになっている。結果として得られた Visual Circle の一例を Fig. 4 に示す。これらはいずれの観察距離においても先の尖った卵形をしている。

彼らは Luneburg の理論を基礎として Visual Circle の方程式を導出し、その式を用いて実験データから Gauss 曲率を推定している。結果は K が定曲率にならず、Luneburg の仮説に一致しなかった。そこで以下では定曲率ではない Gauss 曲率を伴う本研究のモデルを使って Visual Circle の再現を試みることにする。

物理的な刺激の大きさ r (本論文では光点間の距離) に対して知覚される大きさを r' とすればそれは

$$r' = \int_r ds = \int_r \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} \quad (3.1)$$

で与えられる。Visual Circle 実験において、各々の比較刺激 (可動光点 Q_i) は中心から放射状に広がる直線群を動かすので、物理空間内に

$$x^1 = r \cos \theta + L, \quad x^2 = -r \sin \theta$$

なる座標系を導入すれば (Fig. 5 参照)、各々の実験中においては θ が一定であるとしてよい。従って

$$\frac{dx^1}{dr} = \cos \theta, \quad \frac{dx^2}{dr} = -\sin \theta$$

が成り立つので, (3. 1) 式, (2. 1. 1) 式から

$$r' = \int \sqrt{g^{ij} dx^i dx^j} = \int \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dr} \frac{dx^j}{dr}} dr = \frac{2}{3C_2} (C_1 + C_2 r)^{3/2} + C \quad (3. 2)$$

が得られる。ただし

$$C_1 = 1 + 2(a_2 L + b_1) \cos^2 \theta - 2 a_1 L \cos \theta \sin \theta + 2 b_2 \sin^2 \theta$$

$$C_2 = 2(a_2 \cos \theta - a_1 \sin \theta)$$

とし, C は積分定数である。

Visual Circle 実験における被験者に対する要請から各々の θ に対して

$$r' = \text{const.}$$

が満たされているはずであるから, (3. 2) 式を用いて上式を r について解けば

$$r = \frac{1}{C_2} \left\{ \left[\frac{3}{2} A C_2 \right]^{2/3} - C_1 \right\}$$

となる。ただし A は任意定数とする。この式の右辺は, 各の θ に対してみかけ上標準刺激の長さと同しく認識された比較刺激の長さを物理空間内に実現した時にとる値であるから, この r に関して (r, θ) が表す軌跡は Visual Circle になっているに違いない。こうして得られた結果の一例が Fig. 6 に示されている。横軸に θ , 縦軸に比較刺激の標準刺激に対する比をとっている。具体的には Visual Circle 実験のデータから得られた比 (Δ) と本論文のモデルによって予測された比 ($=r(\theta)/r(0)$: \square) がこの図にプロットされている。この結果からわかるようにおおよその傾向は類似しているが, 全体的に実験データの場合よりも過小評価の傾向が強い。特に 40° 付近ではその錯視量が大きい。これに関しては次章で考察する。

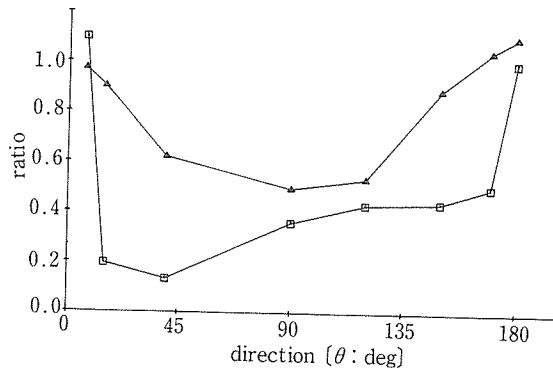


Fig. 6 Predicted and observed Visual Circles: the abscissa represents θ (see Fig. 5), the ordinate the ratio of the interval of comparison stimuli to that of standard ones.

4 結論並びに考察

本研究の視空間モデルにおける計量的な性質は定曲率ではない Gauss 曲率を持つことに特徴が

あり、これは Luneburg 以後の研究者達によって予想された事であった。これに関して本論文では、

- ① 大きさの恒常性の問題に関連して distance alley に対する Thouless 指数との関係
- ② Visual Circle 実験のデータ解析

の2つの問題に限定して議論を行った。

①については以前の研究と同じく Gauss 曲率は大きさの恒常性と密接な関係にあることが示された。②に関して我々が得た結果は必ずしも Visual Circle の形状をよく再現するものにはならなかった。特に 40° 付近までは実際の実験データとの差が大きかった。これについて次のような説明が可能であるかもしれない。

格子縞視標あるいは Landolt 環を用いて視力を測定する際に格子縞の方向または環の切れ目の方向が垂直である場合に視力が最も高くなり、45° 斜め方向の場合に最も低くなることが知られている^{22) 23) 24)}。この視力に関する異方性はすべて2次元視空間、特に前額面における実験的事実であり、本論文で扱ってきた水平面における現象とは直接結びつかない。しかしながら、水平面に関する視力、すなわち奥行視力(depth acuity)と前額面に関する視力の一つである副尺視力(vernier acuity)に関してはBerry²⁵⁾により、視力を測定するために視標として使われる2本の垂直な棒の間の分離角度が 133.7" あるいはそれ以上になると奥行視力の閾値は副尺視力の閾値よりも小さくなることが報告されている。更に奥行視力は horizontal offset (水平面において正中線からのズレを角度で表したもの)の関数として急激に低下していくことが知られており²⁶⁾、我々が得た結果はこれらの所見を示唆するものと考えられる。

参 考 文 献

- 1) Hillebrand, F.: *Denkschr. Akad. Wiss. Wien, Math.-Nat. Kl.*, **72** (1902), p. 255.
- 2) Blumenfeld, W.: *Zeits. f. Physiol. d. Sinnesorgane*, **65** (1913), p. 241.
- 3) Luneburg, R. K.: *Mathematical Analysis of Binocular Vision*. Princeton Univ. Press, 1947.
- 4) Luneburg, R. K.: *Courant Anniversary Volume*, New York Univ. Press, 1948, p. 215.
- 5) Luneburg, R. K.: *J. Opt. Soc. Am.*, **40** (1950), p. 627.
- 6) 石井克己: 九大文学部40周年記念論文集 (1966), p. 235.
- 7) Hagino, G. and Yoshioka, I.: *Perception & Psychophysics*, **19** (1976), p. 499.
- 8) Battro, A. M. et al.: *Perception*, **5** (1976), p. 9.
- 9) Ehrenstein, W. H.: *Perception*, **6** (1977), p. 657.
- 10) 新保勝, 山ノ井高洋: 北大工学部研究報告, **87** (1978), p. 169.
- 11) Shimbo, M. et al.: *Proc. Int. Conf. on Cybern. Soc.*, '78, **I** (1978), p. 394.
- 12) 山崎敏正, 山ノ井高洋, 河口至商: 北大工学部研究報告, **112** (1983), p. 95.
- 13) Yamazaki, T. Report of Symp. on Finsler Geom. at Nara. Nov., (1982).
- 14) Gogel, W. C.: *Perception & Psychophysics*, **9** (1971), p. 92.
- 15) 山崎敏正, 河口至商: 北大工学部研究報告, **126** (1985), p. 117.
- 16) Martius, G.: *Phil. Stud.*, **5** (1889), p. 601.
- 17) 和田陽平, 大山正, 今井省吾 (編): 感覚+知覚心理学ハンドブック 第5章, 誠信書房 (1981), p. 609.
- 18) Thouless, R. H.: *Brit. J. Psychol.*, **21** (1931), p. 339.
- 19) Battro, A. M. and Reggini, H. C.: *Perception*, **7** (1978), p. 583.
- 20) 石井克己: 哲学年報, **22** (1960), p. 347.
- 21) 石井克己: 哲学年報, **24** (1962), p. 121.
- 22) 小保内虎夫: 視知覚-感応学説研究一, 中山書店 (1955), p. 27.
- 23) Leibowitz, H.: *J. Opt. Soc. Am.*, **43** (1953), p. 902.
- 24) Watanabe, A. et al.: *Vision Res.*, **8** (1968), p. 1245.

- 25) Berry, R. N.: *J. exp. Psychol.*, **38** (1948), p. 708.
- 26) Rawlings, S. C. and Shipley, T.: *J. Opt. Soc. Am.*, **59** (1969), p. 991.