



Title	砂の3次元構成モデル：多方向すべりモデルの誘導
Author(s)	三浦, 均也; 土岐, 祥介; Finn, W. D. Liam
Citation	北海道大學工學部研究報告, 140, 1-13
Issue Date	1988-05-30
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/42102">http://hdl.handle.net/2115/42102</a>
Type	bulletin (article)
File Information	140_1-14.pdf



[Instructions for use](#)

砂の3次元構成モデル  
—多方向すべりモデルの誘導—

三浦 均也 土岐 祥介 W. D. Liam FINN

(昭和62年12月26日受理)

**Three-Dimensional Constitutive Model for Sand  
—Derivation of Multi-Directional Sliding Model—**

Kinya MIURA, Shosuke TOKI and W. D. Liam FINN

(Received December 26, 1987)

**Abstract**

A constitutive model, named Multi-Directional Sliding Model, is developed for sand under three-dimensional stress conditions. The basic concept of the model is that a particulate, discrete medium such as soil has innumerable potential sliding planes at all locations and in all directions, and its deformation characteristics are governed by sliding mechanisms on each sliding plane.

The stress-strain relationships on each sliding plane are formulated for three types of deformations: consolidation, shear deformation and dilatancy. The consolidation behavior is specified by the linear relationship between void ratio and logarithmic consolidation stress. The shear deformation behavior is modeled by the hyperbolic relation between shear loading function and shear strain assisted by Masing's criterion for stress reversal. The dilatancy behavior is specified by the linear relationship between the shear-normal stress ratio and normal-shear strain increment ratio. The strain increments in an auxiliary two-dimensional stress-strain system are calculated as the summation of all sliding deformation increments on potential sliding planes. And the three-dimensional strain increments of a soil element are derived as the linear summation of the strain increments of the three two-dimensional stress-strain systems, based on the Compounded Mobilized Plane Theory.

The proposed model is capable of modeling a nonlinear, inelastic and anisotropic sand deformation response to various loadings involving stress reversals and the rotations of principal stress axes under general stress conditions.

1. ま え が き

本報告では、一般的な載荷条件にある異方的な力学特性を示す土の応力-ひずみ増分関係を予測できる構成モデル (多方向すべりモデル; *Multi-Directional Sliding Model*) の誘導過程を説明している。誘導されたモデルの適用性は本報告の続報において検討され、等方圧密・膨張挙動および広範囲の拘束圧の下において、過圧密履歴を受けた砂のせん断変形挙動をよく説明できることが示されている。

多方向すべりモデルは本報告の第一著者によって開発され、主応力軸回転に固有の変形特性と初期異方構造に起因する砂の異方的な変形・強度特性を適切に評価できることが示された<sup>1)</sup>。その後、応力の反転および繰返しを含み中間応力が大きく変化する様な応力条件においても、モデルは砂質土の変形特性をよく説明できることが明らかにされている<sup>2)</sup>。このように、このモデルは複雑な応力条件にある異方性砂質土に適用できるが、本研究では、広範囲な圧密応力および過圧密履歴を受けた土に適用できるようにモデルを改良している。まず、圧密変形を予測できるように潜在的なすべり面における垂直応力-垂直ひずみ増分関係を新たに導入している。また、変形・強度特性に及ぼす圧密応力の影響と過圧密の影響を考慮するために、すべり面上におけるせん断荷数とせん断剛性率の数式化においてそれらの垂直応力依存性を導入し、さらに、過圧密効果によってせん断変形およびダイレイタンスーが抑制される領域を垂直-せん断応力面上に設定している。

## 2. 構成モデルの誘導

多方向すべりモデルでは、「粒状体の一種である土は、あらゆる位置ですべての方向に無数の潜在的なすべり面を有し、その変形特性はすべてのすべり面上で生じる変形機構によって支配されている」という基本的な仮説に基づいて土の力学挙動をモデル化している。このような微視的な観点に立った仮説の土質力学への適用は、Calladine<sup>3)</sup>による“*Micro Structural Model*”に始まる。この種の研究では、三次元的に分布した無数のすべり面上で独立に降伏条件を設定している。Calladine<sup>3)</sup>はひずみ増分方向の応力増分方向への依存性や異方的な硬化特性などを、また、Bazant and Kim<sup>4)</sup>は粘性土の変形特性の異方性を説明し、土質材料の力学的挙動を理解する上でこのような仮説が極めて有用であることを示唆した。

本モデルでは、潜在的なすべり面上で生じるすべり変形の特性に基づいて土要素の強度・変形特性を評価する過程で、次のような基本仮定を設けている。

- (1)各々の潜在的なすべり面上で生じるすべり変形の発生機構はお互いに独立で、個々のすべり面上の応力状態と応力履歴のみに依存している。
- (2)補助的な二次元応力-ひずみ系におけるマクロな変形の増分は、すべての潜在的なすべり面上で生じたすべり変形増分の総和として評価できる。
- (3)複合滑動面の概念<sup>5)</sup>に従って、要素の三次元的な変形増分は3個の補助的な二次元系で生じるひずみ増分の線形和で与えられる。

モデルでは、すべり面上で生じる変形は圧縮変形、せん断変形およびダイレイタンスーの各成分からなっていると考え、それぞれの成分において土が基本的に有している非線形、非弾性、さらに異方的な変形特性を適切に評価できるように応力-ひずみ増分関係を与えている。誘導された構成モデルは次のような土の変形挙動の解析に適用可能である。

- (1)等方的、あるいは、地盤の堆積過程で形成されるような異方的粒子配列構造に起因する二軸直交異方的な力学特性を示す土。
- (2)荷重の繰返しおよび反転や、一つの鉛直面内における主応力軸回転を含む一般的な応力条件の下にある土（この条件は図-1に示すような平面変形条件と、軸対称変形条件を十分に含んでいる）。

### 2.1 三次元変形の誘導

Matsuoka<sup>5)</sup>によって提案された複合滑動面の概念を利用し、モデルでは三次元変形を3個の補助的な二次元応力-ひずみ系で生じる増分の線形和として計算している。すなわち、図-2に図

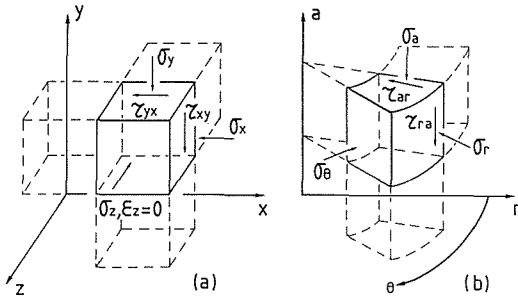


Fig. 1 Stress condition of soil element: (a) in a plane deformation condition, and (b) in an axisymmetric condition.

解したように、基準座標系 i-j-k における要素のひずみ増分  $\Delta\epsilon_i, \Delta\epsilon_j, \Delta\gamma_{ji}$  および  $\Delta\epsilon_k$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_i &= \Delta\epsilon_{i(ji)} + \Delta\epsilon_{i(ik)}, & \Delta\epsilon_j &= \Delta\epsilon_{j(jk)} + \Delta\epsilon_{j(ij)}, \\ \Delta\gamma_{ji} &= \Delta\gamma_{ji(ji)}, & \Delta\epsilon_k &= \Delta\epsilon_{k(ik)} + \Delta\epsilon_{k(jk)} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、添字(j i), (j k)および(i k)を伴うパラメータはそれぞれ補助的二次元系 j-i, j-k および i-k に関連するパラメータである。

提案された複合滑動面理論は主応力軸が常に固定された条件でのみ展開されている。この時、主応力軸と主応力増分軸の方向は常に一致しているので、基準座標軸 i-, j-, k-軸はそれぞれ  $\sigma_1$ -,  $\sigma_3$ -,  $\sigma_2$ -軸と重なるように取られている。しかし、主応力軸の回転を含むような応力条件では、一般に主応力軸と主応力増分軸の共軸性は保たれていない。このような場合、発生する変形増分の大きさの応力増分への依存性と変形モードの応力条件への依存性の両者を適切に考慮するため、基準軸 j-, i-, k-軸は主応力軸  $\sigma_1$ -,  $\sigma_3$ -,  $\sigma_2$ -軸と主応力増分軸  $\Delta\sigma_1$ -,  $\Delta\sigma_3$ -,  $\Delta\sigma_2$ -軸の中央にあると仮定した<sup>1)</sup>。したがって、規準座標系の方向は次式で与えられる (図3, 4参照)

$$\xi_1 = (\alpha + \beta)/2 + \pi/2, \quad \xi_3 = (\alpha + \beta)/2 \quad (2)$$

ここで、 $\alpha$  と  $\beta$  はそれぞれ最大主応力軸  $\sigma_1$ -軸と最大主応力増分  $\Delta\sigma_1$ -軸の傾角である (図-3(a), (b), (c)参照)。

基準座標系 i-j-k における応力とひずみ増分は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_j + \sigma_i}{2} &= \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} = \sigma_m, \\ \frac{\sigma_j - \sigma_i}{2} &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\xi_1 + \tau_{yx} \sin 2\xi_1 = \tau_p \cos 2\xi_1 + \tau_s \sin 2\xi_1, \\ \tau_{ji} &= -\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\xi_1 + \tau_{yx} \cos 2\xi_1 = -\tau_p \sin 2\xi_1 + \tau_s \cos 2\xi_1, \\ \sigma_k &= \sigma_z \end{aligned} \quad (3)$$

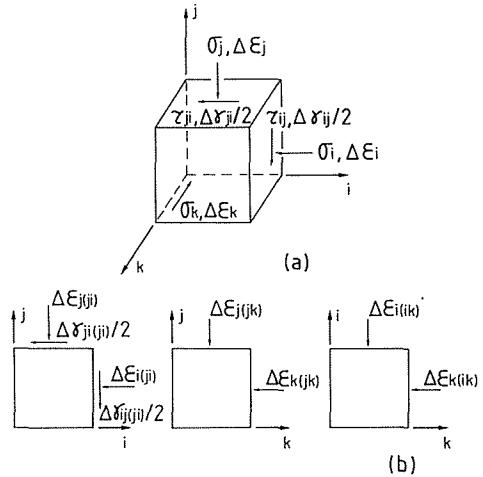


Fig. 2 Superposition of strain increments to provide three-dimensional deformation: (a) three-dimensional stress and strain increments of the element in i-j-k reference coordinate system, (b) two-dimensional stress and strain increments in auxiliary two-dimensional systems

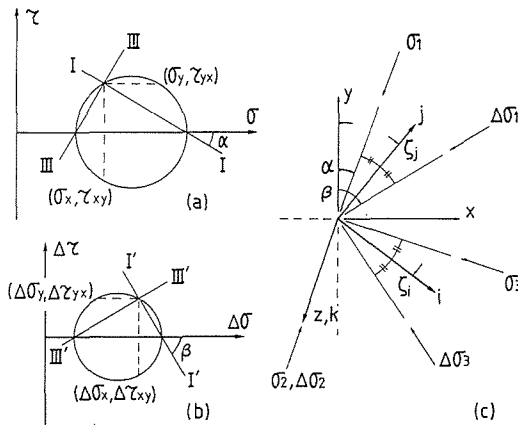


Fig. 3 Orientation of reference  $i$ -,  $j$ -,  $k$ -axes in  $x$ - $y$ - $z$  coordinate system; (a) Mohr's stress circle, (b) Mohr's stress increment circle, (c) schematic description of the orientation of  $i$ -,  $j$ -,  $k$ -axes

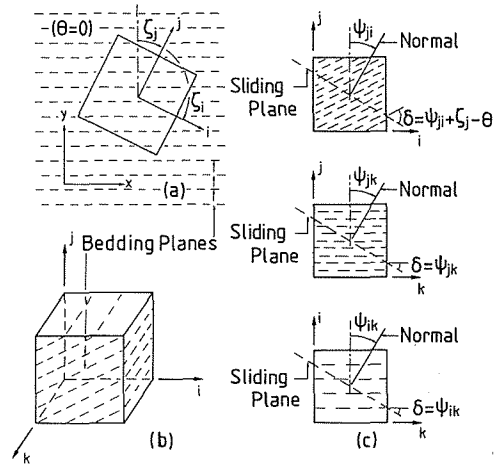


Fig. 4 Illustration of three auxiliary two-dimensional stress-strain systems; (a) an element in  $x$ - $y$ - $z$  coordinate system, (b) the element in  $i$ - $j$ - $k$  reference coordinate system, (c) three auxiliary two-dimensional stress-strain systems

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_j + \Delta \epsilon_i &= \Delta \epsilon_y + \Delta \epsilon_x = \Delta \epsilon_{ar}, \\ \Delta \epsilon_j - \Delta \epsilon_i &= (\Delta \epsilon_y - \Delta \epsilon_x) \cos 2\zeta_j + \Delta \gamma_{yx} \sin 2\zeta_j \\ &= \Delta \gamma_p \cos 2\zeta_j + \Delta \gamma_s \sin 2\zeta_j, \\ \Delta \gamma_{ji} &= -(\Delta \epsilon_y - \Delta \epsilon_x) \sin 2\zeta_j + \Delta \gamma_{yx} \cos 2\zeta_j \\ &= -\Delta \gamma_p \sin 2\zeta_j + \Delta \gamma_s \cos 2\zeta_j, \\ \Delta \epsilon_k &= \Delta \epsilon_z \end{aligned} \tag{4}$$

ここでせん断変形が生じる  $x$ - $y$  面における変形を簡単に表示するために新しい応力とひずみの表示法を採用している。それらの応力とひずみの成分の定義および名称は以下の通りである (図-5 参照(a)~(f))。

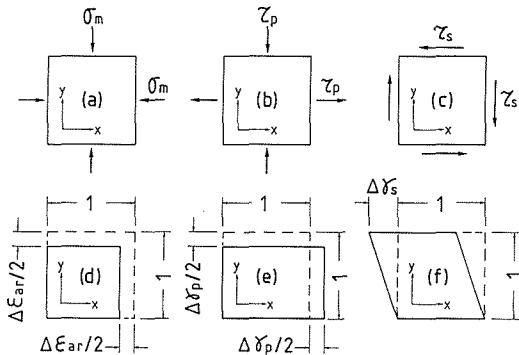


Fig. 5 Definition of stress and strain components in  $x$ - $y$  plane; (a) mean normal stress, (b) pure shear stress, (c) simple shear stress, (d) areal strain increment, (e) pure shear strain increment, (f) simple shear strain increment

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2}, & \Delta \epsilon_{ar} &= \Delta \epsilon_y + \Delta \epsilon_x, \\ \tau_p &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}, & \Delta \gamma_p &= \Delta \epsilon_y - \Delta \epsilon_x, \\ \tau_s &= \gamma_{yx}, & \Delta \gamma_s &= \Delta \gamma_{yx} \end{aligned} \tag{5}$$

$\sigma_m$ ; 平均垂直応力,  
 $\Delta \epsilon_{ar}$ ; 面積ひずみ増分  
 $\tau_p$ ; 純粋せん断応力,  
 $\Delta \gamma_p$ ; 純粋せん断ひずみ増分  
 $\tau_s$ ; 単純せん断応力,  
 $\Delta \gamma_s$ ; 単純せん断ひずみ増分

## 2.2 二次元系における変形

補助的な二次元系における変形は、あらゆる方向に向いて分布している無数のすべり面の上で発生するすべり変形の総和として誘導されている。図-6には法線方向が $\psi$ だけ傾いている平行な潜在的すべり面の一群が図示されている。各補助的な二次元応力-ひずみ系において、あらゆる方向( $-\pi/2 < \psi \leq \pi/2$ )にこのようなすべり面群が存在していると仮定している。

各々の潜在的なすべり面上の応力状態は*i-j-k*基準座標系の応力状態から計算することができる。また、補助的な二次元系における変形の増分は、すべてのすべり面上で生じる変形増分の総和をとり平均する、すなわち、積分することによって与えられる。

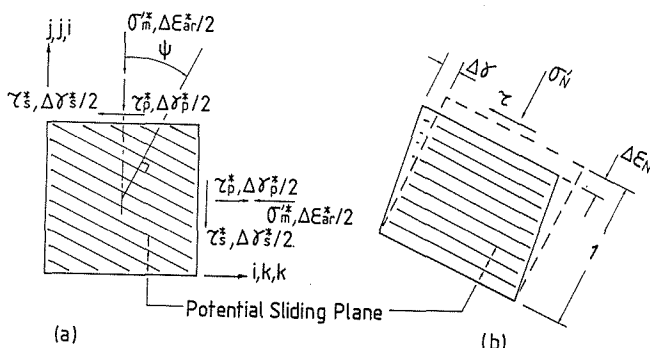


Fig. 6 Illustrative definition of stress and strain increment parameters on a potential sliding plane; (a) a group of parallel potential sliding planes, (b) stress state and deformation due to strain increment developed on potential sliding plane

$$\begin{aligned}\sigma_N' &= \sigma_m^* + \tau_p^* \cos 2\psi + \tau_s^* \sin 2\psi, \\ \tau &= -\tau_p^* \sin 2\psi + \tau_s^* \cos 2\psi\end{aligned}\quad (6)$$

$\sigma_N'$ ,  $\tau$ ; 潜在的なすべり面上の垂直, せん断応力

$\sigma_m^*$ ,  $\tau_p^*$ ,  $\tau_s^*$ ; 補助的な二次元系での垂直, 純粋せん断, 単純せん断応力

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_{ar}^* &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Delta \varepsilon_N d\psi, \\ \Delta \gamma_p^* &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\Delta \varepsilon \cos 2\psi - \Delta \gamma \sin 2\psi) d\psi, \\ \Delta \gamma_s^* &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\Delta \varepsilon_N \sin 2\psi + \Delta \gamma \cos 2\psi) d\psi\end{aligned}\quad (7)$$

$\Delta \varepsilon_N$ ,  $\Delta \gamma$ ; 潜在的なすべり面上の垂直, せん断ひずみ増分

$\Delta \varepsilon_{ar}^*$ ,  $\Delta \gamma_p^*$ ,  $\Delta \gamma_s^*$ ; 補助的な二次元系での面積, 純粋せん断, 単純せん断ひずみ増分

ただし、各二次元系における応力とひずみのパラメータの定義は次式で与えられる(図-2, 5参照)。

(*j-i* plane)

$$\psi_{(ji)} = \psi_{ji}$$

$$\sigma_m^*{}_{(ji)} = \frac{\sigma_j + \sigma_i}{2} - u, \quad \tau_p^*{}_{(ji)} = \frac{\sigma_j - \sigma_i}{2}, \quad \tau_s^*{}_{(ji)} = \tau_{ji},$$

$$\Delta \varepsilon_{ar}^*{}_{(ji)} = \Delta \varepsilon_{j(i)} + \Delta \varepsilon_{i(j)}, \quad \Delta \gamma_p^*{}_{(ji)} = \Delta \varepsilon_{j(i)} - \Delta \varepsilon_{i(j)}, \quad \Delta \gamma_s^*{}_{(ji)} = \Delta \gamma_{ji(i)}\quad (8)$$

(*j-k* plane)

$$\psi_{(jk)} = \psi_{jk}$$

$$\sigma_m^*{}_{(jk)} = \frac{\sigma_j + \sigma_k}{2} - u, \quad \tau_p^*{}_{(jk)} = \frac{\sigma_j - \sigma_k}{2}, \quad \tau_s^*{}_{(jk)} = 0,$$

$$\Delta \varepsilon_{ar(jk)}^* = \Delta \varepsilon_{j(jk)} + \Delta \varepsilon_{k(jk)}, \quad \Delta \gamma_{jk}^* = \Delta \varepsilon_{j(jk)} - \Delta \varepsilon_{k(jk)}, \quad \Delta \gamma_{s(jk)}^* = 0 \quad (9)$$

(i-k plane)

$$\psi_{(ik)} = \psi_{jk}$$

$$\sigma_m^*(ik) = \frac{\sigma_i + \sigma_k}{2} u, \quad \tau_{p^*(ik)} = \frac{\sigma_i - \sigma_k}{2}, \quad \tau_{s^*(ik)} = 0,$$

$$\Delta \varepsilon_{ar(ijk)}^* = \Delta \varepsilon_{i(ijk)} + \Delta \varepsilon_{k(ijk)}, \quad \Delta \gamma_{p^*(ijk)}^* = \Delta \varepsilon_{i(ijk)} - \Delta \varepsilon_{k(ijk)}, \quad \Delta \gamma_{s^*(ijk)}^* = 0 \quad (10)$$

以上の式で、 $u$  は間隙水圧、 $\psi_{(ji)}$ 、 $\psi_{(jk)}$ 、および  $\psi_{(ik)}$  はそれぞれ、 $j$ - $i$ 、 $j$ - $k$  および  $i$ - $k$  系において  $j$ 、 $j$ 、 $i$ -軸から測った潜在的すべり面の法線方向である (図-4 参照)。

### 2.3 潜在的すべり面上の応力-ひずみ関係

潜在的なすべり面上の応力-ひずみ関係の数式化の過程において、基本仮定として、すべり面上で生じるひずみ増分は圧縮変形、せん断変形、ダイレイタンスの3成分の線形和として評価している。

$$d\varepsilon_N = d\varepsilon_{Nc} + d\varepsilon_{Nd}, \quad d\gamma = d\gamma_s \quad (11)$$

$d\varepsilon_{Nc}$ 、 $d\varepsilon_{Nd}$  : 垂直ひずみ増分の圧縮変形およびダイレイタンス成分

$d\gamma_s$  : せん断ひずみ増分のせん断変形成分

#### 2.3.1 圧縮変形

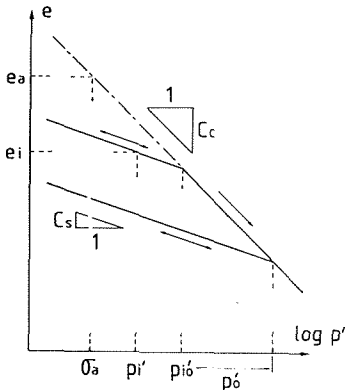


Fig. 7 Linear relationship between void ratio and logarithmic effective consolidation stress

すべり面上における有効垂直応力の変化により発生する垂直ひずみは、図-7に示すように広く用いられている間隙比  $e$  と有効等方圧密応力  $p'$  の対数値との線形関係に基づいてモデル化されている。すなわち、正規圧密および過圧密過程のそれぞれにおいて直線関係が成立するとみなし、それらの勾配を圧密係数  $C_c$ 、膨張係数  $C_s$  としている。初期状態において、間隙比  $e_i$ 、圧密応力  $p_i$ 、そして先行圧密応力  $p_{i'o}$  である土の基準圧力  $\sigma_a$  に対応する基準間隙比  $e_a$  は次式で求められる。

$$e_a = e_i - C_s \log\left(\frac{p_{i'o}}{p_i}\right) - C_c \log\left(\frac{\sigma_a}{p_{i'o}}\right) \quad (12)$$

その後の載荷過程において、圧密応力の載荷、除荷あるいは再載荷を受けるときの間隙比  $e$  の変化は、上式で定義される  $e_a$  を用いて次式で与えられる。

$$e = e_a - C_c \log\left(\frac{p_o'}{\sigma_a}\right) - C_s \log\left(\frac{p'}{p_o'}\right) \quad (13)$$

ここで、 $p_o'$  は載荷過程における既往最大圧密応力である。

圧密による体積ひずみ増分  $d\varepsilon_{vc}$  は、間隙比の変化より以下の式で与えられる。

$$d\varepsilon_{vc} = d\varepsilon_i + d\varepsilon_j + d\varepsilon_k = d\varepsilon_{ar(ji)} + d\varepsilon_{ar(jk)} + d\varepsilon_{ar(ik)} = -\frac{de}{1+e}$$

$$= \begin{cases} C_c \frac{1}{(1+e) \ln 10} \frac{dp'}{p'} & ; p' = p_o' \\ C_s \frac{1}{(1+e) \ln 10} \frac{dp'}{p'} & ; p' < p_o' \end{cases} \quad (14)$$

以上のような関係に基づいて、潜在的なすべり面上における圧縮による垂直ひずみ増分は次式によって評価できると仮定した。

$$d\varepsilon_{Nc} = \begin{cases} C_c^* \frac{1}{(1+e^*) \ln 10} \frac{d\sigma_{N'}'}{\sigma_{N'}'} & ; \sigma_{N'}' = \sigma_{N_0}' \\ C_s^* \frac{1}{(1+e^*) \ln 10} \frac{d\sigma_{N'}'}{\sigma_{N'}'} & ; \sigma_{N'}' < \sigma_{N_0}' \end{cases} \quad (15)$$

ここでは  $\sigma_{N_0}'$  はすべり面上における先行最大圧密応力であり、 $e^*$  は式(13)と相似な次式で与えられる関数である。

$$e^* = e_a^* - C_c^* \log\left(\frac{\sigma_{N_0}'}{\sigma_a}\right) - C_s^* \log\left(\frac{\sigma_{N'}'}{\sigma_{N_0}'}\right) \quad (16)$$

ここで、 $e^*$  は間隙比  $e$  に等価な各すべり面上におけるパラメータで、 $e_a^*$  は  $e_a$  に等しいとみなしている。 $C_c^*$ 、 $C_s^*$  はそれぞれ潜在的なすべり面上における圧縮係数および膨張係数で、圧密変形の異方性を考慮して次式で与えられる。

$$C_c^* = C_{ci}^* (1 - C_{cA}^* \cos 2\delta), \quad C_s^* = C_{si}^* (1 - C_{sA}^* \cos 2\delta) \quad (17)$$

$C_{ci}^*$ 、 $C_{si}^*$  は等方的な圧縮・膨張変形を、 $C_{cA}^*$ 、 $C_{sA}^*$  は異方性を表現するために導入されたパラメータである。

式(14)に示したように、体積ひずみは3個の補助的な二次元応力-ひずみ系で発生する面積ひずみ  $\varepsilon_{ar}$  の線形和として計算されることから、 $C_{ci}^*$  と  $C_{si}^*$  は次のように与えられる(式(7)参照)。

$$C_{ci}^* = C_c/3, \quad C_{si}^* = C_s/3 \quad (18)$$

El-Sohby and Andrawes<sup>6)</sup> および Negussey and Vaid<sup>7)</sup> は砂質土の圧密・膨張時の変形挙動を詳細に調べ、初期異方構造を有する砂は等方圧密・膨張時においても異方的な変形挙動を示すことを実験的に示した。 $C_{cA}^*$ 、 $C_{sA}^*$  は、このような砂質土の初期異方構造に起因する圧縮・膨張挙動の異方性を評価するために導入されたパラメータで、すべり面の方向に依存して、圧縮係数  $C_c^*$ 、膨張係数  $C_s^*$  を変化させている。ただし、等方性砂の場合は  $C_{cA}^*$ 、 $C_{sA}^*$  はともに0になる。式(17)における  $\delta$  は潜在的すべり面と堆積面との間の角度で、以下の式で計算される(図-4参照)。

$$(j-i \text{ plane}) \quad \delta_{(ji)} = \psi_{ji} + \xi_j - \theta,$$

$$(j-k \text{ plane}) \quad \delta_{(ji)} = \psi_{jk},$$

$$(i-k \text{ plane}) \quad \delta_{(ik)} = \psi_{ik} \quad (19)$$

ここで、 $\theta$  は堆積方向すなわち異方構造の対称軸の  $y$ -軸からの方向である。ただし、図-4(a)には、 $\theta=0$  の場合が示されている。

補助的な二次元応力-ひずみ系の異方性の程度は、堆積方向あるいは内部異方構造の対称軸とその系との相対的な方向によって変化する。したがって、異方性パラメータ  $C_{cA}^*$ 、 $C_{sA}^*$  は主応力軸の回転ともなって方向を変える  $j$ - $k$  および  $i$ - $k$  系において、 $i$ -軸、 $j$ -軸の方向に応じて修正されなければならない。次式で修正できると仮定している<sup>1)</sup>。

$$(j-i \text{ plane})$$

$$C_{cA(ji)}^* = C_{cA}^*, \quad C_{sA(ji)}^* = C_{sA}^*,$$



(j-k plane)

$$C_{cA(jk)}^* = C_{cA}^* \cos^2(\xi_j - \theta), \quad C_{sA(jk)}^* = C_{sA}^* \cos^2(\xi_j - \theta),$$

(i-k plane)

$$C_{cA(ik)}^* = C_{cA}^* \cos^2(\xi_i - \theta), \quad C_{sA(ik)}^* = C_{sA}^* \cos^2(\xi_i - \theta) \quad (20)$$

以上のように圧縮変形に関する構成関係が誘導され、すべてのパラメータは、等方圧密・膨張試験の結果に基づいて決定される。

### 2.3.2 せん断変形

粒状体である土の変形・強度特性が主として摩擦則によって支配されていることは広く認められている事実で、すべり面上で動員されている摩擦係数  $\tan \phi_m = (\tau / \sigma'_N)$  に着目するとせん断変形挙動をある程度統一的に説明できる。Poorooshasb<sup>6)</sup> および Tatsuoka and Ishihara<sup>9)</sup> は非粘性土の降伏特性はある程度摩擦則によって説明できるが、その圧密応力依存性が認められ、降伏面はせん断一圧密応力面上で外側に凸な曲線となることを示した。したがって、本研究では  $\sigma'_N - \tau$  面上での降伏特性を規定するせん断載荷関数 (shear loading function) に垂直応力と過圧密履歴の影響を取り入れ、次式で定義している。降伏面に対応する等せん断載荷関数線は図-8 に示す通りである。

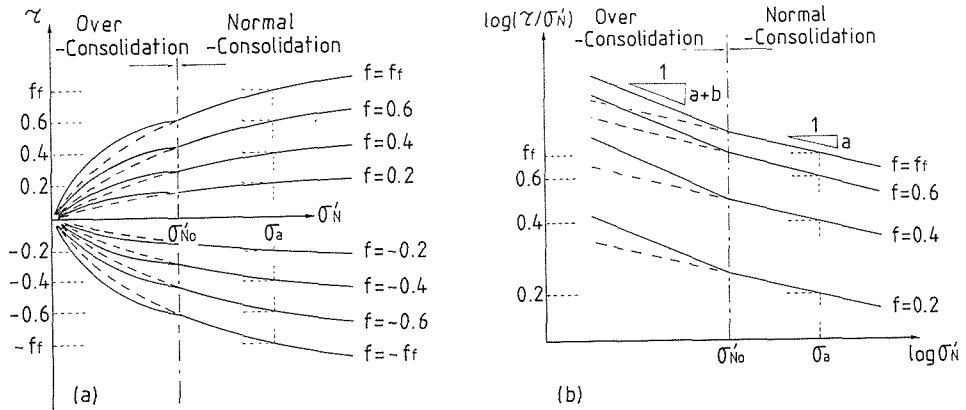


Fig. 8 Shear loading surfaces including failure envelope; (a) on Mohr's diagram, (b) on logarithmic plane

$$f = \frac{\tau}{\sigma'_N} = \left( \frac{\sigma'_N}{\sigma'_a} \right)^a \left( \frac{\sigma'_N}{\sigma'_{No}} \right)^b \quad (21)$$

パラメータ  $a$ ,  $b$  はそれぞれ垂直応力、先行圧縮応力の影響を加味するためのパラメータである。

破壊包絡線は最も外側にある降伏面と考えられるので、破壊条件は次式で与えられると仮定した。

$$|f| = f_r = f_{r1} f_{rA} \frac{\cos 2\delta}{1 + H_b \epsilon_{Nd}} \quad (22)$$

ここで  $f_r$  は破壊時の  $f$  であり、 $f_{r1}$  は等方的なせん断強度を、 $f_{rA}$  はせん断強度異方性を評価するために、また、 $H_a$ ,  $H_b$  は繰返し載荷時に見られる体積ひずみ硬化特性を取り入れるために導入した。等方的な力学特性を示す土に対しては  $f_{rA}$  は 1 となる。

繰返し載荷による硬化特性を仮に無視し、式(21)に式(22)を代入すると次式を得る。

$$\tan \phi_d = \left| \frac{\tau}{\sigma'_N} \right|_{\text{at failure}} = f_{r1} f_{rA} \cos 2\delta \left( \frac{\sigma'_N}{\sigma'_a} \right)^{-a} \left( \frac{\sigma'_N}{\sigma'_{No}} \right)^{-b},$$

$$\log \tan \phi_d = \log f_{f1} + \cos 2\delta \log f_{fA} - a \log \frac{\sigma'_N}{\sigma_a} - b \log \frac{\sigma'_N}{\sigma'_{N0}} \quad (23)$$

式(23)の関係は図-9に示すような直線関係となり、破壊強度の異方性<sup>10)~15)</sup>を(a)図で、破壊強度の拘束圧および過圧密依存性<sup>16)~19)</sup>を(b)図で表わすことができる。せん断載荷関数および破壊強度を規定する以上の関係は、いくつかの三軸圧縮試験と伸張試験で得られた破壊条件を図-9のように整理することにより決定することができる。

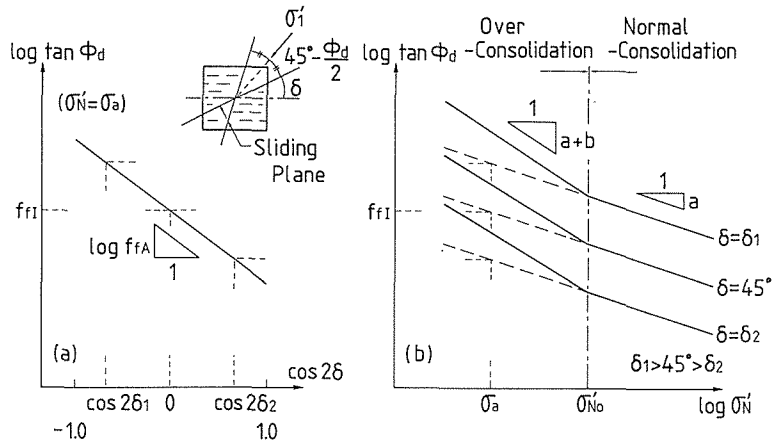


Fig. 9 Failure condition arranged to indicate; (a) its anisotropy due to initial fabric, (b) its dependency on effective normal stress magnitude and overconsolidation

すべり面上で発生するせん断変形は、その非線形性を表現するために、せん断載荷関係  $f$  と  $\gamma_s$  との間の双曲線関係を採用して誘導している<sup>20)</sup>。

$$\gamma_s = F(f), \quad d\gamma_s = \frac{f_f^n}{G_o^*(f_r - |f|)^n} df \quad (24)$$

ここで  $h$  は双曲線の形状を決めるパラメータで通常は  $h=2$  としている。また、 $G_o^*$  は次式で定義される双曲線の初期接線係数である。

$$G_o^* = \frac{df}{d\gamma_s} \quad ; \quad \text{at } f=0 \quad (25)$$

せん断応力の繰返し載荷時に見られる顕著な非弾性挙動を評価するために、 $\gamma_s$  と  $f$  との間の双曲線関係に Masing 則<sup>21)</sup>を適用している。これによって、式(24)は次のように修正される。

$$\frac{\gamma_s - \gamma_{sn}}{2} = F\left(\frac{f - f_n}{2}\right), \quad d\gamma_s = \frac{f_f^n}{G_o^k(f_r - \frac{|f - f_n|}{2})^n} df \quad (26)$$

$\gamma_{sn}$  と  $f_n$  は第  $n$  回目の載荷開始時における  $\gamma_s$  と  $f$  の値である(図-10 参照)。この関係は Hardin and Drnevich<sup>22,23)</sup> が提案した動的変形モデルと同形である。

初期接線係数  $G_o^*$  は Hardin and Drnevich<sup>22,23)</sup>、Iwasaki et al.<sup>24)</sup>、Hardin and Black<sup>25)</sup> によって実験的に示されたように拘束圧、過圧密履歴および初期異方構造に依存すると考えられるので、以下の式によって与えられると仮定した。

$$G_o^* = G_{o1}^* G_{oA}^* - \cos 2\delta G_{oA}^* - \sin 2\delta \left(\frac{\sigma_N'}{\sigma_a}\right)^c \left(\frac{\sigma_N'}{\sigma_{No}'}\right)^d \frac{1 + H_c \epsilon_{Nd}}{1 + H_d \epsilon_{Nd}}; \gamma_s \geq 0,$$

$$G_o^* = G_{o1}^* G_{oA}^* - \cos 2\delta G_{oA}^* + \sin 2\delta \left(\frac{\sigma_N'}{\sigma_a}\right)^c \left(\frac{\sigma_N'}{\sigma_{No}'}\right)^d \frac{1 + H_c \epsilon_{Nd}}{1 + H_d \epsilon_{Nd}}; \gamma_s < 0 \tag{27}$$

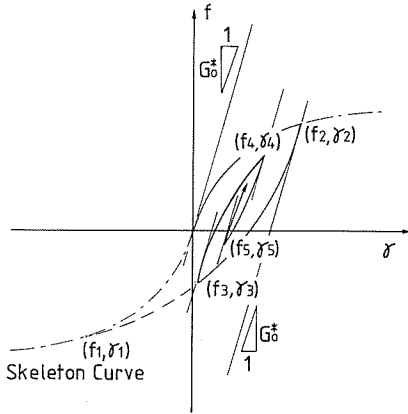


Fig. 10 Hyperbolic shear deformation behavior including Masing's criteria for the stress reversal path on a potential sliding plane

パラメータ  $c, d$  はそれぞれ垂直応力, 既往最大圧密応力の影響を加味するためのパラメータであり,  $H_a, H_b$  は繰返し載荷時における硬化を取り入れるために導入されている。 $G_{o1}^*$  は等方的なせん断変形を,  $G_{oA}^*, G_{oA}'$  はせん断変形挙動の異方性を評価するために導入されたパラメータで, 潜在的スベリ面と堆積面の相対的な関係によって  $G_o^*$  を図-11 に示すように変化させている。ただし, 等方的な砂については  $G_{oA}^*, G_{oA}'$  はともに 1 となる。

ここに与えられた関係において, 初期せん断剛性  $G_o^*$  に関するパラメータのうち,  $c, d$  は Iwasaki et al.<sup>24)</sup>, Hardin and Black<sup>25)</sup> の報告を参考にして決定することができる。また,  $G_{o1}^*, G_{oA}^*, G_{oA}'$  は, それらの値を変えて変形挙動を繰返し計算し, 一組の三軸圧縮・伸張試験で得られたせん断変形挙動をできるだけよく説明できるように決めることができる。

補助的な二次元応力-ひずみ系における異方性の程度は, 堆積方向あるいは内部異方構造の対称軸とその系とのなす角度によって異なる。したがって, 異方性パラメータ  $f_{iA}, G_{oA}^*, G_{oA}'$  は主応力軸の回転によって方向が変化する  $j-k$  および  $i-k$  系において修正されなければならない, 次の式で修正できると仮定している。

( $j-i$  plane)

$$f_{iA(ji)} = f_{iA}, \quad G_{oA(ji)}^* = G_{oA}^*, \quad G_{oA(ji)}'^* = G_{oA}'^*,$$

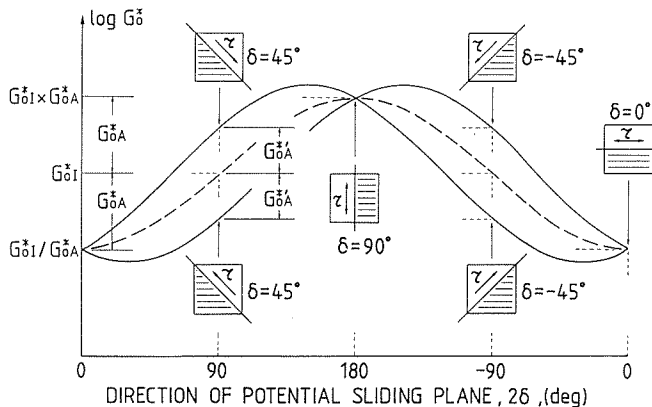


Fig. 11 Anisotropy of initial tangent shear modulus on a potential sliding plane, which varies depending on the direction of the sliding plane

(i-k plane)

$$f_{fA(jk)} = f_{fA} \cos^2(\xi_j - \theta),$$

$$G_{oA(jk)}^* = G_{oA}^* \cos^2(\xi_j - \theta), \quad G_{oA(ijk)}^* = G_{oA}^* \cos^2(\xi_j - \theta),$$

(i-k plane)

$$f_{fA(ik)} = f_{fA} \cos^2(\xi_i - \theta),$$

$$G_{oA(ik)}^* = G_{oA}^* \cos^2(\xi_i - \theta), \quad G_{oA'(ik)}^* = G_{oA}^* \cos^2(\xi_i - \theta) \tag{28}$$

本節で与えられたせん断変形の数式化で用いられたパラメータは、いくつかの三軸圧縮・伸張試験の結果に基づいて決定することができる。

### 2.3.3 ダイレイタンシー

砂要素が示すダイレイタンシーは、潜在的なすべり面においてせん断変形に関連して生じる垂直ひずみによって表現される。Matsuoka and Takeda<sup>26)</sup>は微視的な考察を行い、ダイレイタンシー関係は潜在的なすべり面上におけるせん断・垂直応力比  $\tau/\sigma_N$  と垂直・せん断ひずみ増分比  $d\varepsilon_{Nd}/d\gamma$  との間の線形関係によって近似的に説明できることを示した。本研究では、この示唆に従って、以下の式によってダイレイタンシー関係を与えている(図-12参照)。

$$\frac{d\varepsilon_{Nd}}{d\gamma_s} = \begin{cases} \frac{D_a - \sigma'_N}{D_b}; d \frac{\tau}{\sigma'_N} \geq 0, \frac{\tau}{\sigma'_N} \geq 0 \\ -\frac{D_a + \sigma'_N}{D_b}; d \frac{\tau}{\sigma'_N} < 0, \frac{\tau}{\sigma'_N} < 0 \end{cases} \tag{29}$$

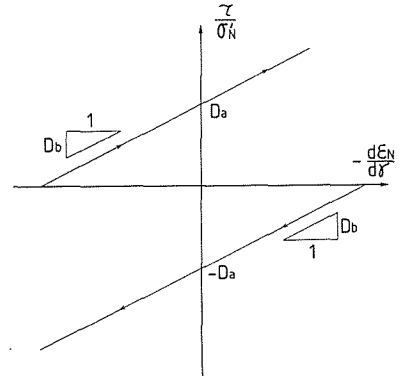


Fig. 12 Unique dilatancy relationship applied on each potential sliding planes

この関係は土の密度、初期の粒子配列構造、垂直応力の大きさなどの要因に依存せず土質によって一義的に誘導されるので、式(29)で与えられる線形関係は、方向が異なるすべての潜在的すべり面上で垂直応力の値によらずに統一的に適用した。

本節で数式化された潜在的なすべり面上におけるダイレイタンシー挙動に関するパラメータの値は、圧密変形・せん断変形におけるすべてのパラメータの値が決まった後に決定される。すなわち、 $D_a$ 、 $D_b$ の値を適切に変化させて変形挙動を繰返し計算し、実測値との比較を通して、そのうちでせん断過程における体積変化挙動を最もよく説明できるようなパラメータの値を選ぶことができる。

### 2.3.4 せん断変形およびダイレイタンシーに及ぼす過圧密の影響

本節では、潜在的なすべり面上におけるせん断変形およびダイレイタンシーに及ぼす過圧密の影響の数式化について説明する。

Ishihara and Okada<sup>25)</sup>は、過圧密履歴を受けた砂について非排水三軸圧縮・伸張試験を行い、過圧密载荷によって圧密・せん断応力面上に圧密応力軸を囲む降伏面が形成され、その降伏面に囲まれた領域内ではせん断変形、ダイレイタンシーが共に著しく抑制されることを示した。本研究では、Roweのストレス・ダイレイタンシー関係によりポテンシャル関数を誘導し、それらの等ポテンシャル面群を降伏面群とした、Haythorntwaiteの手法(Rowe<sup>26)</sup>参照)に基づいてすべり面上の過圧密による降伏面を誘導した。

すなわち、式(29)で与えられたダイレイタンシー関係を、 $\sigma'_N$ - $\tau$ 面上におけるひずみ増分とポテンシャル面すなわち降伏面の直行性を表す次式に代入する。

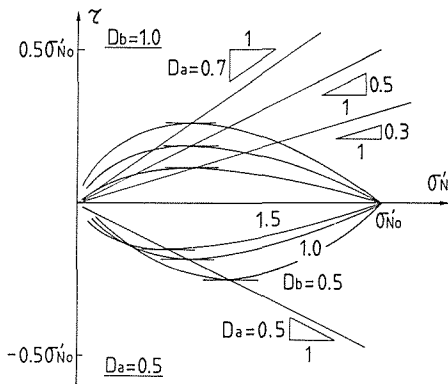


Fig. 13 Illustration of the yield surface established by overconsolidation on a potential sliding plane

$$\frac{d\varepsilon_{Nd}}{d\gamma} = -\frac{d\tau}{d\sigma_N} \quad (30)$$

積分を行い上式を解くと、降伏面として次式を得る。

$$\left| \frac{\tau}{\sigma'_N} \right| = \begin{cases} \frac{D_a}{D_b - 1} \left\{ \left( \frac{\sigma'_{No}}{\sigma'_N} \right)^{\frac{D_b - 1}{D_b}} - 1 \right\}; & D_b \neq 1 \\ D_a \ln \left( \frac{\sigma'_{No}}{\sigma'_N} \right) & ; D_b = 1 \end{cases} \quad (31)$$

導かれた降伏面の形状は図-13に示す通りである。

応力状態がこの降伏面の内側にある時のせん断変形およびダイレイタンスは、以下のように評価した。

$$d\gamma_s = \frac{1}{G_o^*} df, \quad d\varepsilon_{Nd} = 0 \quad (32)$$

### 3. あとがき

微視的な立場からあらゆる方向に向いて分布している無数の潜在的すべり面の存在を仮定することによって、砂の三次元変形挙動を予測できる多方向すべりモデル (*Multi-Directional Sliding Model*) を誘導し、その過程を説明した。誘導されたモデルは、異方的な初期構造を有する砂が主応力軸の回転を伴うような一般的な応力条件の下において、応力の反転および繰返しを含む载荷を受ける場合の応力-ひずみ関係を予測可能である。

モデルでは、まず、補助的な二次元応力-ひずみ系における変形が、無数の潜在すべり面上で生じるすべり変形の総和として計算される。次いで、複合滑動面の概念に従って、三次元変形は3個の補助的な応力-ひずみ系で生じる変形増分の線形和として計算される。潜在的なすべり面上では圧縮変形、せん断変形およびダイレイタンスの各変形成分が数式化される。

圧縮変形は間隙比と圧密応力の対数値との線形関係に基づいて数式化された。せん断変形は、せん断载荷関数とせん断ひずみの双曲線関係に Masing の規約を取り入れて誘導した。ダイレイタンスはせん断・垂直応力比と垂直・せん断ひずみ増分比の一義的な線形関係により与えた。せん断変形およびダイレイタンスに及ぼす過圧密履歴は垂直-せん断応力面に変形が抑制される領域を設定することにより評価した。

本研究は北海道大学・特定研究「繰返し負荷を受ける材料の構成式に関する総合的研究」の一環として行われた。本論文の作成にあたっては、本学部土木工学科4年橋場克泰君に図・表の準備、清書などに関して多大なる協力を得た。ここに記して感謝の意を表します。

### 文 献

- 1) Miura, K., Toki, S. and Miura, S.: Soils and Foundations, Vol. 26 (1986), No. 3, pp. 42-56.
- 2) Miura, K. and Finn, W. D. L.: Proc., Int. Work Shop on Constitutive Equations for Non-Cohesive Soils (1987), (to be published).
- 3) Calladine, C. R.: Geotechnique, Vol. 21 (1971), No. 4, pp. 391-415.
- 4) Bazant, Z. P. and Kim, J.: Journal of Geotechnical Eng., ASCE, Vol. 112 (1986), No. 4, pp. 458-475.
- 5) Matuoka, H.: Soils and Foundations, Vol. 14 (1974), No. 2, pp. 47-61.
- 6) El-Sohby, M. A. and Andrawes, K. Z.: Can. Geotechnical Journal, Vol. 9 (1972), No. 4, pp. 338-350.
- 7) Negussey, D. and Vaid, Y. P.: Can. Geotechnical Journal, Vol. 23 (1986), No. 2, pp. 155-163.
- 8) Poorooshasb, H. B.: Proc. of 4th ARC on SMFE (1971), Bangkok, Vol. 1, pp. 63-66.

- 9) Tatsuoka, F. and Ishihara, K. : Soils and Foundations, Vol. 14 (1974), No. 2, pp. 63-76.
- 10) Oda, M. : Soils and Foundations, Vol. 12 (1972), No. 1, pp. 17-36.
- 11) Oda, M., Koishikawa, I. and Higuchi, I. : Soils and Foundations, Vol. 18 (1978), No. 1, pp. 25-38.
- 12) Arthur, J. R. F. and Menzies, B. : Geotechnique, Vol. 22 (1972), No. 1, pp. 115-128.
- 13) Arthur, J. R. F. and Philips, A. B. : Geotechnique, Vol. 25 (1975), No. 4, pp. 799-815.
- 14) Matsuoka, H. and Ishizaki, H. (1981) : Proc., 10th ICSMFE (1981), Stockholm, Vol. 1, pp. 699-702.
- 15) Miura, K., Miura, S. and Toki, S. : Soils and Foundations, Vol. 26 (1986), No. 1, pp. 36-52.
- 16) Ponce, V. M. and Bell, J. M. : Journal of SMF Div., Proc., ASCE, Vol. 97 (1971), No. SM4, pp. 625-638.
- 17) Fukushima, S. and Tatsuoka, F. : Soils and Foundations, Vol. 24 (1984), No. 4, pp. 30-48.
- 18) Bishop, A. W. : Geotechnique, Vol. 16 (1966), No. 2, pp. 89-130.
- 19) Vesic, A. S. and Clough, G. W. : Journal of SMF Div., Proc., ASCE, Vol. 94 (1968), No. SM3, pp. 661-688.
- 20) Konder, R. L. : Journal of SMF Div., ASCE, Vol. 89 (1963), No. SM1, pp. 115-143.
- 21) Masing, G. : Proc., 2nd Int. Congress of Applied Mechanics (1926), Zurich.
- 22) Hardin, B. O. and Drnevich, V. P. : Journal of SMF Div., Proc., ASCE, Vol. 98 (1972), No. SM6, pp. 603-624.
- 23) Hardin, B. O. and Drnevich, V. P. : Journal of SMF Div., Proc., ASCE, Vol. 98 (1972), No. SM7, pp. 667-692.
- 24) Iwasaki, T. and Tatsuoka, F. and Takagi, Y. : Soils and Foundations, Vol. 18 (1978), No. 1, pp. 39-56.
- 25) Hardin, B. O. and Black, W. L. : Journal of SFM Div., Proc., ASCE, Vol. 13 (1969), No. 1, pp. 1631-1637.
- 26) Matsuoka, H. and Takeda, K. : Soils and Foundations, Vol. 20 (1980), No. 3, pp. 45-58.
- 27) Ishihara, K. and Okada, S. : Soils and Foundations, Vol. 18 (1978), No. 1, pp. 57-72.
- 28) Rowe, P. W. : Stress-Strain Behavior of Soils (1972), Foulis-Co. Cambridge, pp. 143-194.