北海道大学工学部研究報告
第127号（昭和60年）

Bulletin of the Faculty of Engineering,
Hokkaido University. No. 127 (1985)

セールス巡回路に関する幾何学的解法

榊原　勝昭

（昭和60年3月30日受理）

A Geometric Method to Solve the Traveling Salesman Problem

Katsuaki SAKAKIBARA

(Received March 30, 1985)

Abstract

We added one special edge to a tree with the shortest total length, and named this "graph-R". We found in this work that this "graph-R" can be transformed to the shortest Hamilton-line by our geometric method.

1．まえがき

セールス巡回路の問題に関する一般的な解法は，問題の存在が議論され始めて以来約50年の間，全数検査法が唯一のものとなって来た。今回，少なくとも，一見なんの特徴も感じられない例題に関して，その解に幾何学的方法で到達出来たので報告する。

2．本　　文

全ての例題に適用出来る一般性を持った解法は，全数検査法ただ一つだと云う。と云う事は，殆んど全ての場合，最短の巡回路が目前に在っても，全数検査と云う膨大な作業の後でなければ，それと認め得ない事になる。そこで，図1（頂点間の距離は表1。全ての辺を短い順に並べたものが表2）に関する一つの巡回路（図2に示した）が最短である事を，幾何学的に証明する。

2．1　グラフ理論に関する2，3の準備

● "もど木" とΔ

先づKruskalの方法[1]で，この例題の全長最小の木を描く（図3）。次に，この木の中の最大の辺（t_{max}）を取り除いて，木を2つのブロックに分離する。二つのブロックに分けられた頂点を繋ぐ辺の中の最小の辺が t_{max} であるが，その次に小さい辺（t_{bridge}）を求め（表2を参照），それを全長最小の木に描き加えたものを作る（図5）。出来たもの（図5）は，木に似てはいるが，木ではないので簡単に "もど木" と呼ぶ事にする。

全長最小の木の長さを T_o，任意の巡回路の長さを L，この巡回路の中の最大の辺を l_{max} とすると，

$$T_o \leqq L - l_{max} \qquad 即ち \qquad T_o + l_{max} \leqq L \tag{1}$$

が成立つ。と言うのは，巡回路から一辺を取り除いたグラフは木となるからである。

更に，如何なる巡回路も，その頂点を任意の2つのブロックに分けて見た場合，両者を繋ぐ辺

表１　頂点の間の距離

A	B 2.0	D 4.1	C 4.5	G 8.2	K 9.6	E 10.1	J 10.24	I 10.9	F 11.1	H 11.4
B	A 2.0	D 2.2	C 2.8	G 8.0	E 10.5	I 10.6	H 11.0	K 11.46	F 11.5	J 12.2
C	B 2.8	D 3.0	A 4.5	G 10.2	I 12.1	H 13.0	E 13.1	K 14.0	J 14.6	F 14.8
D	B 2.2	C 3.0	A 4.1	G 7.3	I 9.1	H 10.0	E 10.4	F 11.3	K 13.2	J 14.1
E	F 1.0	G 3.8	H 4.3	I 6.6	A 10.1	K 10.3	D 10.4	B 10.5	J 11.9	C 13.1
F	E 1.0	H 4.2	G 4.4	I 6.7	K 11.03	A 11.1	D 11.3	B 11.5	J 12.4	C 14.8
G	H 3.2	E 3.8	I 4.0	F 4.4	D 7.3	B 8.0	A 8.2	C 10.2	K 12.0	J 13.3
H	I 2.6	G 3.2	F 4.2	E 4.3	D 10.0	B 11.0	A 11.4	C 13.0	K 14.5	J 15.7
I	H 2.6	G 4.0	E 6.6	F 6.7	D 9.1	B 10.6	A 10.9	C 12.1	K 15.9	J 17.3
J	K 1.4	A 10.24	E 11.9	B 12.2	F 12.4	G 13.3	D 14.1	C 14.6	H 15.7	I 17.3
K	J 1.4	A 9.6	E 10.3	F 11.03	B 11.46	G 12.0	D 13.2	C 14.0	H 14.5	I 15.9

表２　辺の大きさの順序

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
EF	KJ	AB	BD	HI	BC	CD	GH	EG	GI	AD	FH	EH	FG	AC	EI	FI	DG	BG	AG	DI	AK	DH	AE	CG	AJ	EK	DE
1.0	1.4	2.0	2.2	2.6	2.8	3.0	3.2	3.8	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	6.6	6.7	7.3	8.0	8.2	9.1	9.6	10.0	10.1	10.2	10.24	10.3	10.4

28	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
BE	BI	AI	BH	FK	AF	DF	AH	BK	BF	EJ	GK	CI	BJ	FJ	CH	CE	DK	GJ	CK	DJ	HK	CJ	CF	HJ	IK	IJ
10.5	10.6	10.0	11.0	11.03	11.1	11.3	11.4	11.46	11.5	11.8	12.0	12.1	12.2	12.4	13.0	13.1	13.2	13.3	14.0	14.1	14.5	14.6	14.8	15.7	15.9	17.3

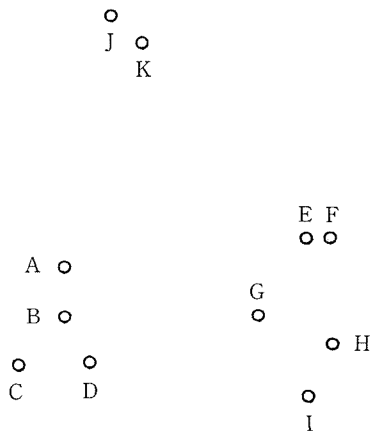

図１

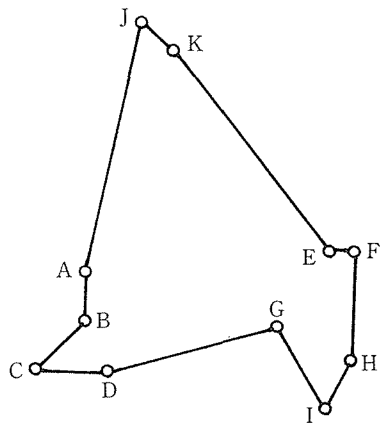

図２　巡回路

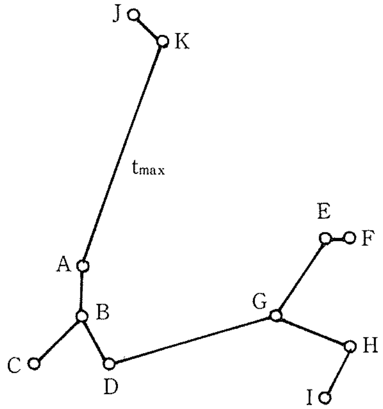

図3　全長最小の木

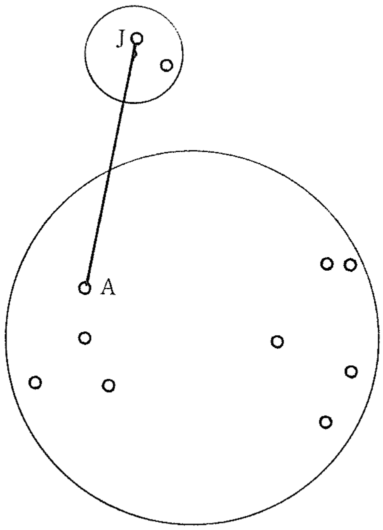

図4　二つのブロックと架近

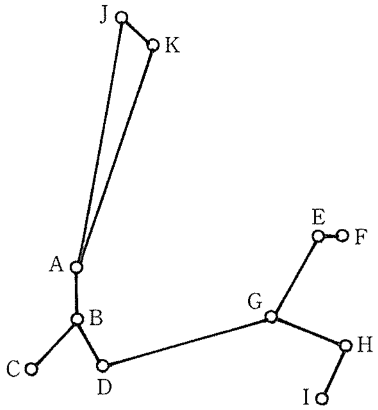

図5　とど木

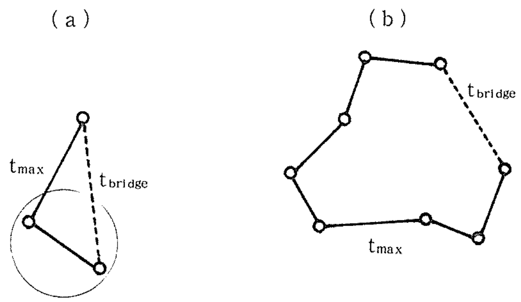

図6　Δ＝0の例

を最低2本持っている。t_{max} と t_{bridge} は，或る分け方によった2つのブロックを繋ぐ最小の辺とその次に小さい辺である。Lの中にはこの2本の架辺（ブロックを繋ぐ辺）に相当する辺が含まれており，そのLの中の最大の辺が l_{max} である。即ち

$$t_{max} < t_{bridge} \leqq l_{max} \qquad \therefore \quad T_o + t_{bridge} \leqq T_o + l_{max} \leqq L \tag{2}$$

が成立つ[2)]。（表2から明らかな様に，辺の長さは全て異なるとしている。）そこで，

$$L = T_o + t_{bridge} + \Delta \qquad \Delta \geqq 0 \tag{3}$$

と置けば，最短の巡回路を探す事は，Δ を最小とするLを見出す事である。

図6の（a）及び（b）は，$t_{bridge} = l_{max}$ で $T_o + t_{bridge} = L$ となる特殊な例題であるが，この場合には $\Delta = 0$ であり，これより小さいLは在り得づ，これが最短の巡回路となっている。

●拾捨の対応関係（置換）と Δ の下限

さて，$\Delta \neq 0$ の場合には，もど木に任意の巡回路を重ねると，重ならない辺がいくつか必ず生じる事になる(図7)。巡回路の方のこの共通でない各辺は，もど木の一部と相まって，各々一個づつの固有の部分的な閉路を作る。何故なら，木には一辺を加える毎に，閉路が出来るが，もど

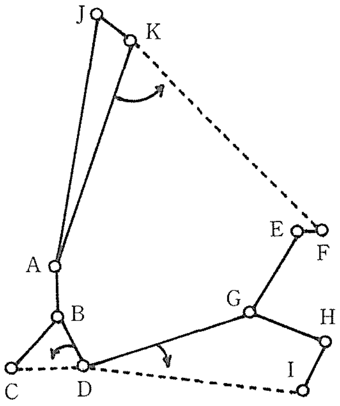

図７　置換の対応

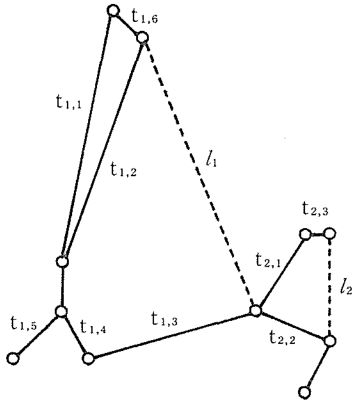

図８　可能な置換

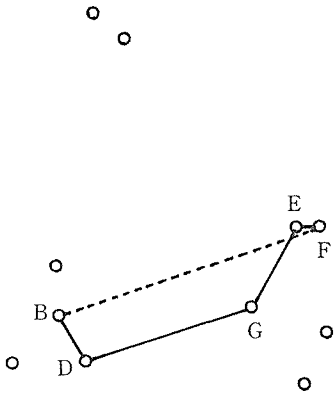

図９　部分閉路の決定Δ_{ij}の決定

木は木を含んでいるからである。但し，巡回路の方の共通でない辺が，t_{bridge} を作る際の二つのブロックを繋ぐ辺である場合には，もど木の閉路に起因して，二通りの部分閉路が出来る。

図７のグラフから，もど木の方の共通でない辺を全て取り除くと巡回路になる。もど木と巡回路の各々の共通でない辺の数は同数である。又，これらの部分閉路を残したままでは，巡回路にはなり得ない。巡回路の方の共通でない辺が作る部分閉路には，もど木の方の共通でない辺（図７のグラフを巡回路にするには取り除かなければならない辺）が，一つづつ対応して含まれている。なぜなら，もし，或る部分閉路にはもど木の方の共通でない辺が一つも含まれていないとすると，もど木の方の共通でない辺を全て取り除けば巡回路になるはずなのに，上の部分閉路はそのまま残っていると云う矛盾をきたすからである。

これらの事から次の事が言える。

i）「任意の巡回路は，もど木の一部又は全部の辺を，もど木と関係のない辺で置き換える事によって作る事が出来る。その際，加えられる辺と除かられ辺の間には，１対１の対応関係がつけられる」

ii）「加えられる辺に対応する除かれる辺は，加えられる辺が作る部分閉路中の辺である」。ところで，もど木に一辺を加えて出来る部分閉路の中には，加えた辺よりも長い辺は存在しない（∵もし，それより長い辺があれば，その辺の代りに“加えた辺”を用いた木の方が小さくなり，もど木が全長最小の木から作られた事と矛盾する）。又，t_{bridge} は架辺（二つのブロックを繋ぐ辺）の作る閉路のみに含まれ，“共通でない架辺”$> t_{bridge}$の関係があるので，どの閉路でも成立つ。）従って，次の事が云える。

iii）「もど木を巡回路に変換する際，つけ加えられる辺は，それに対応して除かれる辺よりも常に長い」

従がって，加える辺を l_i，それに対する除かれる辺を t_{ij} とすると

$$l_i - t_{ij} = \Delta_{ij} > 0 \quad , \quad \sum_i \Delta_{ij} = \Delta \tag{4}$$

と表わされるが，加える辺が定まると，それに関する Δ_{ij} の取り得る下限が決まってしまう。何故なら，l_i によって，“除かれ得る辺”は，もど木との間に l_i が作る固有の部分閉路の中の辺であるが，その閉路に関するもど木の辺の最大のものは容易に指定出来，それが Δ_{ij} の下限を作る事は明らかである。（図８参照）

表3　各頂点に加えうる辺に関する Δ_1 の下限

	始点 終点	1項目	2項目	3項目	4項目	5項目	6項目	7項目	8項目	9項目	10項目
一段目	C	D BC 0.2	A BC 1.7	G DG 2.9	K AJ 3.76	J AJ 4.36	I DG 4.8	H DG 5.7	E DG 5.8	F DG 7.5	
	F	H GE 0.4	G GE 0.6	K AJ 0.76	J AJ 2.16	I GE 2.9	A DG 3.8	D DG 4.0	B DG 4.2	C DG 7.5	
	I	G GH 0.8	D DG 1.8	E EG 2.8	F EG 2.9	B DG 3.3	A DG 3.6	C DG 4.8	K AJ 5.66	J AJ 8.26	
二段目	J	E AJ 1.66	B AJ 1.96	F AJ 2.16	G AJ 3.06	D AJ 3.86	C AJ 4.36	H AJ 5.46	I AJ 7.06		
	K	E AJ 0.06	F AJ 0.79	B AJ 1.22	G AJ 1.76	D AJ 2.96	C AJ 3.76	H AJ 4.26	I AJ 5.66		
三段目	A	G DG 0.9	C BC 1.7	D BD 1.9	E DG 2.8	I DG 3.6	F DG 3.8	H DG 4.1			
	B	G DB 0.7	K AJ 1.22	J GJ 1.96	E DG 3.2	I DG 3.3	H DG 3.7	F DG 4.2			
	D	C CB 0.2	I DG 1.8	A BD 1.9	H DG 2.7	K AJ 2.96	E DG 3.1	J AJ 3.86	F DG 4.0		
	E	K AJ 0.06	H EG 0.5	J AJ 1.66	I GE 2.8	A DG 2.8	D DG 3.1	B DG 3.2	C DG 5.8		
	G	F CE 0.6	B DG 0.7	I GI 0.8	A DG 0.9	K AJ 1.76	C DG 2.9	J AJ 3.06			
	H	F GE 0.4	E GE 0.5	D DG 2.7	B DG 3.7	A DG 4.1	K AJ 4.26	J AJ 5.46	C DG 5.7		

2．2　巡回路になるための必要な置換と置換のセット（変換）及び Δ_0

例題によってもど木は一義的に定まるが，$\Delta \neq 0$ の場合には必ず端点（図5のC，F及びI）を持っている。もど木を巡回路にする変換には，これらの端点の各々に少なくとも一辺を加える結果をもたらす置き換えが含まれている（そうでなければ，巡回路に必要な各点に関する二次連結が得られる可能性がないから。）又，もど木には一つの部分閉路があるが，これを取り崩す置換も必要不可欠である。（部分閉路を持ったままでは巡回路になり得ないから。）即ち，もど木が定まると，それを巡回路にする変換に含まれなければならないいくつかの置換が指定される。

この必要不可欠な置換に関し，増分が最小となるものを次の様に求める事が出来る。

例えば図5の端点Fに加えられ得る辺は，Fが既に結ばれているEを除いた他の全ての点との間の辺である。その中の一つ，例えば $\overline{FB}$ を指定すると，それによって除かれ得る辺は，$\overline{FB}$ と相まって部分閉路を作るもど木の辺 $\overline{FE}$，$\overline{EG}$，$\overline{GD}$ 及び $\overline{DB}$ の四辺に絞られる。$\overline{FB}$ と置き換って，その増分を最小にするのは，四辺の中の最大の辺 $\overline{DG}$ である（表2参照）。

各端点に加えられ得る辺について，各々の増分が最小になる場合を表3にしてある。表3には，もど木の閉路AJKAを崩し得る辺（もど木を作る際に生じた二つのブロックの間を架ぐ辺，以下単に架辺と呼ぶ）の各々の置換について増分が最小になるものを二段目にまとめてある。更に，三段目には，残りの頂点に加えうる辺について同様なものを一括してある。この表には同一の置換が，表裏の関係で二重に記入されている。

表3の見方は次の通りである。左端の英文字は頂点を表わしている。この英文字の右側の行には，その頂点に加え得る辺による置換のうちの増分最小のものを小さい順に並べてある。頂点C

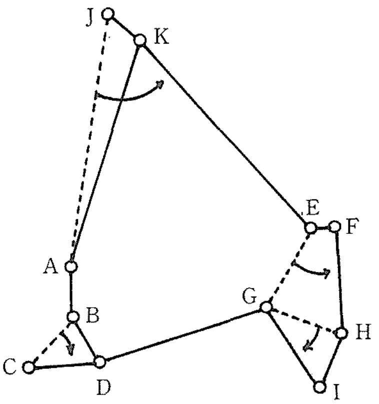

図10 $\delta=0$ の変換

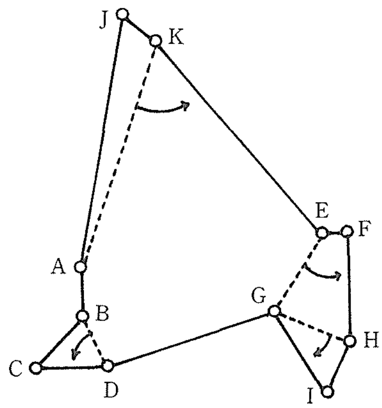

図11 $\delta \fallingdotseq 0$ 最小 δ の変換

に関する行の1項目は次のように読む。即ち，CがDに結ばれる辺による置換のうち，増分が最小となるのは $\overline{\mathrm{BC}}$ が除かれる場合であり，その増分は0.2である，と読む。

もど木を巡回路にする変換は，一段目の各行からと二段目全体から一つの都合4個の置換を含む事を必要不可欠とする。但し，この4個の中に重複しているものがあれば，一方を削除してかまわない。(何故なら，この重複は，必要な置換の二つが一つで間に合う(例えば，端点同志を結ぶ辺による置換は，その置換一つで，二つの頂点の次数を上げる) 場合の表れであるから)

こうした事情を加味しつつ，必要不可欠な置換を全て含む変換に関する増分の下限は次の様に求められる。

$$\Delta\ (\mathrm{CD}/\mathrm{BC})+\Delta\ (\mathrm{FH}/\mathrm{EG})+\Delta\ (\mathrm{IG}/\mathrm{GH})+\Delta\ (\mathrm{KE}/\mathrm{AJ})$$
$$=0.2+0.4+0.8+0.06=1.46=\Delta_0 \tag{5}$$

但し，Δ (CD／BC) は，$\overline{\mathrm{CD}}$ を加えて $\overline{\mathrm{BC}}$ を除く置換に伴なう増分0.2を表わす。他も同様。この4個の置換は，表3の一段目の各行の先頭のものと二段目全体の中での最小のものからなっている。従って，任意の巡回路のもど木からの増分 Δ は，

$$\Delta_0 \leqq \Delta \quad , \quad \Delta_0+\delta=\Delta \qquad 但し，\delta \geqq 0 \tag{6}$$

となる。従って，この4個の置換をセットにした変換で，巡回路が得られるなら，この変換は最短の巡回路に対応している事になる。もど木にこの変換を施したものを図10に示めしたが，これは巡回路となっていない。

そこで今度は，δ が最小になる変換を求めるべく，以下の如く考えを進める。

2.3 置換の"差し替え"と"加足"及び δ が最小となる"巡回路に対応する変換"の見つけ方

先ず表3の一部を次の様に修正する。

表3には全ての置換が網羅されているわけではない。例えば頂点Cに加えられる辺 $\overline{\mathrm{CD}}$ による置換のうち，増分が最小になる (CD／BC) が登録されているだけであるが，これの外に (CD／BD) もある。他の辺に関する同様に未登録の置換を全て加味して，表3の最初の部分 (各頂点に関する辺の置換の増分が小さい部分) を遺漏のないものに修正する。その結果が表4である。

更に，この表4を次の様に改良する。

第一に，もど木の部分閉路を解消(もど木の部分閉路を全体的閉路即ち巡回路に発展的に解消)

表4 各頂点に加えうる辺に関する$\triangle_{ij}$の小さい部分

	始点 終点	1項目	2項目	3項目	4項目	5項目	6項目
一段目	C	D BC 0.2	D BD 0.8	A BC 1.7	A AB 2.5	G DG 2.9	K AJ 3.76
	F	H EG 0.4	G EG 0.6	K AJ 0.79	H GH 1.0	K AK 1.33	J AJ 2.16
	I	G GH 0.8	G IH 1.4	D DG 1.8	E EG 2.8	F EG 2.9	B DG 3.3
二段目	J	E JA 1.66	B JA 1.96	F JA 2.16	E AK 2.2	B AK 2.6	F AK 2.8
	K	E JA 0.06	E KA 0.7	F JA 0.79	B JA 1.22	F KA 1.43	G JA 1.76
三段目	A	G DG 0.9	C BC 1.7	D BD 1.9	D AB 2.1	C AB 2.5	E DG 2.8
	B	G DG 0.7	K AJ 1.22	K AK 1.86	J AJ 1.96	J AK 2.6	E DG 3.2
	D	C CB 0.2	C BD 0.8	I DG 1.8	A BD 1.9	A AB 2.1	H DG 2.7
	E	K AJ 0.06	H EG 0.5	K AK 0.7	H GH 1.1	J AJ 1.66	J AK 2.3
	G	F GE 0.6	B DG 0.7	I GH 0.8	A DG 0.9	I IH 1.4	K AJ 1.76
	H	F GE 0.4	E GE 0.5	F GH 1.0	E GH 1.1	D DG 2.7	F EF 3.2

表5 差し替えと加足による増分の小さい部分

	始点 終点	1項目	2項目	3項目	4項目	5項目	6項目	
一段目	C	D BC 0	D BD 0.6	A BC 1.5	A AB 2.3	G DG 2.7	K AJ 3.74	
	F	H EG 0	G EG 0.2	K AJ 0.39	H GH 0.6	K AK 0.93	J AJ 1.76	
	I	G GH 0	G FH 0.6	D DG 1.0	E EG 2.0	F EG 2.1	B DG 2.5	
二段目	JorK	KE AJ 0	KE AK 0.64	KF○ AJ 0.73	KB AJ 1.16	KF○ AK 1.27	JE AJ 1.6	
三段目	A		G DG 0.9	C○ BC 1.7	D BD 1.9	D AB 2.1	C○ AB 2.5	E DG 2.8
	B		G DG 0.7	K○ AJ 1.22	K AK 1.86	J AJ 1.96	J AK 2.6	E DG 3.2
	D		C○ BC 0.2	C○ BD 0.8	I○ DG 1.8	A◎ BD 1.9	A◎ AB 2.1	H DG 2.7
	E		K○ AJ 0.06	H EG 0.5	K○ AK 0.7	H GH 1.1	J○ AJ 1.66	J AK 2.3
	G		F○ GE 0.6	B◎ DG 0.7	I○ GH 0.8	A◎ DG 0.9	I○ IH 1.4	K AJ 1.76
	H		F○ GE 0.4	E◎ GE 0.5	F○ GH 1.0	E◎ GH 1.1	D◎ DG 2.7	F EF 2.2

するのに不可欠な置換は，二段目（の2行）から一つだけなので，1本の行にまためてしまう。第二は，一段目と二段目の各数値を，各々の行の先頭の項の数値を減じたものに変える。三段目に関しては，数値は変更せづに，いづれの行も右側にひと駒づらしてしまう。こうして出来たのが表5である。

この表5を用いて，巡回路に対応する変換の中で，δが最小になるものを見つけるのである。

さて，巡回路になり得る変換は，一段目と二段目の四つの行から少なくとも1個づつの置換を選んでいなければならない。この4個の置換に関して，増分が最小のものばかりを集めてΔ_0の変換を作ったが，これは，CとJが新たな状態の端点となってしまい巡回路と対応しない事を先に見た。

巡回路になり得る可能性を持った任意の変換には，それをΔ_0変換と参照した場合，Δ_0変換のCとJに関する置換を，同じ行の他の置換と差し替えるか或いは加える内容が含まれている。何故ならもしどちらも含まなければ，CとJの端点の状態は解消され得ないからである。

一段目と二段目の各々の置換の数値は，この差し替えによる増分（δに関する）であり，三段目の数値は加えられた場合の増分となっている。

同一の置換であれば，加えるより差し替えの増分の方が小さいので，差し替えから出発する。

Δ_0変換で新たな端点となった頂点CとJに関する置換を直ぐ右隣りの置換（増分最小）と差し換えた変換を作る。この変換は，

$$\delta\ (CD/BD)+\delta\ (FH/EG)+\delta\ (IG/GH)+\delta\ (EK/AK)$$
$$=0.6+0+0+0.64=1.24=\delta_0 \qquad (7)$$

の増分を持つ。

次に，この増分より小さい増分ですむ"加える変換"のうちから巡回路に対応する可能性のあるものを探す。それには先づ，単独で増分が1.24を起えてしまう置換を表5から除いてしまってかまわない。ちなみに，それを表6にしてある。更に，この表6からCとJに関連するものを拾い出す。それを表7にした。更に，一つの変換に，同一の置換を二度使う意味はないので，既に変換に組み入れられているものを除く。ここでは，その結果も表8にして見易くした。

結局，上の差し替えで得た変換との対抗範囲内の，加える変換に使用可能として抹消されずに未だ残っているのはたった2個の置換に過ぎない。そしてこの2個の増分はいずれも対応する差し替えた置換より大きい。

そこで先づ，上の差し替えで得た変換の方から，実際に巡回路になっているかどうか調べてみる。もど木にこの変換を施したものが図11である。この変換は巡回路に対応するものである事が判明する。この変換を得た過程から明らかに，この変換のδは巡回路と対応する可能性があるものの中で最小である。従がって，図11に示めされた巡回路は最短のものである。

図2の巡回路はこれと同じものである。かくして，図2の巡回路が最短のものである事は証明された。

ここで，δ_0の変換が，δに関する増分を持ち巡回路と対応する可能性を持つ最小の変換である事は，表6以下の手順を踏まなくても明かであった。何故ならこれは，C及びJに関して差し替えたり加えたりし得る置換のうち，増分最小のものでの差し替えによって得られているからである。

表6以下の手順は，もっと先まで辿らなければならない例題の場合に備えて示めしたものであ

表 6

	始点 終点	1 項目	2 項目	3 項目	4 項目	5 項目
一段目	C	D B C 0	D B D 0.6			
	F	H E G 0	G E G 0.2	K A J 0.39	H G H 0.6	K A K 0.93
	I	G G H 0	G I H 0.6	D D G 1.0		
二段目	JorK	E K A J 0	E K A K 0.64	F K A J 0.73	B K A J 1.16	
三段目	A		G D G 0.9			
	B		G D G 0.7	K A J 1.22		
	D		C B C 0.2	C B D 0.8		
	E		K A J 0.06	H E G 0.5	K A K 0.7	H G H 1.1
	G		F E G 0.6	B D G 0.7	I G H 0.8	A D G 0.9
	H		F E G 0.4	E E G 0.5	F G H 1.0	E G H 1.1

表 7

	始点 終点	1 項目	2 項目	3 項目
一段目	C	D B C 0	D B D 0.6	
	F	H E G 0		
	I	G G H 0		
二段目	JorK	E K A J 0	E K A K 0.64	
三段目	A			
	B			K A J 1.22
	D		C B C 0.2	C B D 0.8
	E		K A J 0.06	
	G			
	H			

表 8

	始点 終点	1 項目	2 項目	3 項目
一段目	C	D B C 0	D B D 0.6	
	F	H E G 0		
	I	G G H 0		
二段目	JorK	E K A J 0	E K A K 0.64	
三段目	A			
	B			K A J 1.22
	D			C B D 0.8
	E			
	G			
	H			

る。

ここに示した幾何学的解法は，以上の過程から明らかな様に，本例題になんら規制されたり依拠した所はなく，従がって全ゆる例題に適用出来ると考えられる。

3．あとがき

同じ長さの辺や直線上に並ぶ三点のわずらわしさは，ほんの少しづらす事で避けられる。δ探しのステップは，どんな例題においても，極く少ないものですむ必然性がありそうに思える。

又，グラフ理論に関するいくつかの発見は，思わぬ展開に繋がるかもしれない。

最後に，日々見い出される殆んど全ての科学知識が，それを直接用いる事の出来るのは，その分野の専問家のみになってしまっている段階で，新聞配達の少年にも手軽に用いられる種類のものを見い出し得た事に，いささかの心地良さを感じる。しかし，いくつもの目的地に爆弾みたいなものを配って周るパイロット等も使用し得る事を思うと，とても気が重くなる。

これを公開しなければ，上の様な私見を述べる機会も得られないのだと思いつつも，一人のパイロットと一万人の新聞少年とをセットにしても両者共に知らない方が良いのではとの思いを絶ちきれません。こんな時，西洋の習慣では「神にでもなるつもりか」とサラリと受け流すそうですが，東洋にはシッカリと悩む慣しもあるようです。

謝　辞

長い間御指導下った鈴木道雄教授に深く感謝致します。又，この問題の存在を初め各種の情報を提供し続けてくれた石川治助手と種々御援助下った佐藤正義助教授の両氏に心からお礼申し上げます。

参考文献

1） J. B. Kruskal, : Proc. Am. Math.Soc, vol. 7(1956)48～50

2） 榊原勝昭：北海道大学工学部研究報告 125（1985）