経 済 学 研 究 *60－4*
北 海 道 大 学 2011. 3

Farkasの補題再考

田 中 嘉 浩

1 はじめに

Farkasの補題は線形不等式系に対する基本定理であり，以前の原稿[12]では代表的な関数解析の重要な結果である分離定理からの導出ではない，代数的証明と最小2乗問題を使う幾何的証明の紹介を中心に類似の定理や拡張について述べた。

線形不等式系の定理は，両方共斉次形のMotzkinの定理(系はGordanの定理)，Tuckerの定理(系はStiemkeの定理)，片方は非斉次形のFarkasの定理等があり，どれか1つの証明が為されれば他も容易に証明できるものであった。

本稿では，Farkasの補題の系を考え，それを用いて一般的な非線形計画問題の最適性の必要条件であるKarush-Kuhn-Tuckerの定理を導出する。また，Farkasの定理の様々な方向への拡張についても概観する。

2 Karush-Kuhn-Tuckerの定理の証明

連続変数(実数変数)に対する一般の数理計画問題は

$$
\begin{array}{lll}
(P)\ \text{minimize} & f(x) & \\
\quad\ \ \text{subject to} & g_i(x) \leq 0, & i=1,\dots,m, \\
 & h_j(x)=0, & j=1,\dots,\ell,
\end{array}
$$

但し $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $g_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $i=1,\dots,m$, $h_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $j=1,\dots,\ell$,

と定式化できる。

前稿に書いたが，線形不等式に対するFarkasの補題を再掲する。本稿では二者択一の形でなく同値の形で書く。

定理1 *(Farkasの補題)[4]* 行列 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ と列ベクトル $c\in\mathbb{R}^n$ に対して，$Ax\neq 0$ ならば，

(a) $c^Tx\geq 0$，かつ $Ax\leq 0$
(b) $\exists u\geq 0$，$c+A^Tu=0$

は同値である。 ■

不等式だけでなく，等式・不等式に対してFarkasの補題を適用する。

系1 行列 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$B\in\mathbb{R}^{\ell\times n}$ と列ベクトル $c\in\mathbb{R}^n$ に対して，$Ax\neq 0$ ならば，

(a) $c^Tx\geq 0$ かつ $Ax\leq 0$，$Bx=0$
(b) $\exists u\geq 0$，$\exists v\in\mathbb{R}^\ell$，$c+A^Tu+B^Tv=0$

は同値である。 ■

［証明］ 定理1で $A:=\begin{bmatrix} A \\ B \\ -B \end{bmatrix}$，$u:=\begin{bmatrix} u \\ \xi \\ \zeta \end{bmatrix}$，$\xi\geq 0$，$\zeta\geq 0$，$\xi$，$\zeta\in\mathbb{R}^\ell$ と置けば，$v:=\xi-\zeta$ として結果が成立する。 ■

更に問題(P)に対して，次のMangasarian-Fromovitzの制約想定(MF)[10]を置く。

(MF) $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して $\nabla h_j(\bar{x})$，$j=1,\dots,\ell$ は1次独立。$\exists s\in\mathbb{R}^n$ s.t. $\nabla g_i(\bar{x})^Ts<0$，$i\in I(\bar{x})$，∇h_j

$(\bar{x})^T s = 0,\ j=1,\ldots,\ell$，但し $I(\bar{x}) := \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0,\ i = 1,\ldots,m\}$。

通常仮定される1次独立の制約想定が成立すれば(MF) は成立することが知られている。

次の Karush-Kuhn-Tucker の定理が証明される。

定理 2　$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$が問題*(P)*の局所最適解(実行可能解でもある)で，制約条件が$\bar{x}$に於いて制約想定*(MF)*を満たすとする。この時，或る $\bar{\lambda}_i \geq 0$，$i = 1,\ldots,m$，$\bar{\mu}_1\ldots,\bar{\mu}_\ell \in \mathbb{R}$ が存在して，

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{\ell} \bar{\mu}_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0, \quad (1)$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0,\ \bar{\lambda}_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,m$$

が成立する。

［証明］(MF)を満たす $s \in \mathbb{R}^n$は許容方向なので，$\bar{x}$ が局所最適解ならば，

$$\nabla f(\bar{x})^T s \geq 0$$

が従う。よって，(MF)と合わせると Farkas の補題(系 1)が適用でき，

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{\ell} \bar{\mu}_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0,$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0,\ \bar{\lambda}_i \geq 0,\ i \in I(\bar{x})$$

となる。$i \in I \backslash I(\bar{x})$に対しては$\bar{\lambda}_i = 0$と置くと，

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{\ell} \bar{\mu}_j \nabla h_i(\bar{x}) = 0,$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0,\ \bar{\lambda}_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,m$$

が成立する。 ■

問題*(P)*に対する Karush-Kuhn-Tucker 条件(1)は，Lagrange の未定乗数法を自然な形で含む包括的な形である。

3　Farkas の補題の一般化

この節では Farkas の補題の一般化に関する結果を紹介する。

3.1　無限次元への拡張

Farkas の補題(定理 1)を無限次元に拡張すると次の様になる。閉性の仮定に注意する。

定理 3　ベクトル空間の線形写像 A と閉凸錘 S^*に対して，錘 $A(S) = \{x \mid Ax \in S\}$が適当な位相で閉*(closed)*ならば，

(a) $\langle b,y \rangle \geq 0$，$A^T y \in S^*$

(b) $b \in A(S)$

は同値である。但し，S^*は S の双対錘 $S^* = \{y \mid \langle y,x \rangle \geq 0,\ \forall x \in S\}$である。 ■

有限次元で考えて S を多面体錘でない凸錘と考えても，定理の $A(S)$の弱位相での閉性の仮定が成立しなければ成立しない。

例 1　行列$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 x_2 \geq x_3^2, x_1 \geq 0\}$を考える。

(a)$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ に対して，$A^T y = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$。ここで $y_1 = 0$ を選べば $b^T y = 0$，$A^T y \in S^*$とできる。

(b)$Ax = b$ から $x_2 = 0$，$x_3 = 1$ なので $x \in S$ は成立しない。

即ち定理 3 の内容は $A(S)$の閉性の条件を満たさないので成立しない。

ところで，$x_k = \begin{pmatrix} k \\ 1/2k \\ 1 \end{pmatrix}$では $\lim_{k \to \infty} A x_k = b$，$x_k \in S$ が成立していることに注意する。

こういう場合にも次の漸近的定理は成立する。

定理 4　(漸近的定理)　ベクトル空間の線形写像 A と閉凸錘 S^* に対して，

(a) $\langle b,y\rangle \geq 0$，$A^T y \in S^*$

(b) $\lim_{k\to\infty} Ax_k = b$，$x_k \in S$

は同値である。 ∎

尚，漸近的でなく有限の性質がそのまま成立する時に，Farkas-Minkowski 系であるという。一般の不等式系が Farkas-Minkowski 系である為の必要十分条件の導出が多く試みられている。

3. 2　凸最適化への拡張

Farkas の補題は非線形関数を含む系に拡張されているが，Fenchel-Moreau の共役関数を用いた，Boţ and Wanka[3]の結果を示す。$X \subset \mathbb{R}^n$を非空の凸部分集合，$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$を真凸関数，$g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$i=1,\ldots,m$ を凸関数とする。次の制約想定(CQ)(Slater の制約想定)を置く。

(CQ)　$\exists x' \in \mathrm{ri}(X) \cap \mathrm{ri}(\mathrm{dom}(f))$ s.t. $g_i(x') \leq 0, g_i$：線形，$g_i(x') < 0, g_i$：非線形,

但し，ri は相対内部を表す。

定理 5　*[3]*　関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$を真凸関数，$g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$i=1,\ldots,m$ を凸関数とする。制約想定(CQ)を満たすならば,

(a) $f(x) \geq 0,\ g_i(x) \leq 0,\ i=1,\ldots,m$

(b) $0 \in \mathrm{epi}(f^*) + \mathrm{coneco}(\cup_{i=1}^m \mathrm{epi}(g_i^*)) + \mathrm{epi}(\sigma_X)$

但し，f^*(g^*も同様)は *Fenchel-Moreau* 共役関数であり，$f^*: \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$，$f^*(p) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\{p^T x - f(x)\}$は同値である。 ∎

3. 3　非凸最適化への拡張

関数を凸より緩和する方向にも拡張が為されているが，Jeyakumar and Gwinner[6]の結果を示す。

関数 $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，$g: X \times Y \to \mathbb{R}$が，$\exists \alpha \in (0,1)$と$\forall x_1$，$x_2 \in X$ に対して$\exists x_3 \in X$ が存在して,

$f(x_3) \leq (1-\alpha) f(x_1) + \alpha f(x_2)$,

$g(x_3, y) \leq (1-\alpha) g(x_1, y) + \alpha g(x_2, y)$，$\forall y \in Y$

を満たす時，対(f,g)は類凸(convex-like)であるという。集合 A が $\alpha \in (0,1)$と$\forall x_1$，$x_2 \in X$ に対して,

$$(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2 \in A$$

を満たす時，A は近凸(nearly convex)である。

$\Omega_0 := \{(u,r) \in \mathbb{R}^Y \times \mathbb{R} \mid \exists x \in X, f(x) \leq r, \forall y \in Y, g(x,y) \leq u(y)\}$

は対(f,g)が類凸ならば近凸である。

定理 6　*[6]*　関数 $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，$f \not\equiv +\infty$，$g: X \times Y \to \mathbb{R}$とする。対$(f,g)$が X 上で類凸とする。$0 \in \mathbb{R}^Y$の或る近傍 U と定数$\gamma > 0$ に対して集合$\Omega_0 \cap \bar{U} \times (-\infty, \gamma]$を$\mathbb{R}^Y \times \mathbb{R}$の非空の閉部分集合と仮定する。その時,

(a) $f(x) \geq 0,\ \forall y \in Y, g(x,y) \leq 0$

(b) $\forall \theta < 0$，$\exists \lambda \in \Gamma$，$x \in X$ に対して,

$$f(x) + \sum_{y\in Y} \lambda_y g(x,y) > \theta,$$

但し，Γは Y 上の全ての非負関数の凸錘の双対錘は同値である。 ∎

この方向では類凸関数を含む minimax 問題や制約付最適化問題に対する Lagrange 関数を用いた試みが為されている。

3. 4　離散変数への拡張

A, b が整数のみからなる場合に,

$$Ax = b,\quad x \geq 0 \tag{2}$$

と同値な条件は，$x \in \mathbb{R}_+^n$に対しては(2)は Farkas の補題(定理 1)の(b)の場合になっているので得ることができるが，$x \in \overline{\mathbb{N}}^n$ ($\overline{\mathbb{N}} := \{0\} \cup \mathbb{N}$)に対しては陽な表現が得られていない。ここでは Lasserre[8]の結果を示す。

$A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$に対して，$\Omega := \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax = b\}$はコンパクトと仮定する。また，$\alpha \in \overline{\mathbb{N}}^n$，$\beta = \overline{\mathbb{N}}$を全ての $j=1,\ldots,m$ に対して,

$$\hat{A}_{ik} := A_{ik} + \alpha_k \geq 0,\quad k=1,\ldots,n, \tag{3}$$

$\hat{b}_i := b_i + \beta \geq 0$

となる様に選ぶ。更に，$\rho^*(\alpha) := \max_{x \in \mathbb{R}^n_+} \{\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \mid Ax = b\}$ に対して $\beta \geq \rho^*(\alpha)$ と選ぶ。$z^b := z_1^{b_1} \cdots z_m^{b_m}$ 等と記す。

定理 7　*[8]* 行列 $A \in \overline{\mathbb{N}}^{m \times n}$ と列ベクトル $b \in \overline{\mathbb{N}}^m$ に対して，$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid Ax = b\}$ はコンパクトと仮定する。$\alpha \in \overline{\mathbb{N}}^n$ と $b \in \overline{\mathbb{N}}$ を *(3)* と $\beta \geq \rho^*(\alpha)$ を満たす様に選ぶ。その時，

(i) $\exists x \in \overline{\mathbb{N}}^n$，$Ax = b$

(ii) 実数値多項式 $z^b(zy)^\beta - 1$ は，どれも非負係数を持つ実数値多項式 $\{Q_j\}_{j=0}^n \in \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_m, y]$ が存在して，

$$z^b(zy)^\beta - 1 = Q_0(z,y)(zy-1) + \sum_{j=1}^n Q_j(z,y)(z^{A_j}(zy)^{\alpha_j} - 1) \tag{4}$$

と表現される，

は同値である。

更に，*(4)* の Q_j の次数は，

$$(m+1)\beta + \sum_{i=1}^m b_i - \min\{m+1, \min_{k=1,\ldots,n}\{(m+1)\alpha_k + \sum_{i=1}^m A_{ik}\}\}$$

以下である。　∎

離散変数への拡張に関しては，計算量の理論の観点から，問題に或る離散構造を導入して解析することも必要と思われる。

4　おわりに

本稿では一般的な非線形計画問題に対する Karush-Kuhn-Tucker 条件が Farkas の補題の系を直接用いることにより，Motzkin の定理や Fritz John 条件を用いずに直接導出されることを示した。

また，Farkas の補題の様々な方向への拡張を概観した。離散変数への拡張は理論的にも奥深い方向であり，更なる発展が望まれているところである。

参考文献

［1］Bartl, D., “Farkas's Lemma, other theorems of the alternative, and linear programming in infinite-dimensional spaces: a purely linear-algebraic approach,” *Linear Multi. Algebra* 55, 327-353 (2007).

［2］Ben-Israel, A., “Linear equations and inequalities on finite dimensional, real or complex, vector spaces: a unified theory,” *J Math. Anal. Appl.* 27, 367-389 (1969).

［3］Boţ, R.I., Wanka, G., “Farkas-type results with conjugate function,” *SIAM J. Optim.* 15, 540-554 (2005).

［4］Farkas, J., ”Über die Theorie der einfachen Ungle-ichungen,” *J. Reine Angew. Math.* 124, 1-24 (1902).

［5］Illés, T., Kassey, G., ”Farkas type theorems for generalized convexities,” *Pure Math. Appl.* 5, 225-239 (1994).

［6］Jeyakumar, V., Gwinner, J., ”Inequality systems and optimization,” *J. Math. Anal. Appl.* 159, 51-71 (1991).

［7］Kuhn, H.W., Tucker, A.W., “Nonlinear Programming,” in: Neyman, J. ed, *Proc. of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* Univ. Calif. Press, Berkeley, 481-492 (1951).

［8］Lasserre, J.B., “Duality and a Farkas lemma for integer programs,” in: Pearce, C. et al. eds., *Optimization–Structure and Applications,* Springer, New York, 15-39 (2009).

［9］Mangasarian, O.L., *Nonlinear Programming,* SIAM, Philadelphia, (1994).

［10］Mangasarian, O.L., Fromovitz, S., “The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints,” *J. Math. Anal. Appl.* 17, 37-47 (1967).

［11］Prékopa, A., ”On the development of optimization theory,” *The American Mathematical Monthly* 87, 527-542 (1980).

［12］田中　嘉浩「Farkas の補題について」『経済学研究』(北海道大学) 58(2), 107-111 (2008).