# 木と要素が対応する新しいZDD

宇野 毅明 （国立情報学研究所，
総合研究大学院大学）

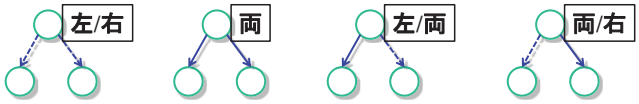
2010年11月 ERATO合宿


## パスから木へ

- ZDDは、非閉路的グラフのパスと記憶したいオブジェクトが1体1対応するような構造（パスで覚えている）
- パスの代わりに木（あるいは部分グラフ）を使って物事を覚える
  ➔ 根を持つ非閉路的グラフの、根を根とし、全ての頂点から0ノードか1ノードに到達可能なような部分グラフを考える
  （展開すると木になる）
- 簡単に言えば、ZDDは各内点（0,1ノードでないノード）で、右に行くか左に行くかを選んでいる。ここで、「両方選ぶ」という操作をアリにして、分岐を含めるようにする。

## 選択ラベル（choice label）

- 各頂点での子供の選び方は、今までのZDD・BDDでは「左か右か」を選ぶことのみ。ここにバリエーションを与える
- 具体的には「左か右」「左か両方」「右か両方」「左か右か両方」「必ず両方」の5通り。これを、各ノードがラベルとして覚える
  （各頂点での選択を記述しているラベルがついた）
- 実際のデータ構造は、ZDD/BDDの各頂点に、この選択ラベルがついたものになる。




## モデル化

- 具体的にある種の構造を記憶するときには、どのように選択ラベルを置くか、を決めるモデル化が必要

＋ (k)パーティション
＋（重複を許す）部分集合族
＋ グラフの部分（順序）木
＋ 木
＋ 部分非閉路グラフ

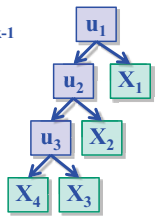
## 

- つづく （次回をお楽しみに）

*次回、衝撃の事実が明らかに!?*

## (k) パーティション

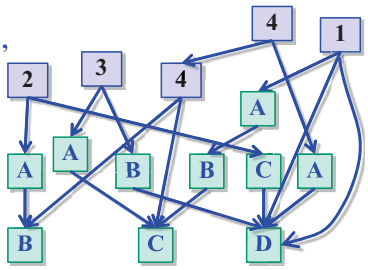
- 部分集合族を記憶する通常のZDDに、その組合せを表す屋根がついたモデル
- 入力は $E=\{v_1,\ldots,v_n\}$ の分割の集合。大きさ $k$ に限られててもいい
- ZDDの変数は、$v_1,\ldots,v_n$ に加え、ダミー変数 $u_1,\ldots,u_n$
  変数の順序は、上の方から $u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n$
- 各パーティション $\{X_1,\ldots,X_k\}$ に対して、各 $X_1$ ～ $X_{k-1}$ を変数 $v_1,\ldots,v_n$ を使って記憶。それらの先頭をダミー頂点 $u_1,\ldots,u_{k-2}$ のはしごでつなぐ。
  （ $X_1,\ldots,X_k$ は最小要素でソートして添え字付け）
- $v_i$ のラベルは**左右**、$u_i$ は**両**



## 単なる文字列と何が違うか

- 文字列でパーティションを表現すると、「末尾が同じとき」しか共有されない
- 木でやると、「各分割の要素の末尾が同じとき」に共有される

**例)** $V = A \cup B \cup C \cup D$,
パーティション集合 =
$\{A \cup B \cup C,\ D\},\ \{A \cup B,\ C \cup D\},$
$\{A \cup C,\ B \cup D\},\ \{A \cup D,\ B,\ C\}$

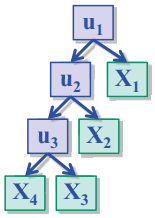



## （重複可の）部分集合族の族

- パーティションとほとんど同じ
- 入力は $E=\{v_1,\ldots,v_n\}$ の部分集合族の集合

- ZDDの変数は、$v_1,\ldots,v_n$ に加え、ダミー変数 $u_1,\ldots,u_n$
  変数の順序は、上の方から $u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_n$

- 各部分集合族 $\{X_1,\ldots,X_k\}$ に対して、各 $X_1 \sim X_k$ を変数 $v_1,\ldots,v_n$ を使って記憶。それらの先頭をダミー頂点 $u_1,\ldots,u_{k-1}$ のはしごでつなぐ。
（$X_1,\ldots,X_k$ は辞書順でソートして添え字付け）




- $v_i$ のラベルは**左右**、$u_i$ は**両**。右左の子供が同じである頂点がありうる

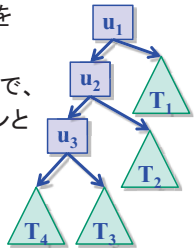
## 順序完全二分木

- 入力は順序完全二分木の集合。右の子・左の子が明示。グラフ $G=(V,E)$、$V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ の部分順序完全二分木の集合でもよい。

- ZDDの変数はラベル集合（$v_1,\ldots,v_n$）とダミー頂点。変数の順序はどうでもいい

- 基本的に、**両** 木ラベルを使って順序完全2分木を構築してZDD（BDD）にするだけ。
  各2分木の根をスーパールートにつなげるところで、**「右左」**ラベルのダミー頂点を使う。（パーティションと同じように）

- 木の順序は、「左優先探索のコード」でつける



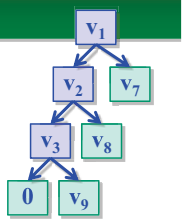

## 順序木

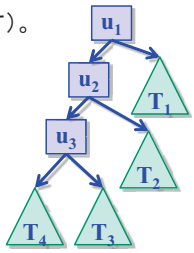
- 入力は順序木の集合。子供の数に制限がないので、子供が一人のこともある。

- ZDDの変数はラベル集合。変数の順序は適当

- 1つの頂点をはしごで表し、はしごの一番下の頂点の左の子供を0にする（これではしごの終点を表す）。葉は1ノード、あるいは右の子が1で左の子が0のノードで表す。

- 根のつなぎ方は先の方法と同じ
  木の順序は、「左重標準型のコード」でつける

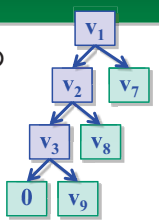


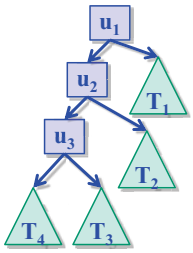




## 無順序木

- 入力は無順序木の集合。子供の数に制限がないので、子供が一人のこともある。

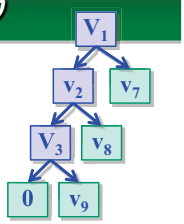
- ZDDの変数はラベル集合。変数の順序は適当
- 無順序木を「左重標準型」に変換して記憶
  → 順序木のフォーマットでそのまま行ける




## 順序アサイクリックグラフ

- 入力は順序アサイクリックグラフの集合
  ← 各頂点には「子供の順序」が与えられている
- ZDDの変数はラベル集合＋ダミー頂点＋「フォワード頂点」。変数の順序は適当




- まず、左の子供を優先して探索する深さ優先探索を行い、その木を記憶。残りの枝は、「フォワード頂点」の右の子にすることで表現

- 子供の順序を再帰的に付けることで、無順序なアサイクリックグラフも同様に格納