

振動子ネットワークからみた同期現象における ネットワーク構造の変化*

岩根 慎司[†] 鈴木 育男[†] 山本 雅人[†] 古川 正志[†]

北海道大学情報科学研究科[†]

1. はじめに

同期現象は生物学や物理学, 社会科学等の幅広い分野で観測することができ[1], 関連した様々な研究が行われている. この同期現象は, 構成要素間の相互作用により同期と呼ばれる全体作用が創発されることから, 還元的手法を用いた構成要素自体の解析だけでは同期のメカニズムを解明することは困難であるとされている.

同期現象に関する研究では, 構成要素を振動子としてモデル化する手法が一般的に用いられている. その中でも, 振動子ネットワークモデル[2]は代表的な振動子モデルである蔵本モデル[3]を拡張し, ネットワーク内でのノード間のつながりを振動子間のつながりと定義したモデルである. 実際にこのような振動子モデルの応用先と考えられるセンサネットワークでは, 時系列で変化する機器間ネットワークにおいて, 動作を同期化させる必要があり, ネットワークの構造に応じた機器間の同期化力を調査することが一つの重要なテーマであると考えられる.

本研究では, 振動子ネットワークにおけるネットワーク構造の変化をネットワーク特徴量や固有振動数分布の変化と捉え, これらが振動子系の同期の強さを表すパラメータであるコヒーレンスに与える影響との関連性を数値計算実験によって調査した.

2. 振動子ネットワーク

蔵本モデルでは, N 個の振動子で構成される系において, j 番目の振動子の位相 θ_j は以下の方程式に従う.

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \omega_j + \frac{K}{N} \sum_{k=1}^N \sin(\theta_k - \theta_j) \quad (1)$$

式(1)において, ω_j は j 番目の振動子の固有振動数である. また, K は結合強度であり, すべての振動子間で同じ値をとる.

更に, 振動子全体の同期の強さを表す指標には以下の式で定義される秩序パラメータ $r(t)$ と $\phi(t)$ を用いる.

$$r(t)e^{i\phi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \quad (2)$$

式(2)において, $r(t)$ と $\phi(t)$ はそれぞれ時刻 t における振動子の位相場における平均振幅と平均位相で

ある. 特に平均振幅 $r(t)$ はコヒーレンスと呼ばれる. $r(t)$ が大きいと全体の同期は強くなる. また, $r(t)$ は時刻 t の関数であるため, ある結合強度 K における挙動の評価には, 以下の式で定義される $r(t)$ の時間平均を用いる.

$$R = \frac{1}{T} \int_0^T r(t) dt \quad (3)$$

また, 式(1)で定義される蔵本モデルの位相方程式を複雑ネットワークに適用する振動子ネットワークモデルは以下の式で定義される.

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \omega_j + \frac{K}{k_j} \sum_{k=1}^N a_{jk} \sin(\theta_k - \theta_j) \quad (4)$$

式(4)において, k_j は j 番目の振動子の次数を, a_{jk} はネットワークの隣接行列 \mathbf{A} の (j, k) 成分を表す. $a_{jk}=1$ のときノード (j, k) 間にリンクがあり, $a_{jk}=0$ のときノード間にリンクが存在しない. 式(4)を用いることにより, 蔵本モデルによって定義された振動子系は, ネットワーク上で結合している振動子のみの影響を受ける振動子ネットワークとしてモデル化することができる.

3. ネットワーク特徴量

振動子ネットワークにおいて, 振動子系の挙動は, ネットワークの構造とその際の固有振動数の分布によって決定付けられると考えられる. また, ネットワークにはその構造的な特徴を因る様々な特徴量が存在する. 本研究では, ネットワーク構造の変化をネットワーク特徴量や固有振動数分布の変化と捉えるが, 実際に数値計算実験において観測する特徴量は, ネットワークの構造的特徴を表す平均クラスター係数と平均最短パス長, 固有振動数の分布を表す二つの特徴量の四種類とする.

平均クラスター係数は, ネットワークのクラスター性を測る特徴量であり, 以下の式で定義される.

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2E_i}{k_i(k_i-1)} \quad (5)$$

式(5)において, E_i はノード i に接続されている k_i 個のノード間に存在するリンク数を表す. 平均最短パス長は, ネットワークのsmall-world性を測る特徴量であり, 以下の式で定義される.

$$L = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N l(i, j) \quad (6)$$

式(6)において, $l(i, j)$ はノード (i, j) 間の最短パス長を示す.

固有振動数の分布を表す特徴量は Brede らの研究[4]で用いられた二つの特徴量を, 本研究でも

*Change in network structure in synchronization phenomenon seen from oscillator network

[†]Shinji IWANE [†]Ikuo SUZUKI [†]Masahito YAMAMOTO [†]Masashi Furukawa

[†]Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University

使用する. 一つ目の特徴量はネットワーク内の, リンクで繋がれている振動子の固有振動数が異符号である割合であり, 以下の式で定義される.

$$P = \frac{O}{M} \quad (7)$$

式(7)において, M は全リンク数, O は異符号の固有振動数を持つ振動子を繋いでいるリンクの本数である. 二つ目は, リンクで繋がれている振動子の固有振動数に関する相関係数であり, 以下の式で定義される.

$$C_{\omega} = \frac{\sum_{i,j} a_{ij}(\omega_i - \langle \omega \rangle)(\omega_j - \langle \omega \rangle)}{\sum_{i,j} a_{ij}(\omega_j - \langle \omega \rangle)^2} \quad (8)$$

式(8)において, $\langle \omega \rangle$ は固有振動数の平均値である. この二つの特徴量はランダムに固有振動数が分布している場合 $P=0.5$, $C_{\omega}=0.0$ となる.

4. 数値計算実験

4.1 実験概要

数値計算実験では, ネットワークの構造が変化した際に, 三章で示した四種類のネットワーク特徴量の変化に対する振動子系のコヒーレンスの変化量を観測する. このとき, ネットワークの構造変化の方法はランダムに選択した一つのリンクをネットワーク全体の次数分布が変化しないように繋ぎかえる方法をとる. 以下に実験データを取得する手順を示す.

- 1) 初期ネットワークを生成する.
- 2) 初期ネットワークの特徴量を計算し, 式(4)に基づき同期の数値積分を行い, 一定時間 T 内のコヒーレンスの平均値を計算する.
- 3) 初期ネットワークの中からランダムに一本のリンクを選択し, ネットワーク全体の次数分布が変化しないようにつなぎかえを行う.
- 4) 3) で構造を変化させたネットワークに関しても 2) を実行し, ネットワーク特徴量の変化量 (ΔC , ΔL , ΔP , ΔC_{ω}) とコヒーレンスの変化量 ΔR を記録する.
- 5) 1) ~ 4) を初期ネットワークやランダムに選択するリンクを変化させながら繰り返し, 約 1000 セットのデータを収集する.

4.2 実験設定

実験の設定として, 初期ネットワークはノード数 20, 平均次数 4 に設定した ER モデルのランダムグラフを用いた. この際, ER モデルの特性上非連結のノードが発生する可能性があるが, その場合は初期ネットワークを再び生成し直すこととした. また, 振動子の固有振動数の分布は $[-1, 1]$ の一様分布, 初期位相は $[-\pi, \pi]$ の一様分布とした. 更に, 同期の数値積分は結合強度を $K = 3.0$ に統一し, タイムステップ 0.1 のルンゲクッタ法を適用した. 実際に, このような条件で同期の数値積分を行った場合, 初期ネットワークにおけるコヒーレンスの時間平均は $R = 0.9$ 程度になる. 最後に, シミュレーションの試行時間は $T = 100$ とした.

4.3 実験結果

以上の設定の下, 数値計算実験を試行し得られ

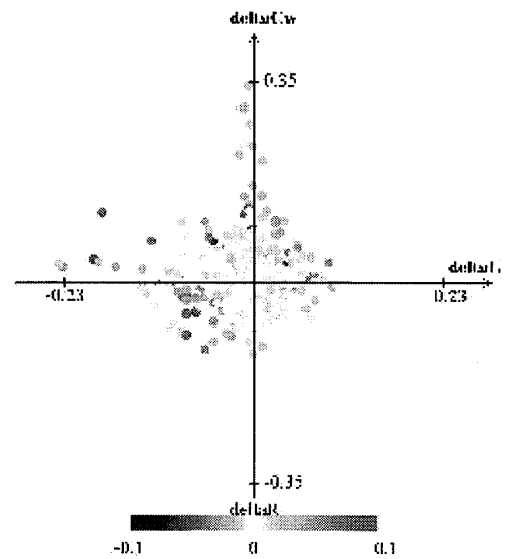


Fig1 Effects of ΔL and ΔC_{ω} on ΔR

たデータから, 四種類の特徴量一つずつとコヒーレンスの変化量 ΔR の相関や四種類の特徴量のペアとコヒーレンスの変化量 ΔR の相関を観測した. その中から特徴的な結果を図 1 に示す. 図 1 では, 実験結果の中から, ΔL と ΔC_{ω} という特徴量のペアに対する ΔR の値を色調の変化で表したグラフである. 図 1 からは大まかな法則性が確認でき, 振動子系のコヒーレンスとの二つの特徴量の間に関連関係があるものと考えられる. 図 1 において, $\Delta L < 0$, $\Delta C_{\omega} < 0$ の領域ではほとんど全てのデータで, $\Delta R > 0$ となっており, この二つの特徴量は, 小さな値になるほど振動子系の同期は強くなっていることがわかる.

5. おわりに

本研究では, ネットワーク構造の変化をネットワーク特徴量や固有振動数分布の変化と捉え, これらが振動系のコヒーレンスに与える影響に関する調査を行った. その結果, ΔL と ΔC_{ω} の二つの特徴量と ΔR の間に相関関係を確認できた. このような知見はネットワークの構造的な特徴と固有振動数分布という振動子のダイナミクスを決定付ける二つの要因を併せて見ることで初めて得られるものであり, 同期のメカニズムの解明にとって重要な結果であると考えられる. 今後の課題は実験の設定を変えながら, 更なる調査を進めることである.

参考文献

- [1] Steven H. Strogatz, "SYNC なぜ自然はシンクロしたがるのか", 早川書房, 2005
- [2] H.Hong, M.Y.Choi: Synchronization on small-world networks. Phys. Rev. E 65, 026139(2002)
- [3] Y.Kuramoto: Chemical Oscillations, Wave and Turbulence, Springer, Newyork, (1984)
- [4] Markus Brede, Synchrony-optimized networks of non-identical Kuramoto oscillators, Phys. Lett. A 372, pp.2618-2622, (2008)