

# スケールフリーネットワークの生成方法およびベキ指数が結合振動子ネットワークの同期へ与える影響<sup>†</sup>

村田 賢太\*・鈴木 育男\*・山本 雅人\*・古川 正志\*

クラスタリング係数が小さいスケールフリーネットワーク上の結合振動子ネットワークについて、ネットワーク構造の生成方法と次数分布のベキ指数が結合振動子全体の同期に与える影響について調査した。結合振動子のモデルとして、蔵本モデルをネットワーク構造上に拡張したモデルを導入し、ネットワーク構造として優先的選択法と配位法のそれぞれを用いて生成したネットワークを用いた。このような設定の下、数値計算実験によって系全体の同期コヒーレンスの時間平均 $\bar{R}$ と次数分布のベキ指数 $\gamma_T$ の関係、および $\bar{R}$ と結合強度 $\sigma$ の関係から、(1) ネットワーク生成方法および $\gamma_T$ に依らず大きな $\sigma$ で大域的位相同期が現われる、(2) 大域位相同期下で $\gamma_T$ の増加に伴い $\bar{R}$ がゆるやかに減少する、(3)  $2 < \sigma < 7$ の範囲でコヒーレンス $\bar{R}$ がネットワークに強く依存するとともに、 $\sigma$ の増加に従ってコヒーレンスに強く影響を与える $\gamma_T$ も増加する、(4) コーレンスの緩和時間も $\bar{R}$ と同様に $2 < \sigma < 7$ の範囲でネットワークに強く影響を受けることを明らかにした。

キーワード：結合振動子ネットワーク、同期現象、複雑ネットワーク、スケールフリー、ベキ法則、優先的選択法、配位法

## 1. はじめに

最近の数年間インターネット、特にブロードバンド環境が広く普及し、P2Pファイル共有システムやグリッドコンピューティングなどの大規模分散ネットワークシステムが当たり前使用前に使用されるようになってきた。その例としては、Gnutella[1]、Freenet[2]、Winny[3]、Skype[4]などを挙げることができる。このような大規模分散ネットワークシステムは、これまでのクライアント/サーバ型のネットワークシステムと比べて、自己組織的な機能の創発、自律的な環境維持管理が期待できるため、今後のネットワークシステムの主流になると考えられている。

一方、時を同じくして、自然界と人間界の両方で共通する特徴を持った複雑なネットワーク構造が数多く発見され研究されてきた。Watts等[5]により発見されたWatts-Strogatzネットワークは、大きなネットワークサイズ(ノード数)に比して小さな直径(最も遠

いノード間の最短パス長)を実現するモデルとして注目された。このようなネットワークはスモールワールド(SW)ネットワークと呼ばれる。また、Barabási等[6]により発見されたスケールフリー(SF)ネットワークは、ノードの次数(ノードが持つリンク数)の分布がベキ法則に従うようなネットワークである。

大規模なP2Pシステムを構成する場合、スモールワールド性を持つオーバーレイネットワークを実現しなければならない。なぜなら、ネットワークの直径が大きい場合、ネットワーク全体を有効活用できないからである。しかし、現実のネットワークを考慮すると、全ノードが常にオンラインであることを仮定するショートカットリンクを導入することはできない。そのような条件下では、常にオンライン状態にあるノードを通信経路の中心として使用することは避けられない。従って、多数のリンクを保有するハブノードを導入する必要がある。そのようなネットワーク構造は、ノードの次数分布がベキ法則に従う傾向があり、スケールフリーネットワークとなる。

本研究は、スケールフリーネットワークを持つシステム一般を蔵本モデル[7-9]に基づく結合振動子ネットワークでモデル化する。システムを構成する個々のノードの挙動を位相振動子として、ノードが1対1で通信を行い互いの動作を調整する働きを振動子間の相

<sup>†</sup> Effects of the generation method of scale-free networks and their power-law exponents on the synchronization of coupled oscillator networks

Kenta MURATA, Ikuo SUZUKI, Masahito YAMAMOTO and Masashi FURUKAWA

\* 北海道大学大学院情報科学研究科  
Graduate School of Information Science and Technology,  
Hokkaido University

相互作用として理想化し、相互作用の強さを正のパラメータ変数で定義する。このようなモデル化によって、システム全体で創発されるノード間の同期を結合振動子全体の同期へ対応付ける。

蔵本モデルのような同期モデルを扱う研究にはセンサネットワークと並列離散事象シミュレーション(PDES)がある。センサネットワークでは、機器の持つ少ないリソースを有効活用するためワイヤレス接続される機器同士が非中央集権的な方法で動作を同期させる必要がある。そのためネットワークが持つ同期性能を調べる研究が盛んに行なわれており[10-12]、センサネットワーク上の同期現象をモデル化するために結合振動子が一般的に用いられる。ネットワークの性質を調べることが目的であるので、各機器の挙動の性質がリミットサイクル振動子と見なせるか否かは考慮されない。例えば、Díaz-Guilera等は2次元ランダム幾何グラフの同期能力を調べるために蔵本モデルを使用し、この種のネットワーク構造が同期し辛い性質を持つことを明らかにした[12]。またPDESでは、非中央集権的な方法で各処理単位のシミュレーション時刻を同期化させる必要がある。保守的同期手法(BCS)は一般に使用される同期化アルゴリズムであり、ある処理単位(PE) $u$ のシミュレーション時刻 $\tau_u$ がその近傍PE $v$ のシミュレーション時刻 $\tau_v$ より遅れている場合に離散事象が到着したこととする手法[13,14]である。BCSの時刻同期メカニズムは、周囲よりも時刻が進んでいるPEが時刻を過去に戻せない点を除き、近傍振動子との位相差を埋めようとする蔵本モデルの位相同期メカニズムと類似している。

スケールフリー性を持つネットワークとは、次数分布がベキ法則に従うという性質だけが特定されたネットワークであり、その他の性質については明確に特定されていない。そのため、次数のベキ法則が包含する性質、すなわちハブの存在やそれから導かれる小さな直径などを除いた一般の性質は不明なままである。そのような性質は、ネットワークのノード間結合がどのように構築されたか、つまり辺生成の遍歴によって様々な状態をとって良いはずである。従って、要素間の同期という性質もネットワークの生成方法によって変化する可能性がある。そこで本研究では、クラスタリング係数が小さいスケールフリーネットワーク上の結合振動子ネットワークについて、辺生成方法による同期現象の挙動の違いを調査する。ネットワーク生成方法として、Barabási等[6]による優先的選択法と、与えられた次数列を満たすグラフ構造を得る方法としてBékéssy等およびBender等によって初めて使用された配位法[15,16]の二種類のアルゴリズムを使用

する。さらに、配位法で次数分布のベキ指数を変化させ、ベキ指数に対する同期現象の挙動の違いも調査する。

以下では、第2章で結合振動子ネットワークについて述べ、第3章で関連研究について説明する。続いて、第4章でネットワーク生成アルゴリズムについて説明し、第5章で実験方法を述べ、第6章で実験結果と考察を示し、第7章で本論文をまとめる。

## 2. 結合振動子ネットワーク

ネットワーク構造が持つ結合の不均一性がシステム全体に与える影響を調べるため、ノードの孤立ダイナミクスに対して与えられるネットワーク構造による効果の大きさを単一のパラメータで調整できるモデルが必要である。本研究ではそのようなモデルとして、ネットワーク状に結合した多数の振動子から成る系を取り扱う。この系は、蔵本モデル[7-9]をネットワーク構造に拡張し、生成する。

位相振動子の平均場結合系である蔵本モデルは、次の式で表される支配方程式によって系のダイナミクスを記述する。

$$\frac{dx_u}{dt} = \omega_u + \frac{\sigma}{N} \sum_{v=1}^N \sin(x_v - x_u) \quad (1)$$

ここで $x_u$ 、 $\omega_u$ はそれぞれ振動子 $u$ の位相と自然振動数を現す変数、 $\sigma \geq 0$ は各振動子間の結合強度、 $N$ は系を構成する全振動子数である。系の同期状態は、次の指標を用いて観測される。

$$Re^{i\Phi} = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N e^{ix_u} \quad (2)$$

ここで、 $0 \leq R \leq 1$ はコヒーレンスと呼ばれ、値が大きい程同期が強いことを示す量である。 $-\pi \leq \Phi < \pi$ は平均位相である

蔵本モデルでは、振動子間の相互作用は位相差であり、これが自然振動数への加速度として働く。振動子は、他の振動子に対して自分の振動数が大きければ相互作用によって減速し、逆に自分の振動数が小さければ相互作用によって加速する。この相互作用の働きによって、振動子の位相が揃う方向へ系が発展する。実際に同期が発生するかどうかは結合強度 $\sigma$ の値によって決定される。ここで、自然振動数の分布が $g(\omega)$ で与えられ、 $g(\omega) = g(-\omega)$ が成り立つ場合、 $\sigma_c = 2 / [\pi g(0)]$ を境に、 $\sigma > \sigma_c$ で $R > 0$ となる。自然振動数分布 $g(\omega)$ がCauchy-Lorenz分布

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad (3)$$

で与えられる場合、 $\sigma > \sigma_c = 2s$  でコヒーレンスは正確に  $R = \sqrt{1 - (\sigma_c / \sigma)}$  となる [7]。ここで、 $s$  は分布の幅を定める定数である。

本研究ではスケールフリーネットワーク上の結合振動子について、蔵本モデルを修正した次のモデルを採用する。

$$\frac{dx_u}{dt} = \omega_u + \frac{\sigma}{k_u} \sum_{v \in \Gamma_u} \sin(x_v - x_u) \quad (4)$$

ここで、 $k_u$  は振動子  $u$  が結合している振動子数、 $\Gamma_u$  は振動子  $u$  が結合している振動子の集合である。

### 3. 関連研究

同期現象は幅広い分野において発見されており、これらの多くが結合振動子のモデルを用いて研究されてきている [17, 18]。ネットワーク上の結合振動子に関しては、主に同期を発生させることができるネットワークがどのような構造を持っているかに焦点を当てた研究が中心的である。

Ichinomiya 等 [19, 20] はネットワーク構造の次数分布  $P(k)$  のみを仮定し、連続体近似によってネットワーク上に拡張された蔵本モデルの臨界結合強度を理論的に導出した。この成果は Oh 等 [21] によって一般化され、モデル

$$\frac{dx_u}{dt} = \omega_u + \frac{\sigma}{k_u^{1-\eta}} \sum_{v \in \Gamma_u} \sin(x_v - x_u) \quad (5)$$

の連続体近似下における位相同期転移の臨界結合強度  $\sigma_c$  が

$$\sigma_c = \frac{2}{\pi g(\tilde{\omega})} \frac{\int k P(k) dk}{\int k^{1+\eta} P(k) dk} \quad (6)$$

で与えられることが示されている。ここで、 $x_u$  と  $\omega_u$  は振動子  $u$  の位相と自然振動数であり、 $\Gamma_u$  は振動子  $u$  の最近傍ノードの集合であり、 $k_u$  は振動子  $u$  の次数であり、 $g(\omega)$  は  $\omega_u$  の密度関数であり、 $\tilde{\omega}$  は  $\omega$  の平均値である。

数値計算実験に基づく詳細な調査も行なわれており、Hong 等 [22] は蔵本モデルを Watts 等によって提案された  $\beta$ -モデル [5] 上に拡張し、臨界結合強度  $K$  が辺の貼り替え確率  $\beta$  に反比例することを明らかにした。Hong 等のモデルは次式で与えられる。

$$\frac{dx_u}{dt} = \omega_u + \frac{\sigma}{2k} \sum_{v \in \Gamma_u} \sin(x_v - x_u) \quad (7)$$

ここで  $k$  は各ノードの近傍半径であり、ノード  $u$  の次数は  $k_u = 2k$  である。従って、このモデルを式 (5) に

あてはめると  $\eta = 0$  となる。

$\beta$ -モデルの辺貼り替え確率はネットワーク構造の規則性とランダム性を調整するパラメータであり、ポアソン分布に従う次数分布の分散に対応している。本研究は、次数分布のベキ指数に対する位相同期転移の挙動を調べることが目的であるが、ベキ指数は分布の分散に対応する値であるから、本研究の目的を位相同期転移の次数分散への依存性を確認することであると考えることも可能である。従って、Hong 等の研究と本研究は、次数分布の分散に注目している点において関連している。

Moreno 等 [23] は、Barabási 等による優先的選択法 [6] で生成したスケールフリーネットワーク上の結合振動子について、次のモデルを用いて調査した。

$$\frac{dx_u}{dt} = \omega_u + \sigma \sum_{v \in \Gamma_u} \sin(x_v - x_u) \quad (8)$$

このモデルにおいて Moreno 等は、いくつかの条件で数値計算を行い、同期転移が生じる臨界結合強度を  $\sigma_c = 0.05$  と見積った。このモデルを式 (5) にあてはめると  $\eta = 1$  である。Moreno 等は  $g(\omega)$  として区間  $(1/2, 1/2)$  の一様分布を用いているため、臨界結合強度の理論値は

$$\sigma_c = \frac{2}{\pi} \frac{\int k P(k) dk}{\int k^2 P(k) dk} \quad (9)$$

で与えられる。右辺の第 2 因子は次数の 1 次モーメントと 2 次モーメントの比であるが、次数分布のベキ指数が  $2 < \gamma \leq 3$  の範囲でこの比は存在せず、 $\sigma_c \approx 0$  となることが理論的に示されている [19, 20]。実際、ノード数  $N = 1024$  において優先的選択法で生成した 128 個のネットワークについて式 (9) を計算すると、この平均値は  $\sigma_c \approx 0.03024578$  となった。従って、Moreno 等によって見積られた臨界結合強度は  $\sigma_c \approx 0$  という点で正しい。

Moreno 等のモデル (8) と著者等のモデル (4) とは、結合強度がノードの次数でスケールされてるかどうかの点で異なっている。すなわち、Moreno 等のモデル (8) が  $\eta = 1$  であるのに対して、著者等のモデル (4) は  $\eta = 0$  である。著者等のモデルの場合、臨界結合強度は

$$\sigma_c = \frac{2}{\pi g(\tilde{\omega})} \quad (10)$$

となり、蔵本モデルと同じ値になる。そのため、次数分布のベキ指数が  $2 < \gamma \leq 3$  の範囲のネットワークでも臨界結合強度は  $\sigma_c > 0$  となる。

これらの研究では、対象となるネットワーク構造を

次数分布の特徴の大きな一致によって、つまり $\beta$ -モデルであれば辺貼り替え確率 $p$ によって分散が変化するポアソン分布に従うこと、優先的選択法であればベキ指数が $2 < \gamma \leq 3$ の範囲に収まるベキ法則に従うこと、でネットワークを同一視している。そして、ノード間を結ぶ辺の配置の違いを観測値の平均をとることで無視してしまっているため、類似した次数分布を持つが辺の配置が異なっているネットワーク間で結合振動子ネットワークの性質の差を見逃してしまっている。本研究では、この未解明な点を追求するため、(1)辺生成方法が異なるネットワーク生成アルゴリズムで構築したスケールフリーネットワーク、そして(2)次数分布のベキ指数の大小、に関する結合振動子ネットワークの性質の差異を調査する。

## 4. ネットワーク生成アルゴリズム

本研究は、辺生成方法が異なるネットワーク上の結合振動子の性質の差異について調査することを目的にしている。そのため、2種類の異なるネットワーク生成アルゴリズムを用いて、作られ方が異なるネットワークを準備する。ひとつは、ノードを1つずつネットワークへ追加し辺の接続先をノード次数に比例した確率に従って無作為に決定する優先的選択法である。もうひとつは、与えられた次数列を満足するよう予めすべてのノードを準備し、それらのノード間に一様な確率で無作為に辺を生成する配位法である。

### 4.1 優先的選択法

優先的選択法は Barabási 等[6]により提案され、BAモデルと呼ばれているネットワーク生成アルゴリズムである。このアルゴリズムによるネットワーク生成は次の手順で実行される。初期状態として $n_0$ 個のノードを持つ完全グラフ $K_{n_0}$ を用意する。続いて、以下の手順を全ノード数が $N$ になるまで繰り返し替す。

- (1) ネットワークのノード集合を $V$ 、まだネットワークに追加されていない新しいノードを $u$ とする。
- (2) ノード集合 $V$ の中から次式の確率に従って無作為にノードを $m$ 個選択する。

$$p(v) = \frac{k_v}{\sum_{w \in V} k_w} \quad (11)$$

ここで、 $k_v$ はノード $v$ の次数である。

- (3) 選択した $m$ 個のノードと、新しいノード $u$ を無向辺で接続し、 $u$ をネットワークへ追加する。

### 4.2 配位法

配位法は、与えられた任意の次数分布を持つランダムネットワークを生成できるアルゴリズムである[15, 16]。このアルゴリズムは、与えられた任意の次数分布を持つネットワーク構造の集合の中から、ひとつのネットワークが無作為に選択される。ネットワークは次の手順で生成される。

- (1)  $N$ 個の自然数列 $K = \{k_u | u=1, \dots, N\}$ を、与えられた次数分布 $P(k)$ に従う乱数生成器で生成する。集合 $K$ の要素はネットワークの $N$ 個のノードが持つ仮の次数を表す数値である。ただし、ネットワークの仮のリンク数を $0 \leq E \leq N(N-1)$ とすると、 $\sum_{k \in K} k = 2E$ を満たさなければならない。
- (2) 集合 $K$ から半リンク付きノードのペアをランダムに取り出し、それぞれを $u, v$ とする。そして、 $u-v$ 間をリンクで結合し、両ノードから半リンクを1つずつ取り除く。このとき、ノードの半リンクが無くなったら、集合 $K$ からそのノードを取り除く。この操作を、集合 $K$ が空になるまで繰り返す。
- (3) 集合 $K$ が空になるとひとつのネットワークが出来ているが、このネットワークには自己ループや多重リンクが含まれている可能性がある。そのため、作成した全てのリンクを調べ、自己ループと多重リンクを取り除き、ネットワークを単純無向グラフにする。
- (4) 完成したネットワークは自己ループや多重リンクが取り除かれているため、目的の次数分布が実現されていない可能性がある。得られたネットワークの次数分布を観測し、最初に与えた仮の次数集合 $K$ と比較し、棄却する場合はもう一度最初からネットワークを生成しなおす。

ここで、半リンクとは2端点の一方のみがノードに接続していて、もう一方は開放であるようなリンクである。2つの半リンクが互いの開放端同士を接続することで、完全なリンクが1つ作られる。このとき、それぞれの半リンクに接続している2点が、新しく作られたリンクによって隣接する。

このアルゴリズムでは、稀にクラスタリング係数が大きいネットワークが作られることがある。本研究では、クラスタリング係数が小さいネットワークだけを対象にしているため、そのようなネットワークは棄却する。

### 4.3 2つの生成法の差異

優先的選択法は初期状態で存在する完全グラフ  $K_{n_0}$  を核にネットワークを成長させるアルゴリズムである。成長ステップ毎に追加されるノードが持つ  $m$  本の辺それぞれについて、接続先を既存ノードの次数についての重み付き確率で選択する。そのため、結果として得られるネットワークでは、初期状態で存在していた  $n_0$  個のノードがハブとなり、後から追加されたノードのほとんどがハブを介して連結する形が得られる。そして、成長ステップの初期に追加されたノードがより多くの次数を獲得する。従って、次数相関は若干負の相関を示す。クラスタリング係数は、ハブの周囲で大きな値を示すが、小次数ノードの周囲ではほぼゼロとなるため、ネットワーク全体での平均クラスタ係数はゼロに近い値となる。

対して配位法は、ハブとなる頂点はネットワーク生成前に与えられる次数列によって決定しているが、ハブ同士が直接連結するかどうかはネットワークが生成されるまで不明である点が優先的選択法とは異なっている。ハブは次数が大きいいため、他の頂点よりもネットワーク生成過程の最終段階まで残る可能性が高く、ハブ同士が直接連結する確率が高いが絶対的ではない。また、次数が正であるネットワークと負であるネットワークの両者が生成される可能性がある。従って、多数のネットワーク標本上での期待値としては次数に相関は無い。クラスタリング係数はほぼゼロとなる。なぜなら、三角形を構成するような3辺が生成される確率はネットワークサイズが大きい場合は極めて小さいからである。

以上の点から2つの生成法の統計的な性質の比較を表1に示す。まとめると、配位法は任意のベキ指数を持つスケールフリーネットワークを生成でき、次数相関を選択的に決定できる点が優先的選択法と異なっている。さらに、配位法で生成されるネットワーク構造の集合には、優先的選択法で生成されるネットワーク構造が含まれている。

表1 優先的選択法と配位法の統計的な性質の比較  
(\* 多数のネットワーク標本上における期待値)

| 生成法           | 優先的選択法      | 配位法    |
|---------------|-------------|--------|
| ベキ指数 $\gamma$ | 3.0 弱       | 任意     |
| ハブ同士の接続       | $n_0$ に依存*1 | 確率的    |
| 次数相関          | 弱い負相関       | 相関なし   |
| クラスタリング係数     | ほぼ 0.0      | ほぼ 0.0 |

\*1 初期状態で存在する  $n_0$  のノードがハブになる可能性は  $n_0$  が大きいほど高い。

## 5. 実験方法

### 5.1 優先的選択法による実験

優先的選択法で生成されたネットワークの上で結合振動子ネットワークの挙動を計算し、同期現象を観測する。このため、BAモデルのアルゴリズムを用いてネットワークを生成した。ネットワークは毎回乱数の初期値を変更して10個のネットワーク標本を生成し、それぞれについて独立に結合振動子ネットワークの挙動計算を以下の方法で行った。

- (1) 生成されたネットワークの各ノードに対応する振動子  $u$  に対して、初期位相  $-\pi \leq x_u(0) < \pi$ 、自然振動数  $\omega_u$  を与える ( $u = 1, \dots, N$ )。
- (2) 結合強度  $\sigma = 0.01, 0.02, \dots, 0.09, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1, 2, \dots, 10, 20, \dots, 100$  について独立に以下の手順を実行する。
- (3) 時間ステップ数が  $t = 1024$  になるまで、式(4)に従って結合振動子ネットワークの挙動を計算する。数値積分は4次の Runge-Kutta 法を用い、積分ステップは0.01とする。
- (4) 各振動子の挙動を観測するため、各積分ステップ毎にすべての振動子の位相  $x_u(t)$  を記録する。
- (5) 系全体での同期の様子を観測するため、式(2)で各ステップにおける系のコヒーレンス  $R(t)$  と平均位相  $\Phi(t)$  を求め記録する。

ここで、全ノード数は  $N = 1024$ 、BAモデルの初期状態である完全グラフのノード数は  $n_0 = 5$ 、ノードがネットワークに追加されるときに生成される辺の本数は  $m = 5$  とする。生成されたネットワークの獲得ベキ指数は、Newman[24]による最尤推定法で計算すると平均値2.78が得られた(図1)。振動子の初期位相は一樣乱数で、自然振動数はCauchy-Lorenz分布に従

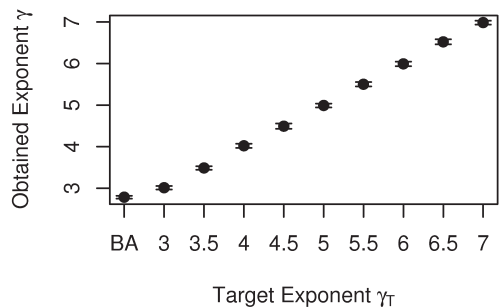


図1 配位法 ( $\gamma_T = 3.0, \dots, 7.0$ ) の目標ベキ指数と獲得ベキ指数の対応関係、および優先的選択法 (BA) の獲得ベキ指数

う乱数で生成するが、すべての実験で同一の値を設定した。

## 5.2 配位法による実験

配位法で生成されたスケールフリーネットワークの上で結合振動子ネットワークの挙動を計算し、同期現象を観測した。このために、配位法のアルゴリズムにベキ法則に従う次数分布を用いてネットワークを生成した。次数分布の目標ベキ指数は $\gamma_T = 3.0, 3.5, \dots, 7.0$ の9種類を採用した。ベキ指数 $\gamma_T$ の各値について乱数の種を変更し10個のネットワーク標本を生成し、それぞれについて独立に結合振動子ネットワークの挙動計算を前節と同様の手順で行った。ここで、全ノード数は $N=1024$ とし、次数分布における次数の最小値は $k_{\min} = 5$ とした。

生成されたネットワークについて、目標ベキ指数 $\gamma_T$ と獲得ベキ指数 $\gamma$ の関係を図1に示す。獲得ベキ指数 $\gamma$ はNewman[24]で提案された最尤推定法に基づいて求めた値である。図に示されるように、配位法で生成されたネットワークはどれも $\gamma \simeq \gamma_T$ を満たしている。振動子の初期位相と自然振動数は、優先的選択法の場合と同様の設定とした。

## 6. 結果と考察

図2に、結合強度 $\sigma = 10.0$ における優先的選択法および配位法の目標ベキ指数 $\gamma_T$ に対するコヒーレンスの挙動を示す。ここでのコヒーレンスは定常状態の値を扱うため、次式で定義される長時間平均 $\bar{R}$ を用いた。

$$\bar{R} = \frac{2}{T} \int_{T/2}^T R(t) dt \quad (12)$$

ここで $T$ は観測時間の最大値であり、時刻 $T/2$ で $R(t)$ がほぼ定常値に落ち着いているものとする。また、図3に、結合強度 $\sigma$ に対する $R$ の挙動を示す。この図では、実験で使用した10個のネットワーク標本すべてに

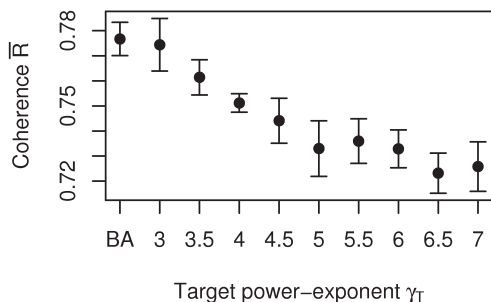


図2 目標ベキ指数 $\gamma_T$ に対するコヒーレンス $\bar{R}$ の挙動 ( $\sigma = 10.0$ の場合)。

ついでのコヒーレンスの挙動を重ねて描画した。

図3より、 $\sigma = 10.0$ のとき結合振動子ネットワークは大域的な位相同期を示すことが分かる。このとき $\bar{R}$ は、図2から分かるように $\gamma_T$ の増加に伴い減少する。これは、次数分布のベキ指数が大きくなることで低次数ノードが増加し、同時に高次数ノードが減少してネットワーク全体が大きなスターグラフの構造に近づくことで、多くの低次数ノードの位相が同期し難くなってしまふからである。さらに図3より、優先的選択法によるネットワークおよび、配位法によるすべてのネットワークについて、十分大きな結合強度でコヒーレンスの長時間平均は大きな値を示していることが分かる。これは、結合振動子ネットワークの結合強度が十分大きければ、ネットワークの生成アルゴリズムおよび次数分布のベキ指数の値に依らず大域的な位相同期が現れることを示している。

また、図3(a)では、各ネットワーク標本に対する曲線がほぼ重なっており、ネットワーク標本に依存して挙動が大きく異なる部分は見られない。しかし、(b)-(j)においては、だいたい $2 < \sigma < 7$ に含まれる区間でネットワーク標本に依存して挙動が大きく変化しており、その区間が目標ベキ指数 $\gamma_T$ に応じて変化するように見える。このようなネットワーク標本への依存性を数値的に見るため、次式で定義されるネットワーク標本への鋭敏性 $\chi$ [25]を導入する。

$$\chi = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{g=1}^M \left( \bar{R}_g - \frac{1}{M} \sum_{g=1}^M \bar{R}_g \right)^2} \quad (13)$$

ここで $M$ はネットワーク標本数であり、ここでは $M = 10$ である。また、 $\bar{R}_g$ はネットワーク標本 $g$ に対して式(12)で定義されるコヒーレンスの長時間平均である。 $\sigma$ に対する $\chi$ の挙動を図4に示す。図より、ネットワークの目標ベキ指数 $\gamma_T$ の増加に伴い、構造鋭敏性 $\chi$ が高い値を示す区間が右へ移動していることが分かる。 $\chi$ のピーク点は位相同期転移の臨界結合強度 $\sigma_c$ を表す[25]ため、この結果は $\gamma_T$ の増加に伴い $\sigma_c$ が増加していることを示している。

続いて結合振動子のコヒーレンスが定常状態へ至るまでに必要となる時間を調査するため、緩和時間

$$\tau = \int_0^{\infty} \left| \frac{R(t) - \bar{R}}{R(0) - \bar{R}} \right| dt \quad (14)$$

を求め、優先的選択法および配位法の目標ベキ指数 $\gamma_T$ に対してプロットしたものを図5に示す。この図では、エラーバーが長いほど緩和時間のネットワーク

表2 ネットワーク生成法と観測値の関係

| 生成法                                 | 優先的選択法      | 配位法         |
|-------------------------------------|-------------|-------------|
| ベキ指数 $\gamma$                       | 2.78        | 3.0         |
| 臨界結合強度 $\sigma_c$                   | 3.0         | 3.0         |
| ネットワーク鋭敏性 $\chi$                    | 小さい         | 大きい         |
| 緩和時間 $\tau$ ( $\sigma < \sigma_c$ ) | 定常状態に到達しやすい | 定常状態に到達しにくい |

依存性が高いことを表している。よって、 $\sigma=2$ では優先的選択法および配位法の $\gamma_T=3.0$ で、 $\sigma=4$ では配位法の $\gamma_T \geq 4.5$ で、および $\sigma=6$ では配位法の $\gamma_T \geq 5.5$ で緩和時間 $\tau$ がネットワーク構造に強く依存している。そして $\sigma=8$ ではすべてのネットワークで $\tau$ は小さな偏差しか持たないため、ネットワーク依存性は小さいと言える。従って、緩和時間がネットワークに強く影響される場合は、緩和時間に強く影響を与えるのベキ指数 $\gamma$ が、結合強度 $\sigma$ の増加に伴ない同時に増加する傾向があり、 $\chi$ と同じ性質を持っているといえる。

最後に、ネットワーク生成法の違いによる影響を見るため、優先的選択法と $\gamma_T=3.0$ の場合の配位法を比較する。図4(a)(b)より $\chi$ の振舞いを比較すると、配位法が優先的選択法よりも大きな $\chi$ のピーク値を示している。これは、優先的選択法によって生成されるネットワーク構造のトポロジーが、配位法によるものよりも多様性を持たないことを意味する。しかし、2つの生成法のどちらにおいても、 $\chi$ がピークを示す臨界結合強度の値は $\sigma_c \approx 3.0$ と同じである。従って、 $\bar{\chi}$ は配位法に対してより鋭敏であるが、臨界結合強度の値には影響しない。続いて図5について優先的選択法と $\gamma_T=3.0$ の配位法を比較する。 $\sigma \geq 4.0$ の場合(図のb, c, d)、緩和時間は生成方法に依らずほぼ同じ値を示している。しかし $\sigma=2.0$ の場合は、優先的選択法が配位法よりも小さい値を示している。2つの生成法の臨界結合強度が共に $\sigma_c=3.0$ であることを考慮すると、この結果は、優先的選択法によって生成される構造が、臨界値より小さな結合強度の下でより早く定常状態へ到達できる性質を持つことを表している。以上の比較結果を表2にまとめて示す。

## 7. 結論

本研究では、スケールフリーネットワークを持つネットワークシステムについて、ネットワークの生成アルゴリズムと次数分布のベキ指数の違いが同期現象へ与える影響について、結合振動子ネットワークを用いて調査した。その結果として以下が得られた。

- (1) 大域結合振動子である蔵本モデルを拡張し、任意のネットワーク構造で結合する結合振動子ネットワークモデルを導入した。
- (2) 振動子間の結合ネットワークとして、優先的選択法および配位法のそれぞれで作成したスケールフリーネットワークを用いた。
- (3) ネットワーク生成方法およびベキ指数に依らず、大きな結合強度で大域位相同期が現れることを確かめた。
- (4) 位相同期している条件下で、ベキ指数の増加に伴い、コヒーレンスがゆるやかに減少する傾向があることを明らかにした。
- (5) 結合強度が $2 < \sigma < 7$ の範囲でコヒーレンスがネットワーク構造に強く影響を受け、さらに $\sigma$ の増加に伴ってコヒーレンスに影響を与えるベキ指数の値が増加する性質を発見した。
- (6) コヒーレンスの緩和時間も同様のネットワーク構造鋭敏性を持つことを明らかにした。
- (7) 配位法と優先的選択法はほぼ類似した結果を示した。若干だが挙動の違いが現れた原因は、配位法で生成されるネットワークが優先的選択法で生成されるものを含むより広いクラスに属していることである。

優先的選択法はスケールフリーネットワークを生成するの代表的なアルゴリズムとして、その地位を不動のものとしている。Moreno等[23]の論文がそうであるように、スケールフリーネットワークをBAネットワークの代名詞として用いている例が多数存在する。しかし、本論文の結果は、優先的選択法で生成されるネットワークについて調べた結果だけでは、スケールフリーネットワークの性質を調べるには不十分であることを示している。

## 参考文献

- [1] M. Ripeanu, I. Foster, and A. Iamnitchi. Mapping the gnutella network: Properties of largescale peer-to-peer systems and implications for system design. *IEEE Internet Computing Journal* 6, 50–57, Sep 2002.

- [ 2 ] I. Clarke, O. Sandberg, B. Wiley, and T. W. Hong. Freenet: A distributed anonymous information storage and retrieval system. *Lecture Notes in Computer Science*, 2009, 46, 2001.
- [ 3 ] 金子勇. Winny の技術. ASCII, 東京, October 2005.
- [ 4 ] S. A. Baset and H. Schulzrinne. An analysis of the skype peer-to-peer internet telephony protocol. e-print arXiv:cs.NI/0412017, 2004.
- [ 5 ] D. J. Watts and S. H. Strogatz. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature* 393, 6684, 440-442, June 1998.
- [ 6 ] A.-L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science* 286, 509-512, October 1999.
- [ 7 ] Y. Kuramoto. International symposium on mathematical problems in theoretical physics. In H. Araki, editor, *Lecture Notes in Physics*, No. 30, 420, 1975.
- [ 8 ] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Springer, New York, 1984.
- [ 9 ] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. P. Vicente, F. Ritort, and R. Spigler. The kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.* 77, 137-185, 2005.
- [10] S. Barbarossa and F. Celano. Self-organizing sensor networks designed as a population of mutually coupled oscillators. *2005 IEEE 6th Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications* 475-479, 2005.
- [11] G. Werner-Allen, G. Tewari, A. Patel, M. Welsh, and R. Nagpal. Firefly-inspired sensor network synchronicity with realistic radio effects. In *SensSys '05: Proceedings of the 3rd international conference on Embedded networked sensor systems* 142-153, New York, 2005. ACM.
- [12] A. Díaz-Guilera, J. Gómez-Gardenes, Y. Moreno, and M. Nekovee. Synchronization in random geometric graphs. e-print arXiv:0801.3044, 2008.
- [13] B. D. Lubachevsky. Efficient parallel simulations of dynamic ising spin systems. *J. Comput. Phys.* 75, 1, 103-122, March 1988.
- [14] H. Guclu, G. Korniss, M. A. Novotny, Z. Toroczkai, and Z. Rácz. Synchronization landscapes in small-world-connected computer networks. *Phys. Rev. E*, 73, 066115, 2006.
- [15] A. Békéssy, P. Békéssy, and J. Komlós. Asymptotic enumeration of regular matrices. *Stud. Sci. Math. Hungar.* 7, 343-353, 1972.
- [16] E. A. Bender and E. R. Canfield. The asymptotic number of labeled graph with given degree sequences. *J. Combin. Theor. Ser. A* 24, 296-307, 1978.
- [17] S. H. Strogatz. Exploring complex networks. *Nature* 410, 268-276, March 2001.
- [18] A. T. Winfree. *The Geometry of Biological Time*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [19] T. Ichinomiya. Frequency synchronization in a random oscillator network. *Phys. Rev. E*, 70, 026116, 2004.
- [20] J. G. Restrepo, E. Ott, and B. R. Hunt. Onset of synchronization in large networks of coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 71, 036151, 2005.
- [21] E. Oh, D.-S. Lee, B. Kahng, and D. Kim. Synchronization transition of heterogeneously coupled oscillators on scale-free networks. *Phys. Rev. E*, 75, 011104, 2007.
- [22] H. Hong, M. Y. Choi, and B. J. Kim. Synchronization on small-world networks. *Phys. Rev. E*, 65, 026139, 2002.
- [23] Y. Moreno and A. F. Pacheco. Synchronization of kuramoto oscillators in scale-free networks. *Europhys. Lett.* 68, 603-609, 2004. doi:10.1209/epl/i2004-10238-x.
- [24] M. E. J. Newman. Power laws, pareto distributions and zipf's law. *Cont. Phys.*, 46, 5, September 2005.
- [25] E. Oh, K. Rho, H. Hong, and B. Kahng. Modular synchronization in complex networks. *Phys. Rev. E*, 72, 047101, 2005.

(2008年8月6日 受付)

(2008年12月30日 採録)

[問い合わせ先]

〒060-0814 北海道札幌市北区北14条西9丁目  
北海道大学大学院情報科学研究科自律系工学研究室  
村田 賢太

TEL : 011-706-6445

E-mail : mrkn@mrkn.jp



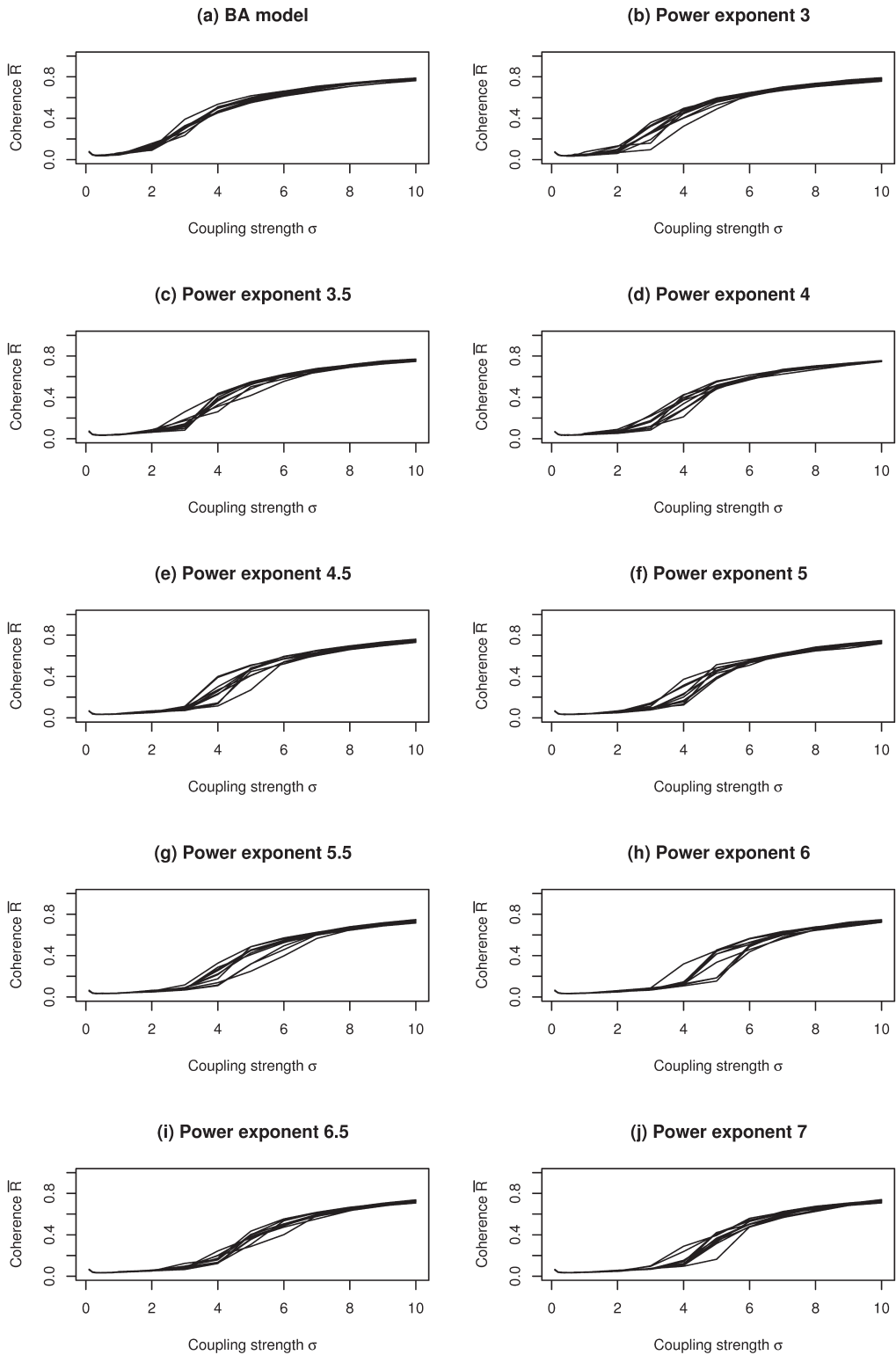


図3 結合強度  $\sigma$  に対するコヒーレンスの長時間平均  $\bar{R}$  の挙動. 使用したネットワーク標本についてのグラフをすべて重ねて描いている

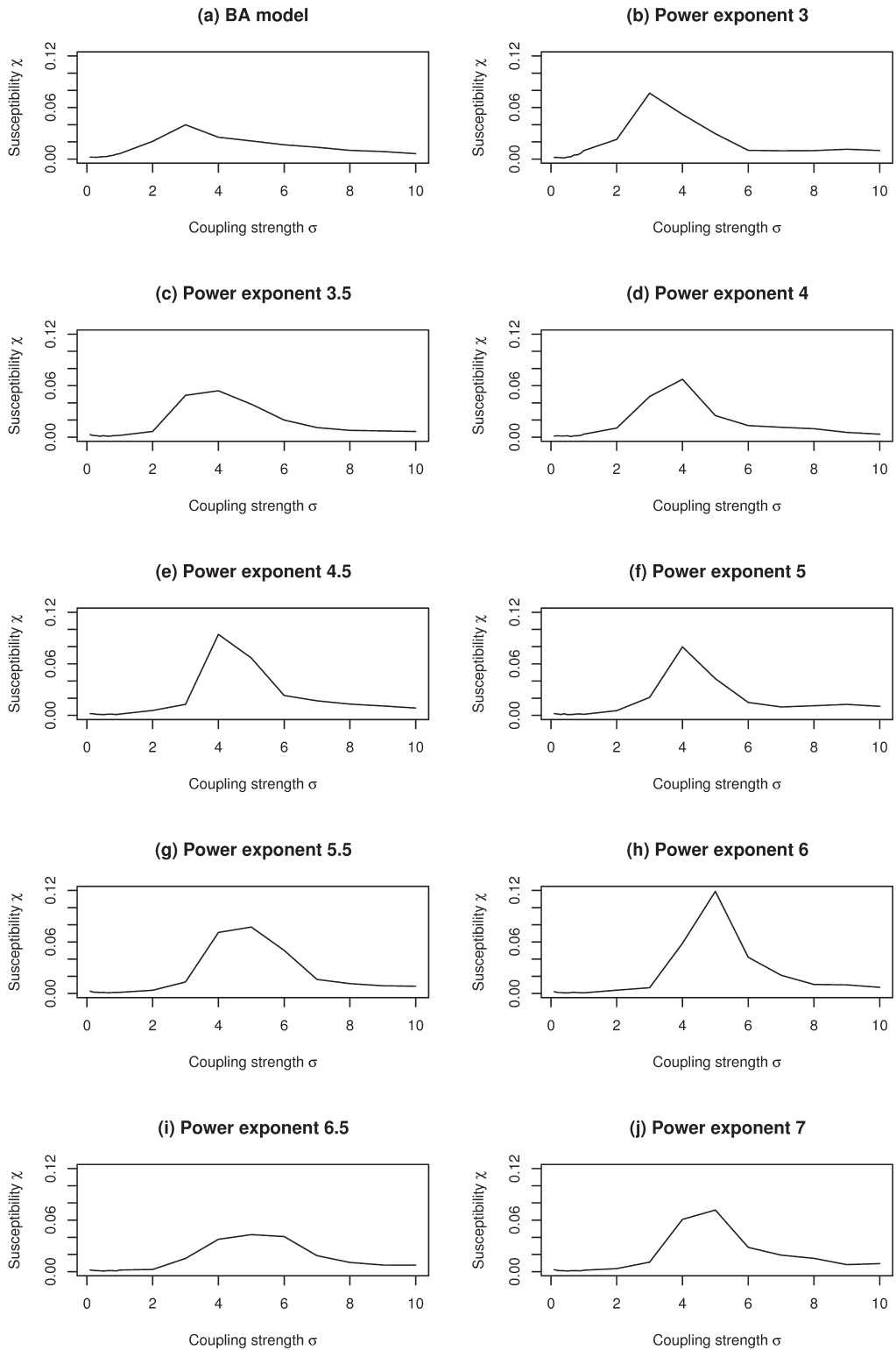


図4 結合強度とコヒーレンスのネットワーク構造への敏感度の関係

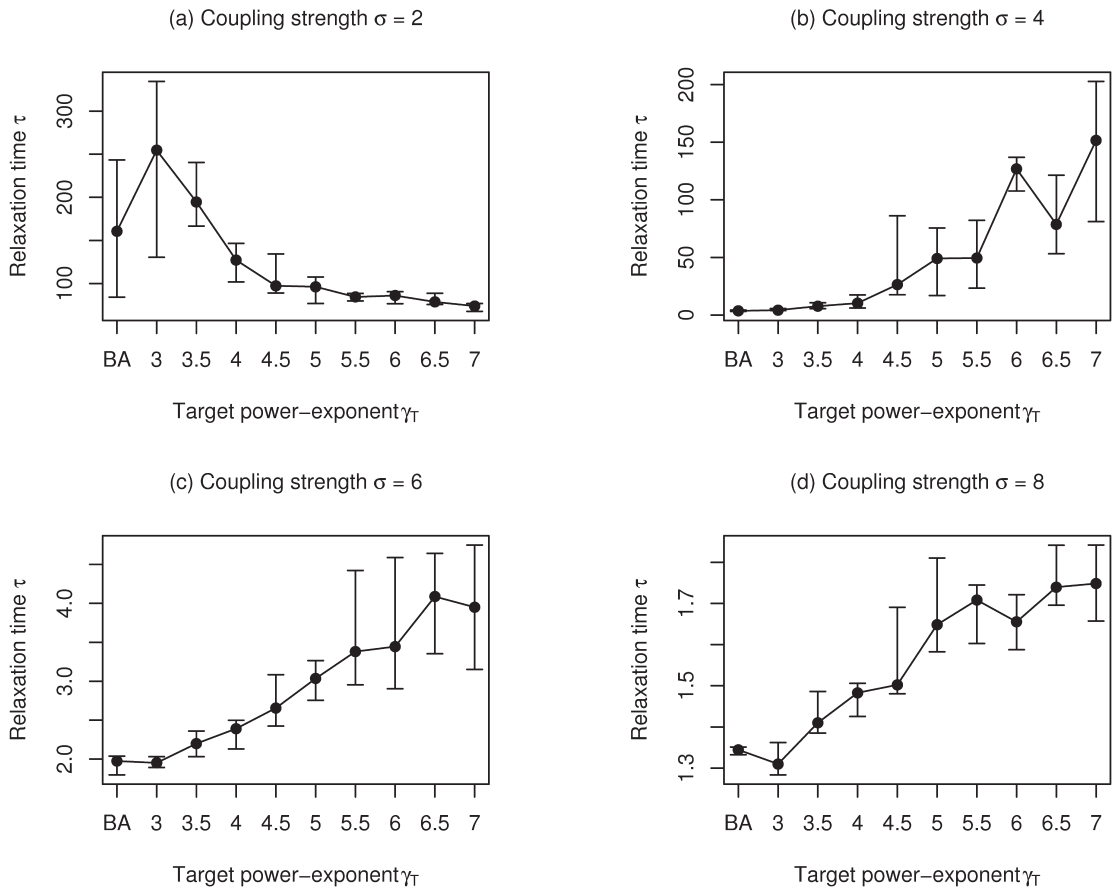


図5 コヒーレンス緩和時間  $\tau$  の目標ベキ指数  $\gamma_T$  に対する挙動 (結合強度が  $\sigma = 2.0, 4.0, 6.0, 8.0$  の場合). 点はネットワーク標本に関する  $\tau$  の中央値, エラーバーはその四分位間隔を表示している.

著者紹介



むらた けんた  
村田 賢太 [学生会員]

昭和56年生. 平成18年北海道大学大学院情報科学研究科複合情報学専攻修士課程修了. 同年北海道大学大学院情報科学研究科複合情報学専攻博士後期課程に入学, 現在に至る. 複雑系, 複雑ネットワークなどに関する研究に従事. 日本知能情報ファジィ学会, 情報処理学会, 人工知能学会, 電子情報通信学会, 各学生会員.



すずき いくお  
鈴木 育男 [非会員]

昭和48年生. 平成16年北海道大学大学院工学研究科博士後期課程修了. 博士(工学). 同年室蘭工業大学サテライト・ベンチャー・ビジネス・ラボラトリー中核的研究機関研究員. 平成19年北海道大学大学院情報科学研究科助教となり, 現在に至る. 複雑系, webマイニングによる感性情報の抽出などに関する研究に従事. 情報処理学会, 日本ロボット学会, 精密工学会, 日本感性工学会, 各会員.



やまもと まさひと  
山本 雅人 [非会員]

昭和43年生。平成8年北海道大学大学院工学研究科システム情報工学専攻博士後期課程修了。平成8年日本学術振興会特別研究員(PD)。平成9年北海道大学大学院工学研究科助手。平成12年同大学院工学研究科研究科助教授。同大学院情報科学研究科助教授を経て、平成19年北海道大学大学院情報科学研究科准教授。この間、科学技術振興機構さきがけ研究員、デューク大学客員研究員。博士(工学)。複雑ネットワーク、DNAコンピューティングの研究に従事。情報処理学会、電子情報通信学会、人工知能学会、計測自動制御学会、精密工学会、日本オペレーションズ学会等、各会員。



ふるかわ まさし  
古川 正志 [非会員]

昭和23年生。昭和46年北海道大学工学部精密工学科卒業。昭和48年同大学大学院工学研究科修士課程修了。同年旭川工業高等専門学校電気工学科助手。同機械工学科助教授。同制御情報工学科教授を経て平成18年北海道大学大学院情報科学研究科教授。この間、コーネル大学NSF研究員、イーストアングリア大学客員教授。昭和56年工学博士(北海道大学)。自律分散システム、インテリジェント・エンジニアリング、複雑ネットワーク等の研究に従事。情報処理学会、計測自動制御学会、機械学会(フェロー)、精密工学会、各会員。

## Effects of the Generation Method of Scale-free Networks and Their Power-law Exponents on the Synchronization of Coupled Oscillator Networks

by

Kenta MURATA, Ikuo SUZUKI, Masahito YAMAMOTO and Masashi FURUKAWA

### Abstract :

We examine effects of the generation method of scale-free networks with a small clustering coefficient and their power-law exponents on the synchronization of coupled oscillator networks. A modified Kuramoto model is introduced as a model of coupled oscillator networks. Networks employed for examinations are generated by a preferential attachment and configuration model. Under these conditions, the relationship between the coherence  $\bar{R}$  and the power-law exponent  $\gamma_T$  is investigated by numerical computation. In addition, the relationship between the  $\bar{R}$  and the coupling strength  $\sigma$  is also investigated. As a result, it is found that (1) the global phase synchronization occurs in the large number  $\sigma$  independent of network generation methods and  $\gamma_T$ , (2)  $\bar{R}$  gradually decreases as  $\gamma_T$  increases under the global phase synchronization, (3) the coherence  $\bar{R}$  depends on network topologies in the range of  $2 < \sigma < 7$ , where  $\gamma_T$ , which strongly affects the coherence too, increases as  $\sigma$  increases, and (4) the relaxation time of coherence depends on network topologies as well as  $\bar{R}$  in the range  $2 < \sigma < 7$ .

**Keywords :** coupled oscillator network, synchronization, complex networks, scale-free, power-law, preferential attachment, configuration model

Contact Address : **Kenta MURATA**

*Autonomous System Engineering Laboratory, Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University*  
N14-W9, Kita-ku, Sapporo, 060-0814, JAPAN  
TEL : 011-706-6445  
E-mail : mrkn@mrkn.jp