



Title	はり構造物におけるクラックの位置と深さの同定
Author(s)	長嶺, 正紀; 内田, 浩
Citation	北海道大學工學部研究報告, 179, 31-38
Issue Date	1997-02-28
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/42480">http://hdl.handle.net/2115/42480</a>
Type	bulletin (article)
File Information	179_31-38.pdf



[Instructions for use](#)

## はり構造物におけるクラックの位置と深さの同定

長嶺正紀<sup>1)</sup> 内田 浩<sup>2)</sup>

(平成 8 年 11 月 15 日受理)

### Identification of crack location and depth in beam structures

Masaki NAGAMINE and Hiroshi UCHIDA

(Received November 15, 1996)

#### Abstract

This paper deals with the dynamics of cracked beam structures for bending vibrations. Cracks reduce the natural frequencies of structures, because they have the equivalent effect of "softening" the structures. This property can be used to detect the existence of a crack and its location in the structure. Recently, Narkis proposed algebraic equations for identification of crack location from frequency measurements. The validity of this method is confirmed here by the Finite Element Method (FEM) using a simple model of cracks, and it is shown that identification of both crack location and depth is possible from data of the variation of the first two natural frequencies.

#### 1. ま え が き

構造物の欠陥の 1 つであるクラック (き裂) は, 素材の製造, 部材の製作加工および使用・稼働中において種々の原因によって発生する。このクラックから部材の破壊が進行し, ついには構造物全体の破壊を引き起こし重大事故となる例は多い。したがって, クラックの早期発見は, 構造物の破壊防止という観点から非常に重要な問題である<sup>(1), (2)</sup>。またクラックの発見のために構造物を分解していたのでは, コスト, 時間, 資源などあらゆる面で非効率である。そのため, 非破壊検査を用いなければならない<sup>(3)</sup>。一般にクラック発見のための非破壊検査には, 超音波や X 線などを利用した方法が広く使われているがこれらの技術はまだ十分とはいえず, 新しい概念に基づいた技術が必要である。この 1 つとして振動理論に基づいたクラック同定法が近年注目されている。構造物におけるクラックは, 構造物を軟化させる効果があるので, その固有振動数が低下することが知られている。この現象に着目し, クラックを有するはりの動的解析およびクラック同定法について, 多数の研究が発表されている<sup>(4)~(9)</sup>。

本研究は, 構造物の基本要素であるはりにクラックが生じた場合を対象とし, クラックの位置, 大きさがその固有振動数の変化にどのような変化を及ぼすかを調べ, 振動理論を応用したクラック同定という非破壊検査の可能性を探ることを目的とするものである。

そのために, まず Narkis によって提案されたクラックを有するはりにおける同定法を検討し,

1) 機械科学専攻 固体工学講座機械力学分野

2) 機械科学専攻 宇宙環境工学講座宇宙熱物理工学分野

その有効性を確かめるために有限要素法 (FEM) による数値シミュレーションを行う。この数値シミュレーションにおいては、クラックの位置、クラックの深さをパラメータとして、振動数の減少量を求め同定法の計算精度、また有効性について詳しく調べる。

## 2. 振動数方程式とクラック同定式

図1に示すような、両端単純支持された長さ $L$ 、厚さ $H$ 、幅 $B$ のはりについて解析を行う。左端の支持点とはりの中心軸の交点に原点をとり、図のように $x$ 軸および $y$ 軸を定め、 $x=L_1$ の位置にクラックが存在するとする。一樣はりの運動方程式は

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $E$ は縦弾性係数、 $I$ は断面二次モーメント、 $\rho$ は密度、 $A$ ははりの断面積を表す。この運動方程式は、クラックの付近においては断面が急変するために、成立しない。そのため、はりを左右にわけて考え、クラック位置において、回転ばねで連結されていると仮定する。曲げ振動の一般解は

$$y_1(x) = B_1 \sin \lambda x + B_2 \cos \lambda x + B_3 \sinh \lambda x + B_4 \cosh \lambda x \quad (2)$$

$$y_2(x) = B_5 \sin \lambda x + B_6 \cos \lambda x + B_7 \sinh \lambda x + B_8 \cosh \lambda x \quad (3)$$

ここで、 $y$ の添字1はクラックの左側、2はクラックの右側を意味する。クラックを連結する等価回転ばねのコンプライアンス(ばねこわさの逆数)を $\Theta$ とすると、クラック位置において2つのはりの傾きとモーメントの関係から次の式が成り立つ。

$$y'_2 - y'_1 = \Theta L y''_2 \quad (4)$$

このコンプライアンスについては、破壊力学の理論に基づいてクラックの形状、深さをパラメータとした関係式が提案されているが、ここでは詳細は省略する<sup>(4), (8)</sup>。またクラック位置における変位、モーメント、せん断力の連続条件から次の関係が成り立つ。

$$y_1 = y_2, \quad y''_1 = y''_2, \quad y'''_1 = y'''_2 \quad (5 \sim 7)$$

以上の4本の式と、単純支持の境界条件式を(2)、(3)式に代入することによって、8本の係数行列式が得られる。この行列式を零とおくことによって、次の振動数方程式が得られる。

$$4 \sin \beta \sinh \beta + \beta \Theta \{ \sinh \beta (\cos \beta - \cosh \beta) + \sin \beta (\cosh \beta - \cos \beta) \} = 0 \quad (8)$$

ここで、無次元振動数パラメータ $\beta$ 、無次元クラック位置 $e$ を次のように定義する。

$$\beta = \lambda L \quad (\lambda^4 = \rho A \omega^2 / EI) \quad (9)$$

$$e = \left( L_1 - \frac{L}{2} \right) / \left( \frac{L}{2} \right) \quad (10)$$

なお(9)式の $\omega$ は角振動数を表す。また(10)式の定義より $e=0$ はクラック位置が中央、 $e=$

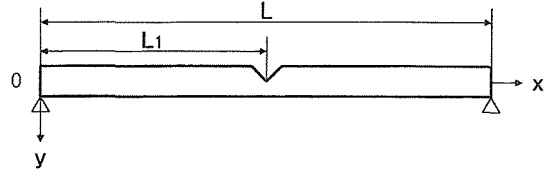


図1 クラックを有するはりのモデル

-1は左端,  $e=1$ は右端にあることを示す。

クラック位置を一定として, (8)式を $\Theta$ で偏微分し, クラックが振動数に与える影響は微小であることから,  $\Theta=0$ ,  $\beta=n\pi$ と仮定すると

$$4\cos\beta\left(\frac{\partial\beta}{\partial\Theta}\right)+\beta(\cos\beta-\cos e\beta)=0 \quad (11)$$

微分近似を行えば

$$4\cos\beta\left(\frac{\Delta\beta}{\beta}\right)=(\cos e\beta-\cos\beta)\Delta\Theta \quad (12)$$

また (9) 式の関係より, 振動数の微小変化分は

$$\frac{\Delta f}{f}=2\frac{\Delta\beta}{\beta} \quad (13)$$

と表すことができる。よって1次モードについては $\beta_1=\pi$ , 2次モードについては,  $\beta_2=2\pi$ を代入することによって, それぞれの振動数変化分を次のように近似できる。

$$Fr_1=-\frac{\Delta\Theta}{2}(1+\cos e\pi) \quad (14)$$

$$Fr_2=-\frac{\Delta\Theta}{2}(1-\cos 2e\pi) \quad (15)$$

ただし

$$Fr_i=\Delta f_i/f_i \quad (i=1,2)$$

コンプライアンス $\Theta$ は静的な特性を持ち, 振動数変化には不変と考えているので(14), (15)式から1次振動数の変化分のピーク値は $e=0$ , 2次振動数の変化分のピーク値は $e=\pm 0.5$ と予想できる。このことはモード形状を考慮しても予想できるものである。(14), (15)式から, 振動数変化分の比をとると

$$\frac{Fr_2}{Fr_1}=\frac{1-\cos 2e\pi}{1+\cos e\pi} \quad (16)$$

となり, これを $e$ について解くと

$$e=\frac{1}{\pi}\arccos\left\{\frac{2-(Fr_2/Fr_1)}{2}\right\} \quad (17)$$

と表すことができる。これがNarkisによって提案されたクラック位置同定の式である<sup>(4)</sup>。さらに単純支持はりを考えているので,  $f_2/f_1=4$ なる近似を使えば

$$e=\frac{1}{\pi}\arccos\left\{\frac{8-(\Delta f_2/\Delta f_1)}{8}\right\} \quad (18)$$

となる。この式を用いることによって1次と2次の振動数の変化分がわかれば, クラック位置を決定することができる。(17), (18)式からわかるように, クラック同定式には, コンプライアンス $\Theta$ の項が含まれていない。コンプライアンスの式は, クラック形状やクラック深さなどをパラメータとした複雑な関数として提案されているが, これらが未知であっても振動数変化分を知ることができれば, クラックの位置を求めることが可能であることを示している。

### 3. 数値シミュレーションと考察

本研究のように、不連続部を含む構造体の振動解析には有限要素法 (FEM) は非常に有力である。今回数値計算に用いた有限要素法ソフトは NASTRAN で、プリポストプロセッサ PATRAN とともに、1995 年度北海道大学工学部汎用シミュレータ施設に導入されたものである。表 1 には数値計算に用いたはりとクラックの各パラメータを示す。本解析ではクラック部の要素分割を考え 3 次元弾性要素の 1 つである 3D HEX 要素を使用した。したがってはり理論には必要ないポアソン比も必要になる。端部での境界条件である単純支持を実現するために、支持点における要素の  $x$  方向変位と各回転成分をフリーにし、 $y$ 、 $z$  方向の変位を拘束した。最初に計算精度について調べるために、クラックのない様はりの固有振動数の計算を行った。表 2 には、NASTRAN によって求めた値と他の方法によって求めた値の比較を示している。この場合の要素分割は長手方向 40、幅方向 3 とした。表からわかるようにこの要素分割で得られた固有振動数は、チモシェンコはりの値と良く一致している。チモシェンコはりによる固有振動数は厳密解に非常に近いといわれているので一様はりの場合は、この分割で十分であると思われる。次にクラックを有するはりの固有振動数の計算を行った。クラックは、開口部長さ 2 mm とし、深さを変化させた V 字形の切欠き状のものと仮定した (図 2 参照)。クラック付近の要素分割は、さらに細かくし、全体で長手方向 44 分割とした (図 3 参照)。表 2 からわかるように、一様はりの場合にははり要素による計算も精度はよいが、はり要素ではクラック形状要素を作成できないので、以下の計算は、すべて 3 次元弾性要素 3D HEX を用いて数値シミュレーションを行っている。なおクラックの位置は、はりの対称性を考慮して、右半分 ( $e=0 \sim 1$ ) に存在すると仮定した。

表 3 には、クラック位置とクラック深さをパラメータとして、固有振動数の計算を行った結果

表 1 はりとクラックの各パラメータ

長さ	$L=0.20$ [m]
厚さ	$H=5.0 \times 10^{-3}$ [m]
幅	$B=15.0 \times 10^{-3}$ [m]
縦弾性係数	$E=69.0$ [GPa]
密度	$\rho=2710$ [kg/m <sup>3</sup> ]
ポアソン比	$\nu=0.34$
クラック開口部長さ	$d=2.0 \times 10^{-3}$ [m]

表 2 固有振動数 (クラックなし)

振動数 [Hz]	1st	2nd
FEM (3D HEX 要素) 40×3分割	285.74	1139.75
FEM (はり要素) 12分割	286.01	1144.09
はり理論 Bernoulli-Euler	286.01	1144.03
はり理論 Timoshenko	285.70	1139.08
1st : 1 次振動数    2nd : 2 次振動数		

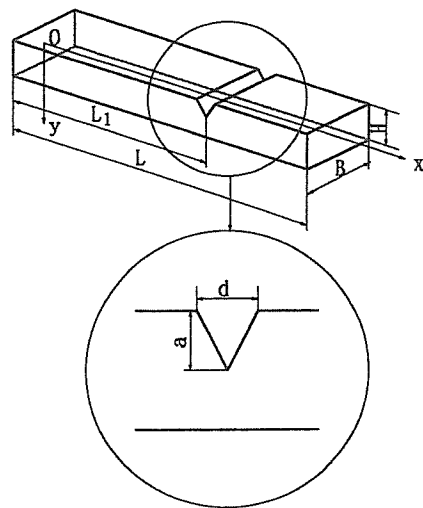


図 2 クラック形状

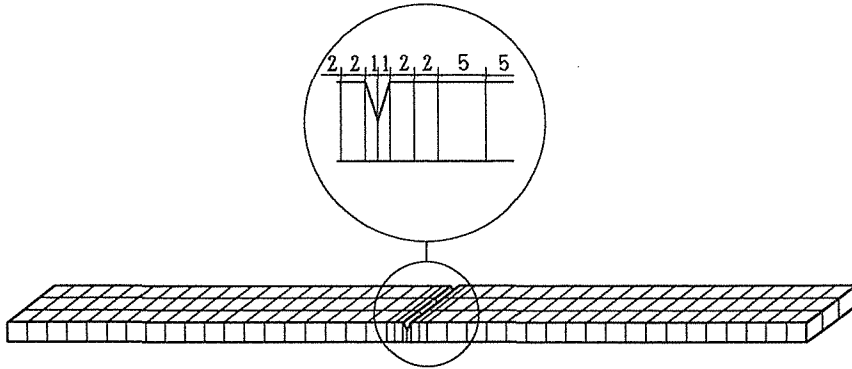


図3 FEM要素分割

表3 固有振動数 [Hz] (クラックあり)

crack position (e)		crack depth ( $\delta$ )						
		0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
0	1st	285.33	285.02	284.62	284.10	283.44	282.61	281.56
	2nd	1139.84	1139.84	1139.84	1139.83	1139.83	1139.83	1139.82
0.3	1st	285.41	285.17	284.85	284.43	283.91	283.24	282.41
	2nd	1138.60	1137.80	1136.76	1135.43	1133.74	1131.62	1128.99
0.5	1st	285.54	285.38	285.18	284.92	284.58	284.16	283.63
	2nd	1137.95	1136.73	1135.13	1133.09	1130.50	1127.25	1123.21
0.7	1st	285.66	285.60	285.51	285.40	285.26	285.09	284.87
	2nd	1138.60	1137.79	1136.74	1135.38	1133.64	1131.45	1128.69

表4 クラック位置の同定

crack position (e)		crack depth ( $\delta$ )						
		0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
0.3	(1)	0.3096	0.3064	0.3034	0.3003	0.2996	0.2979	0.2968
	(2)	0.3091	0.3060	0.3030	0.3000	0.2993	0.2977	0.2967
0.5	(1)	0.5412	0.5169	0.5116	0.5064	0.5012	0.4991	0.4967
	(2)	0.5399	0.5155	0.5100	0.5049	0.4990	0.4965	0.4936
0.7	(1)	0.7970	0.7734	0.7225	0.7110	0.7055	0.7083	0.7065
	(2)	0.7936	0.7700	0.7194	0.7075	0.7013	0.7033	0.7005

(1) : from Eq. (17)      (2) : from Eq. (18)

を示している。なお、ここではクラックの無次元深さ  $\delta$  はクラック深さ  $a$  と、はりの厚さ  $H$  との比  $\delta = a / H$  と定義している。(14), (15)式で予想したように1次で  $e=0$ , 2次で  $e=0.5$  のときに振動数の変化が最大となっている。ただし、このときの最大値でも1次で4 Hz, 2次で17 Hz程度であるので、クラック位置の同定を正確に行うためには、振動数の計測にはかなりの精度が要求されることがわかる。

表4には、数値シミュレーションによって得られた固有振動数をもとに、クラック位置の同定の計算を行ったものである。(1)は(17)式, (2)は(18)式から求めた値である。この表から、

無次元深さが0.4という深いクラックの場合は、1%以内の誤差で同定が可能であるが、浅いクラック(0.15以下)では、10%以上の誤差があり、クラックが浅くなるほど同定の精度が落ちることを示している。また(1)、(2)の数値の差は非常に小さく、実用的には(18)式の近似計算で十分であろう。

1次振動数の最大変化は、クラックが中央( $e=0$ )のときであるが、このときの無次元振動数パラメータを $\beta_1$ とすると、ばねのコンプライアンスは(8)式より

$$\Theta = \frac{-4 \sin \beta_1 \sinh \beta_1}{\beta_1 \{ \sinh \beta_1 (\cos \beta_1 - 1) + \sin \beta_1 (\cosh \beta_1 - 1) \}} \quad (19)$$

と表すことができるので、この式を $\beta_1$ で偏微分し近似を行うと

$$\Delta \Theta = \frac{S_1}{S_2} \Delta \beta_1$$

ここで

$$S_1 = \beta_1 (\cos \beta_1 - \cosh \beta_1) - \sin \beta_1 (1 + \cosh \beta_1) + \sinh \beta_1 (1 + \cos \beta_1)$$

$$S_2 = \left\{ \beta_1 \left( \cos \frac{\beta_1}{2} \sinh \frac{\beta_1}{2} - \cosh \frac{\beta_1}{2} \sin \frac{\beta_1}{2} \right) \right\}^2$$

(20) 式を(14)、(15)式に代入することによって

$$Fr_1 = \frac{-S_1}{2S_2} (1 + \cos e\pi) \Delta \beta_1 \quad (21)$$

$$Fr_2 = \frac{-S_1}{2S_2} (1 - \cos 2e\pi) \Delta \beta_1 \quad (22)$$

と書き直すことができる。この式はクラックが中央にあるときの1次の無次元振動数パラメータ $\beta_1$ とそのときの微小変化分 $\Delta \beta_1$ によって、1次と2次の振動数変化比を求めることができることを示している。 $\beta_1$ はクラック深さ $\delta$ の関数であり、一般的に求めることはできないが、ここではFEMによって得られた表3のデータから $\beta_1$ を次のような $\delta$ の3次式と近似した。この式の係数は最小自乗法によって定めている。

$$\beta_1(\delta) = 3.1406 - 0.0251\delta + 0.0048\delta^2 - 0.2222\delta^3 \quad (23)$$

図4と図5は、1次と2次の振動数比の変化とクラック位置の関係を示したものである。

実線は $\beta_1$ を(23)式から計算したものであり、●はFEMによる計算から得られた値を示す。

これらの図を用いて、クラック位置とクラック深さを同時に同定することができることを示す。例として1次の振動数比0.0046(1.3 Hzの変化に相当)、2次の振動数比0.0038(4.3 Hzの変化に相当)が振動計測で得られたとする。これらの値に対する直線を図4、5のように引き、この直線と図4、5の曲線との交点を求める。図6はこの交点をクラック位置とクラック深さを座標軸にとって表したものである。この2曲線の交点を読みとれば、クラック位置(0.25)とクラック深さ(0.3)が同時に同定できることになる。

Narkisの提案した同定式は、クラックの位置のみ求めるものであったが、クラックをモデル化した数値シミュレーションによって1次と2次の振動数変化分を表す図を作成することによって、クラック深さも同定可能となる。

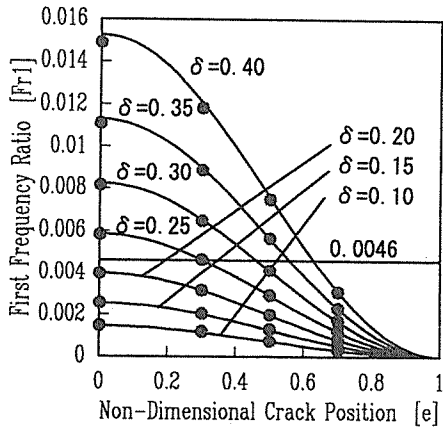


図4 1次振動数変化比

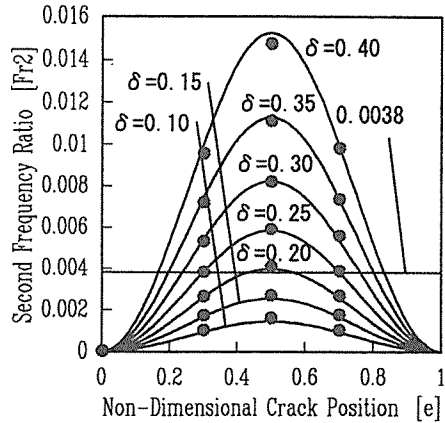


図5 2次振動数変化比

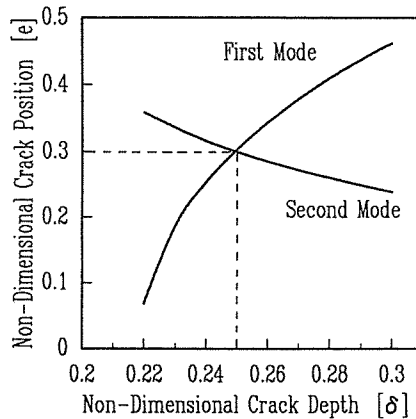


図6 クラック位置と深さの同定

#### 4. ま と め

クラックを有するはりの振動数の変化を有限要素法シミュレーションによって求め、Narkisによって提案された、はりのクラック位置同定式の有効性を検討した。その結果をまとめると次のようになる。

1. 振動数変化比が十分な精度で計測できれば、クラック位置はかなり正確に求めることができる。Narkisの式は、クラックのコンプライアンスが未知であっても使えるので、非常に有効であると思われる。
2. 1次と2次の振動数変化のデータと、クラック位置との関係をグラフにあらわすことによって、クラック位置のみならずクラック深さも同定することが可能になる。このことは、非破壊検査においてクラック同定法が有力な技術となり得る可能性を持っていることを示している。

なお、今後の課題としては、数値計算に適したさらに精密なクラックモデルの作成と、クラッ



クの開閉を考慮した非線形解析<sup>(9)</sup>を進める必要がある。また実験的計測によって、クラック同定式と数値シミュレーションの妥当性を検討したい。

本研究に対して、ご討論いただいた北海道大学工学部山田元教授、小林幸徳助教授に感謝いたします。また NASTRAN-PATPAN の使用に関してご指導いただいた汎用シミュレータ施設丸山澄夫技官、日本エムエスシー株式会社技術部の皆様に厚くお礼申し上げます。

#### 参考文献

- (1) 長岡金吾：“機械部材の破損解析”，(1979)，工業図書，pp. 113-118.
- (2) 小林英男：“破壊事故に学ぶ”，日本機械学会誌，98-915 (1995)，pp. 97-100.
- (3) 土門・越出：“やさしい非破壊検査技術”，(1996)，工業調査会，pp. 187-256.
- (4) Narkis, Y. : J. Sound Vib., 172-4(1994), pp. 549-558.
- (5) Narkis, Y. and Elmalah, E. : Int. J. Mech. Sci., 38-5(1996), pp. 499-507.
- (6) Rizos, P. F. and Aspragathos, N. : J. Sound Vib., 138-4(1990), pp. 381-388.
- (7) Davini, C. et al. : J. Sound Vib., 179-3(1995), pp. 513-527.
- (8) Sundermeyer, J. N. and Weaver, R. L. : J. Sound Vib., 183-5(1995), pp. 857-871.
- (9) Abraham, O. N. L. and Brandon, J. A. : Trans. ASME, J. Vib. and Acoust., 117, July(1995), pp. 370-377.