



Title	多次元の非線形情報解析と時系列解析に関する研究
Author(s)	金子, 明人
Citation	北海道大学. 博士(理学) 甲第4978号
Issue Date	2000-03-24
DOI	10.11501/3168542
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/51636
Type	theses (doctoral)
File Information	000000353735.pdf



[Instructions for use](#)

多次元の非線形情報解析と
時系列解析に関する研究

金子 明 人

2000

北海道大学

①

多次元の非線形情報解析と
時系列解析に関する研究

北海道大学大学院
理学研究科数学専攻

金子 明人

学位論文内容の要旨(要約)

博士の専攻分野の名称 博士(理学) 氏名 金子 明人

学位論文題名

多次元の非線形情報解析と時系列解析に関する研究
(A study on multi-dimensional non-linear information analysis
and time series analysis)

In this thesis, we studied the following subjects.

- (1) A study on a non-linear information analysis for multi-dimensional stochastic processes with fixed time parameter and a construction of a predictor with a least structure for the multi-linear information space.
- (2) A study on a non-linear prediction problem to identify the non-linear predictor for multi-dimensional stochastic processes with fixed time parameter.
- (3) A study on formulations and representations of two types of models of non-linearly self-exciting mechanism with evidence in data analysis, which is based upon the multi-dimensional non-linear information analysis and the identification.
- (4) A study on a general non-linear information space which is necessary for data analysis.
- (5) A study on a new class of non-linear causality of finite rank based upon the partial analysis of information space.
- (6) A study on a method of non-linear prediction based upon the non-linear information analysis.
- (7) A study on a method for applying multi-dimensional non-linear information analysis to data analysis.
- (8) A study on the theory of both the multi-dimensional non-linear information analysis and the multi-linear and non-linear prediction.

The non-linear prediction problem has been first solved by Masaru Watanabe for the two-dimensional strictly stationary process with global time parameter. They provided both the boundedness condition and the non-degeneracy condition for the forecast. Through the prediction problem, we solved theoretically, however, their result failed for the non-stable situation in calculating the non-linear predictor.

Under the same conditions as in Masaru Watanabe's work, Masahito Oshino gave a complete algorithm for calculating the non-linear predictor. In using the theory of KMO-Linear-Via Equations for non-degenerate stochastic processes, Masahito Oshino derived the theory of KMO-Linear-Via Equations for degenerate case in finite period spaces. Masahito Oshino gave a complete algorithm for calculating the non-linear predictor for the multi-dimensional stochastic processes under the only exponentially integrable function weaker than the boundedness condition.

On the other hand, various kinds of methods for non-linear time series analysis such as the binary nonlinear causal analysis, threshold analysis and prediction analysis have been developed in the framework of the theory of KMO-Linear-Via Equations. However, the non-linearity used in such analysis differs from the analysis for multi-dimensional stochastic processes.

In the course of analyzing and the time series analysis for concrete data, we found that it is necessary to construct a theory of information analysis which covers not only the asymptotic

学位論文内容の要旨 (英訳)

博士の専攻分野の名称 博士(理学) 氏名 金子 明人

学位論文題名

多次元非線形情報解析と時系列解析に関する研究
(A study on multi-dimensional non-linear information analysis
and time series analysis)

In this thesis, we studied the following seven subjects:

- (a) a study on a non-linear information analysis for multi-dimensional stochastic processes with local time parameter and a construction of a generator with a nest structure for the non-linear information space
- (b) a study on a non-linear prediction formula to calculate the non-linear predictor for multi-dimensional stochastic processes with local time parameter
- (c) a study on formulations and characterization theorems of two new concepts of weak causality and non-instantaneous weak causality in cause-result relation based upon the multi-dimensional non-linear information analysis and their characterization
- (d) a study on a partial non-linear information space which is necessary for data analysis
- (e) a study on a formulation of non-linear causality of finite rank based upon the partial non-linear information space
- (f) a study on a method of model selection and prediction formula based upon the non-linear causal analysis
- (g) a study on a usage for applying multi-dimensional non-linear information analysis to data analysis
- (h) a study on effectiveness of both the multi-dimensional non-linear information analysis and the multi-dimensional non-linear causal analysis

The non-linear prediction problem has been first solved by Masani-Wiener for the one-dimensional strictly stationary process with global time parameter. They required both the boundedness condition and the non-degenerate condition for the process. Though the prediction problem was solved theoretically, however, their result lacked for the computable algorithm for calculating the non-linear predictor.

Under the same conditions as in Masani-Wiener's work, Okabe-Ootsuka have given a computable algorithm for calculating the non-linear predictor, by using the theory of KM_2O -Langevin equations for non-degenerate stochastic processes. Moreover, by developing the theory of KM_2O -Langevin equations for degenerate flows in inner product spaces, Matsuura-Okabe gave a computable algorithm for calculating the non-linear predictor for the one-dimensional stochastic processes under the only exponentially integrable condition weaker than the boundedness condition.

On the other hand, various kinds of methods in non-linear time series analysis such as stationary analysis, causal analysis, modeling analysis and prediction analysis have been developed in the framework of the theory of KM_2O -Langevin equations. However, the non-linearity used in such analyses come from the analysis for one-dimensional stochastic processes.

In the course of carrying out the time series analysis for concrete data, we found that it is necessary to construct a theory of information analysis which covers not only the non-linear

analysis for one-dimensional stochastic processes, but also the non-linear analysis for multi-dimensional stochastic processes. This indicates that we need a multi-dimensional theory not as an general extension of one-dimensional theory, but as an essential extension. We shall explain it by giving an example.

Let $\mathbf{X} = (X(n); 0 \leq n \leq N)$ be a one-dimensional stochastic process which we want to investigate and $\mathbf{Y} = (Y(n); 0 \leq n \leq N)$ be an another one-dimensional stochastic process which seems to affect \mathbf{X} in some sense. Let (Ω, \mathcal{B}, P) be a probability space on which \mathbf{X} and \mathbf{Y} are defined. Moreover, we assume that $X(n), Y(n)$ ($0 \leq n \leq N$) are square-integrable. By using the non-linear information analysis for \mathbf{Y} , we can examine the causal relation from \mathbf{Y} to \mathbf{X} . In this case, we calculate

$$P_{\mathbf{N}_0^n(\mathbf{Y})}X(n),$$

where $\mathcal{B}_0^n(\mathbf{Y})$ is the minimal σ -algebra with respect to which $Y(k)$ ($0 \leq k \leq n$) are measurable, $\mathbf{N}_0^n(\mathbf{Y}) = L^2(\Omega, \mathcal{B}_0^n(\mathbf{Y}), P)$ and $P_{\mathbf{N}_0^n(\mathbf{Y})}$ is the projection operator from $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ onto $\mathbf{N}_0^n(\mathbf{Y})$. The space $\mathbf{N}_0^n(\mathbf{Y})$ is insufficient for analyzing the non-linear mutual information between \mathbf{X} and \mathbf{Y} , because $\mathbf{N}_0^n(\mathbf{Y})$ uses only the non-linear information of \mathbf{Y} . The above discussion indicates the necessity of the non-linear mutual information analysis for \mathbf{X} and \mathbf{Y} . For that purpose, we need to calculate

$$P_{\tilde{\mathbf{N}}_0^n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}X(n),$$

where $\tilde{\mathcal{B}}_0^n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ is the minimal σ -algebra with respect to which $X(m)$ ($0 \leq m \leq n-1$), $Y(k)$ ($0 \leq k \leq n$) are measurable, $\tilde{\mathbf{N}}_0^n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = L^2(\Omega, \tilde{\mathcal{B}}_0^n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), P)$ and $P_{\tilde{\mathbf{N}}_0^n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}$ is the projection operator from $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ onto $\tilde{\mathbf{N}}_0^n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. In this way, we need the multi-dimensional non-linear information analysis for two-dimensional stochastic process ${}^t(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. The state of affairs is still more for the case where \mathbf{Y} is a multi-dimensional stochastic process.

Now the contents of this thesis are stated below.

We study the non-linear information analysis for the multi-dimensional stochastic processes with local time parameter((a)). Also we obtain the non-linear prediction formula, which is based upon the theory of KM_2O -Langevin equations for degenerate flows((b)).

We discuss two new causal relations, to be called *weak causality* and *non-instantaneous weak causality*, as applications of the multi-dimensional non-linear information analysis. Moreover, we give a quantitative characterization for each causal relation((c)).

It is theoretically possible for us to give a complete expression of the non-linear predictor and the non-linear causality by using the infinitely many non-linearity. However, we have to approximate the non-linear predictor and the non-linear causality by using a part of the non-linear information, because we cannot use the entire non-linear information in data analysis. For that purpose, we discuss the partial non-linear information space which bridges between theory and practice((d)).

It is preferable to select the best partial non-linearity according to certain criteria. We propose such a criteria by using the causal analysis. In order to express the relation between the causality and the partial non-linear information space, we define the concept of the non-linear causality of finite rank and discuss the relation between the causality and the partial non-linear information((e)). In addition, we propose a method of model selection by using the non-linear causality of finite rank and give a formula for calculating the non-linear predictor for each selected model((f)).

The part mentioned above is a theoretical result of this thesis. In the remaining part of this thesis, we first show a procedure of non-linear time series analysis based upon the theoretical results((g)).

Finally, as an example of time series analysis for concrete data, we deal with three kinds of data connected with ElNiño and find that the multi-dimensional information analysis is effective for the causal analysis and the prediction analysis based upon the causal analysis((h)).

目次

1. 序論	2
1.1. 非線形系に関する最近の進展について	2
1.2. 目的	3
1.3. KM-O-ランジュヴァン方程式について	3
1.4. 内容	4
2. KM-O-ランジュヴァン方程式論	6
2.1. 退化しない場合	6
2.2. 退化する場合	8
3. 多次元の局所時間域における非線形場の解析	13
3.1. 非線形場の概念	13
3.2. 局所時間域	16
3.3. 非線形場の構造	19
3.4. 局所時間域の非線形場の構造	20
3.5. 有限次元の非線形場の構造と局所時間域を用いた非線形場の解析	21
4. 非線形時系列の解析	25
4.1. 非線形時系列	25
4.2. Data(DF)と Time(DF)	25
4.3. データ列の非線形時系列性	26
4.4. 日本国産物とモデルの選択	27
4.5. モデルの選択と予測精度	28
4.6. データ列の非線形時系列性	28
謝辞	45
参考文献	46
付録	48
A. 非線形時系列の非線形性	48
B. 局所時間域の非線形性	49

目次

1. 序論	2
1.1. 非線形予測問題について	2
1.2. 目的	2
1.3. KM_2O -ランジュヴァン方程式論について	3
1.4. 内容	4
2. KM_2O -ランジュヴァン方程式論	6
2.1. 退化しない場合	6
2.2. 退化する場合	9
3. 多次元の局所時間域における非線形情報解析	13
3.1. 非線形情報空間	13
3.2. 非線形因果性	16
3.3. 非線形予測公式	19
3.4. 部分的非線形情報空間	20
3.5. 有限階数の非線形因果性と因果性を利用した予測解析 ...	23
4. 非線形時系列解析	26
4.1. Test(S)	26
4.2. Test(CS)とTest(CS)-2	27
4.3. データ間の非線形因果性	29
4.4. 見本因果値とモデル選択	31
4.5. モデル選択と予測公式	32
4.6. データ解析	33
謝辞	45
参考文献	46
付録	48
A. 非線形変換の具体例	48
B. 弱定常性テスト:Test(S)	50

第 1 章

序論

1.1. 非線形予測問題について

この節では、主に強定常過程に対する非線形予測問題について触れる。

非線形予測問題は長い歴史がある。有界で退化しない場合の 1 次元の強定常過程に対する非線形予測問題は Masani-Wiener([10]) によって理論的に解決を見た。しかし、[10] に述べられている通り、実際に予測子を計算するためのアルゴリズムが計算量の増大のために現実的に実現しづらいものであった。具体的には、[10] で用いられているアルゴリズムには Gram-Schmidt の直交化法が用いられていて、次元を増やすごとに計算量が増大してしまうことと、係数行列が次元が増すたびに変わってしまうことが問題であった。また、近似のために途中で計算を打ち切った場合においても、どの順番で非線形性を用いるかの方針が無いために信頼性にも問題があった。

これらの問題点を解消すべく、Okabe-Ootsuka([19]) によって、 KM_2O -ランジュヴァン方程式論の応用という形で、有界で退化しない場合の無限の時間域をもつ 1 次元の強定常過程に対して実現可能なアルゴリズムを伴った形で研究が行なわれた。この中では、[10] でも述べられていた、無限に非線形の情報を付け加えた無限次元の確率過程に対する線形予測子を求めるという考え方を、ある重み付けをもって導入された非線形の情報を持つ確率過程で表現している。この重み付けは、次数の大きい方が先に、また遅れの少ないものが先に選ばれるようになっている。ただ、この研究の中では元の確率過程に対する条件は [10] とは同じものであった。

私は修士論文において ([6]), [19] の拡張としての有界で退化しない場合の無限の時間域を持つ多次元の強定常過程に対する非線形予測問題について論じた。この中では、[19] の条件は同一であるが、多次元の非線形性を扱うための多重指数が定義され、多次元の非線形予測子が得られた。

上記で得られた結果をもとに、実データに対する非線形時系列解析が行なわれてきた。しかしながら、上記の理論的結果と実際の時系列解析には隔たりがあった。何故なら、理論は無限の時間域で論じられているのに対して、実際は局所的な時間域しか使えないからである。

Matsuura-Okabe([11]) によって、退化した場合と局所時間域な場合も含めた非線形予測問題が論じられた。この研究において、[10] 以来問題になっていた確率過程の有界性の条件がより弱められ、また非退化の条件が必要なくなった。また、局所時間域にすることにより理論がより実際の時系列解析に近づいたと言える。

1.2. 目的

現実の世界のデータは複雑に関係し合っており、1.1 節で述べた研究において行なわれてきた 1 次元の確率過程に対する非線形性では解析できない関係性があることがわかってきた。すなわち、新しい因果関係の方法とそれに不可欠な多次元の非線形性を取り込んだ情報解析の理論が必要であることがわかってきた。このことは単純に 1 次元から多次元の

拡張としての非線形性の解析としてではなく、本質的に多次元の非線形性の解析を必要とする。その理由について以下に述べる。

$\mathbf{X} = (X(n); 0 \leq n \leq N)$ を解析を行ないたい 1次元の確率過程, $\mathbf{Y} = (Y(n); 0 \leq n \leq N)$ を \mathbf{X} になんらかの意味で影響を与えていると考えられる別の 1次元の確率過程とし, 共に共通の確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) 上で定義されているものとする。さらに, $X(n), Y(n) (0 \leq n \leq N)$ は 2乗可積分とする。従来の方法でも, \mathbf{Y} から \mathbf{X} への因果関係を \mathbf{Y} の非線形性を用いて調べることが可能であった。この場合は次の量を見る:

$$P_{\mathbf{N}_0^n(\mathbf{Y})} X(n).$$

ここで, $\mathcal{B}_0^n(\mathbf{Y})$ は $Y(k) (0 \leq k \leq n)$ を可測にする最小の σ -加法族であり, $\mathbf{N}_0^n(\mathbf{Y})$ は $L^2(\Omega, \mathcal{B}_0^n(\mathbf{Y}), P)$ で与えられる。また $P_{\mathbf{N}_0^n(\mathbf{Y})}$ は $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ から $\mathbf{N}_0^n(\mathbf{Y})$ への射影作用素とする。ところが $\mathbf{N}_0^n(\mathbf{Y})$ は \mathbf{Y} のみの非線形性しか使っておらず, \mathbf{Y} の情報と \mathbf{X} の過去の情報の相互作用を含めた非線形性の解析を行なう場合は不十分である。その為に \mathbf{X} と \mathbf{Y} を組にした非線形情報空間が必要となる。すなわち, $\tilde{\mathbf{N}}_0^n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ を用いて次の量

$$P_{\tilde{\mathbf{N}}_0^n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})} X(n)$$

を見る必要がある。ここで, $\tilde{\mathcal{B}}_0^n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ は $X(m) (0 \leq m \leq n-1)$ と $Y(k) (0 \leq k \leq n)$ を可測にする最小の σ -加法族であり, $\tilde{\mathbf{N}}_0^n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ は $L^2(\Omega, \tilde{\mathcal{B}}_0^n(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), P)$ で与えられる。また $P_{\tilde{\mathbf{N}}_0^n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})}$ は $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ から $\tilde{\mathbf{N}}_0^n(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ への射影作用素とする。

このように, たとえ 1次元の確率過程の間でも, 相互作用を見る場合には多次元の非線形情報解析が必要不可欠である。もちろん \mathbf{Y} が多次元の場合ならばなおさらである。

本論文では, [11] の結果を多次元の場合に拡張することにより, 多次元の場合の退化した場合も含めた局所時間域の非線形情報解析について論じる。重要な点は [11] の内容を単に拡張しただけでなく, 上に述べたように, 1次元の場合には表現することができなかった確率過程間の相互作用が表現できる点にある。

1.3. KM_2O -ランジュヴァン方程式論について

本論文において, 全体を通して議論のベースとなっているのは KM_2O -ランジュヴァン方程式論である。そこでこの節では, KM_2O -ランジュヴァン方程式論に関して簡単に触れる。

KM_2O -ランジュヴァン方程式論について始めて論じられたのは [12] である。この後さまざまな形で発展してきた。この理論において重要なのは, 非平衡統計力学における揺動散逸定理の数学的研究を通して, 通常ノイズとしか扱われていなかったものを揺動項として捉え, その揺動項は散逸項と一定の関係を満たすことを見つけた点にある。これにより, 定常性という性質を確率過程が満たす方程式に結びつけたばかりでなく, 実際のデータ解析において, 与えられた時系列の定常性を定量的に検定することを可能にした。また, 与えられた方程式がデータ解析の際のアルゴリズムとなっている点も重要である。

また, この理論では前述の通り, データ解析を行なう際に, 与えられたデータの定常性をチェックすることができる。時系列解析では, 見本共分散関数を始めとして多くの量を時間パラメータをシフトして適用することを行なう。このためにはデータの背後にあると考えられる確率過程が弱定常性を満たさなければならない。他の時系列解析の理論の多くは, この性質を暗黙の内に仮定してしまう。ところがその場合, 解析結果が実際の現象と合わなくなってきた場合にどこにその原因があるのかわからないことが多く, また, 別のモデルや方程式等を立てて対処してしまいがちである。 KM_2O -ランジュヴァン方程式論では, 弱定常性をチェックすることによって解析結果に信頼性と客観性を持つことができる。この弱定常性に関する判定基準は, [21] における大規模な数値実験により改良が施された。

また, 時系列解析においては, データ間の因果関係を調べることも重要である。[16] において, KM_2O -ランジュヴァン方程式論を応用した因果解析の研究が行なわれた。この研究

において、データ間の非線形な因果性を調べる方法が提案された。また、この手法を応用して、時系列に対する決定性を検定する方法も提案された ([20])。

ところで、因果関係を調べる場合も、決定性を調べる場合も、その定義から望ましい非線形性を与えるのは確率過程が退化する場合である。しかしこの場合、理論的にも数値的にも計算を進めるために必要な行列の逆行列が計算不能となり、前出のアルゴリズムが使えなくなってしまう。この KM_2O -ランジュヴァン方程式論において、実験的にも理論的にも問題として残されていたことが [11] において解消された。

また上記の因果解析や決定解析で、与えられた時系列に対する非線形性を系統的な方法で利用できる点も重要である。

上記の研究で用いられてきた非線形性は、すべて 1次元の非線形性であった。本論文では、多次元の非線形情報空間の理論と、それを応用した時系列解析の方法を提案する。

1.4. 内容

この節では、本論文の内容について簡単に説明する。

本論文は、Y. Okabe and A. Kaneko, *On a non-linear prediction analysis for multi-dimensional stochastic processes with its applications to data analysis*(to appear in Hokkaido Math. J.) の 2 章から 8 章までの内容をもとに、 KM_2O -ランジュヴァン方程式論の新しい一部分としての多次元の非線形情報解析とその応用としての時系列解析の方法を示す目的の下にまとめたものである。

まず、第 2 章では KM_2O -ランジュヴァン方程式の理論について振り返る。この節では、非退化と退化の両方について KM_2O -ランジュヴァン行列の定義とその定常性との関係、また KM_2O -ランジュヴァン行列を計算するためのアルゴリズムについて説明する。

次に、第 3 章では、多次元の局所時間域における非線形情報解析について論じる。

3.1 節において、一般の多次元で局所時間域を持つ確率過程に対する非線形情報空間の定義を与える。さらに、その情報空間をパラメータ付けすることにより、応用に適した表現を与える。このパラメータは、その重み付けからより次数が低いものが早く、またより遅れの少ないものが早く使われるようになっている。

前節の非線形情報空間を用いて、3.2 節では非線形因果性について論じる。はじめに従来の線形因果性と非線形因果性について時間域を局所的にした定義を与える。さらに、前に述べたように、他の情報との相互作用を考慮した非線形因果性の定義を 2 つ与える。1 つは従来の因果性の定義の延長として、また 1 つは因果性の結果を予測に応用することも考慮した因果解析である。

さらに 3.1 節で論じられた非線形情報空間を用いて、3.3 節では、多次元の非線形予測子が理論的にどのように求まるかについて述べる。重要なことは、無限に多くの非線形情報を用いた非線形予測子が、非線形変換を行なって得られた多次元の線形予測子の極限として表現される点にある。

前節までで述べてきた非線形情報空間の解析は理論的には閉じている。しかしながら、実際に応用するという観点から考えた場合には不十分である。何故かと言うと、時系列解析に応用する場合は無限に多くの非線形情報を使うわけには行かず、部分的な情報で近似しなければいけないからである。3.4 節では、そのための理論と実際の橋渡しをするための部分的非線形情報空間の議論をする。また実際に部分的非線形空間を用いる場合に、 KM_2O -ランジュヴァン行列の計算アルゴリズムとの関連についても述べる。

3.4 節で述べられた部分的非線形情報空間を応用にさらに近いものとするために、3.5 節では、因果解析との関連について述べる。実際のデータ解析では、数ある部分的非線形情報の中から、なんらかの意味でよりよい近似を与えるものを選択しなければならない。そのために因果解析を用いる場合に、階数有限の因果性という概念を導入して、一般の場合の因果関係との関連について述べる。また、それぞれの因果関係の解析において、使用する部分

的非線形情報が決定された場合に、その情報を用いて予測子を計算するための予測公式を示す。

第4章では、第3章で得られた理論的な結果を、実際のデータ解析に応用するための議論をする。

4.1節では、与えられたデータの定常性を調べる方法 Test(S) について概観する。さらに詳しい内容は付録Bに述べた。

定常性のもとで、データ間の因果関係を調べる方法である Test(CS) を適用できる。4.2節ではこの方法について、既存の方法について述べ、新しい基準である Test(CS)-2 を提案する。

4.3節では、Test(CS)-2 を用いて、データ間の非線形因果性がどのように定義されるかについて述べる。ここでは、新しい因果性の定義である弱因果性および非瞬時的弱因果性の定義も与える。

因果関係を与える非線形性は、原因と結果を組にしたデータに対して何らかの非線形な関数関係を与えると考えられる。4.4節では、4.3節で議論された因果関係の結果を用いて、モデル選択がどのように行なわれるかを述べる。

ひとたびモデルが選択されれば、与えられた関数関係を用いて予測子を表現することが可能となる。4.5節では4.3節で選択されたモデルを用いて、非線形予測子がどのように計算されるかを示す。

最後の4.6節では、エルニーニョに関連したデータを用いて、あるデータを解析する場合に、他のデータの情報をを用いることの有効性について数値実験を通してその有効性を議論した。使用したデータは、赤道上の西経110度上に浮べられたブイによって観測された海水面温のデータ (SST)、南米リマの Callao 空港で観測された気温 (LIT) と気圧 (LIP) のデータの3つである。SST はエルニーニョに関連したデータであり、全世界の気候に影響を与えていると考えられている。具体的解析内容としては、因果解析の観点から見た SST から LIT, LIP への影響や、同じ地点で観測された LIT と LIP の間の相互作用について調べる。また、その因果解析の結果を元に予測を行ない、因果解析が与える情報の予測解析への有効性について検討する。

第 2 章

KM₂O-ランジュヴァン方程式論

d を自然数, l, r を整数 ($l \leq r$) とし, $\mathbf{Z} = (Z(n); l \leq n \leq r)$ を確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) 上で定義された d 次元の確率過程で, 各成分 $Z_j(n)$ ($l \leq n \leq r, 1 \leq j \leq d$) は 2 乗可積分とする. この節では, 退化しない場合と退化する場合の両方について, 確率過程に対する KM₂O-ランジュヴァン方程式論について概観する. ただし, ここで言う退化しないとは以下で定義される:

(2.1) 集合 $\{Z_j(n); 1 \leq j \leq d, l \leq n \leq r\}$ は $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の中で一次独立.

逆に言うと, 一次従属な場合は退化すると呼ぶ.

2.1. 退化しない場合

この節では, \mathbf{Z} は条件 (2.1) を満たすとする.

2.1.1. 揺動流

任意の整数 m, n ($l \leq n < m \leq r$) に対し, $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の部分空間 $\mathbf{M}_n^m(\mathbf{Z})$ を以下のように定義する:

$$(2.1.1) \quad \mathbf{M}_n^m(\mathbf{Z}) \equiv [Z_j(k); n \leq k \leq m, 1 \leq j \leq d].$$

ただし, 任意の $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の部分集合 S に対し, $[S]$ は S を含む最小の閉部分空間とする. \mathbf{Z} に対して, 以下の確率過程 $\nu_+(\mathbf{Z}) = (\nu_+(\mathbf{Z})(m); 0 \leq m \leq r-l)$ と $\nu_-(\mathbf{Z}) = (\nu_-(\mathbf{Z})(k); -(r-l) \leq k \leq 0)$ を定義する:

$$(2.1.2a) \quad \begin{cases} \nu_+(\mathbf{Z})(0) \equiv Z(l) \\ \nu_+(\mathbf{Z})(n) \equiv Z(l+n) - P_{\mathbf{M}_l^{l+n-1}(\mathbf{Z})} Z(l+n) \quad (1 \leq n \leq r-l) \end{cases}$$

$$(2.1.2b) \quad \begin{cases} \nu_-(\mathbf{Z})(0) \equiv Z(r) \\ \nu_-(\mathbf{Z})(-n) \equiv Z(r-n) - P_{\mathbf{M}_{r-(n-1)}^r(\mathbf{Z})} Z(r-n) \quad (1 \leq n \leq r-l). \end{cases}$$

$\nu_+(\mathbf{Z}), \nu_-(\mathbf{Z})$ をそれぞれ前向きおよび後向きの KM₂O-ランジュヴァン揺動流と呼ぶ. また, 次の前向きおよび後向きの KM₂O-ランジュヴァン揺動行列が定義される:

$$(2.1.3a) \quad V_+(\mathbf{Z})(n) \equiv E(\nu_+(\mathbf{Z})(n) {}^t \nu_+(\mathbf{Z})(n)) \quad (0 \leq n \leq r-l)$$

$$(2.1.3b) \quad V_-(\mathbf{Z})(n) \equiv E(\nu_-(\mathbf{Z})(-n) {}^t \nu_-(\mathbf{Z})(-n)) \quad (0 \leq n \leq r-l).$$

ここで定義された揺動流は時系列解析における定常性の検定において重要な役割を果たす ([18],[21]).

2.1.2. KM_2O -ランジュヴァン行列

\mathbf{Z} は退化しない確率過程だったので, (2.1.2a) および (2.1.2b) における射影の部分の係数は一意に決まる. それらを $\gamma_+(\mathbf{Z})(n, k)$, $\gamma_-(\mathbf{Z})(n, k)$ ($0 \leq k \leq n$) と書く. すなわち

$$(2.1.4a) \quad P_{M_l^{l+n-1}(\mathbf{Z})} Z(l+n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(\mathbf{Z})(n, k) Z(l+k) \quad (1 \leq n \leq r-l)$$

$$(2.1.4b) \quad P_{M_{r-(n-1)}^r(\mathbf{Z})} Z(r-n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-(\mathbf{Z})(n, k) Z(r-k) \quad (1 \leq n \leq r-l).$$

$\gamma_+(\mathbf{Z})(n, k)$, $\gamma_-(\mathbf{Z})(n, k)$ をそれぞれ前向きおよび後向きの KM_2O -ランジュヴァン散逸行列と呼ぶ. とくに, $\gamma_+(\mathbf{Z})(n, 0)$, $\gamma_-(\mathbf{Z})(n, 0)$ ($1 \leq n \leq r-l$) を

$$(2.1.5) \quad \begin{cases} \delta_+(\mathbf{Z})(n) \equiv \gamma_+(\mathbf{Z})(n, 0) \\ \delta_-(\mathbf{Z})(n) \equiv \gamma_-(\mathbf{Z})(n, 0) \end{cases}$$

と書き, それぞれ前向きおよび後向きの KM_2O -ランジュヴァン偏相関行列と呼ぶ.

$\gamma_{\pm}(\mathbf{Z})(\cdot, \star)$, $\delta_{\pm}(\mathbf{Z})(\cdot)$, $V_{\pm}(\mathbf{Z})(\cdot)$ をまとめて, 確率過程 \mathbf{Z} に付随する KM_2O -ランジュヴァン行列と呼び, $\mathcal{LM}(\mathbf{Z})$ と書く:

$$(2.1.6) \quad \mathcal{LM}(\mathbf{Z}) \equiv \{ \gamma_{\pm}(\mathbf{Z})(n, k), \delta_{\pm}(\mathbf{Z})(n), V_{\pm}(\mathbf{Z})(m); 0 \leq k < n \leq r-l, 0 \leq m \leq r-l \}.$$

またこれらを用いて \mathbf{Z} を表現した式

$$(2.1.7a) \quad Z(l+n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(\mathbf{Z})(n, k) Z(l+k) + \nu_+(\mathbf{Z})(n)$$

$$(2.1.7b) \quad Z(r-n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-(\mathbf{Z})(n, k) Z(r-k) + \nu_-(\mathbf{Z})(n)$$

をそれぞれ前向きおよび後向きの KM_2O -ランジュヴァン方程式と呼ぶ.

2.1.3. 弱定常性との関係

確率過程 \mathbf{Z} が弱定常性を満たすとは, ある $d \times d$ の行列関数 $R(k)$ ($0 \leq |k| \leq r-l$) が存在して

$$(2.1.8) \quad E(Z(n)^t Z(m)) = R(n-m) \quad (l \leq n, m \leq r)$$

を満たす時を言う. 式 (2.1.8) を満たす関数 R を \mathbf{Z} の共分散行列関数と呼ぶ.

まず, 次の定理を示す.

定理 2.1.1 ([12]) \mathbf{Z} は弱定常性を満たすとする. この時, 各 m ($1 \leq m \leq N$), n, k ($1 \leq k < n \leq N$) に対して次が成立する:

$$(2.1.9a) \quad \gamma_{\pm}(\mathbf{Z})(m, 0) = \delta_{\pm}(\mathbf{Z})(m) \quad (\text{複号同順});$$

$$(2.1.9b) \quad \gamma_{\pm}(\mathbf{Z})(n, k) = \gamma_{\pm}(\mathbf{Z})(n-1, k-1) + \delta_{\pm}(\mathbf{Z})(n) \gamma_{\mp}(\mathbf{Z})(n-1, n-k-1) \quad (\text{複号同順});$$

$$(2.1.10a) \quad V_+(\mathbf{Z})(0) = V_-(\mathbf{Z})(0);$$

$$(2.1.10b) \quad V_{\pm}(\mathbf{Z})(m) = (I - \delta_{\pm}(\mathbf{Z})(m)\delta_{\mp}(\mathbf{Z})(m))V_{\pm}(\mathbf{Z})(m-1);$$

$$(2.1.10c) \quad V_{+}(\mathbf{Z})(m-1)^t \delta_{-}(\mathbf{Z})(m) = \delta_{+}(\mathbf{Z})(m)V_{-}(m-1);$$

この定理で示される (2.1.9) と (2.1.10) をそれぞれ DDT(Dissipation-Dissipation Theorem; 散逸散逸定理), FDT(Fluctuation-Dissipation Theorem; 揺動散逸定理) と呼ぶ.

さらに \mathbf{Z} の定常性を特徴付ける次の定理が重要である:

定理 2.1.2 ([13]) 確率過程 \mathbf{Z} から計算された量 $\mathcal{LM}(\mathbf{Z})$ が (2.1.9) と (2.1.10) を満たせば, \mathbf{Z} は弱定常性をもつ.

また, \mathbf{Z} が退化しないことから, 次の定理が得られる:

定理 2.1.3 ([12]) 任意の n ($0 \leq n \leq r-l-1$) に対して, $V_{\pm}(\mathbf{Z})(n)$ は正則行列である¹.

2.1.4. アルゴリズム

この節では \mathbf{Z} は弱定常性を満たすとする. アルゴリズムを示すために, 任意の n ($0 \leq n \leq r-l$) に対して KM_2O -ランジュヴァン行列の部分系 $\mathcal{LM}(\mathbf{Z}; n)$ を次で定義する:

(2.1.11)

$$\mathcal{LM}(\mathbf{Z}; n) \equiv \{\gamma_{\pm}(\mathbf{Z})(m, k), \delta_{\pm}(\mathbf{Z})(m), V_{\pm}(\mathbf{Z})(m); 0 \leq k < m \leq n, 0 \leq m' \leq n\}.$$

まず, 次の定理を示す.

定理 2.1.4 任意の自然数 n ($1 \leq n \leq N-1$) に対して,

$$(i) \quad \delta_{\pm}(\mathbf{Z})(1) = -R(\pm 1)V_{\mp}(\mathbf{Z})(0)^{-1}$$

$$(ii) \quad \delta_{\pm}(\mathbf{Z})(n+1) = -(R(\pm(n+1)) + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{+}(\mathbf{Z})(n, k)R(k+1))V_{\mp}(\mathbf{Z})(n)^{-1}.$$

この定理が意味することは, 時点 $n+1$ の $\delta_{\pm}(\mathbf{Z})(n+1)$ を知るためには, 時点 $n+1$ までの $R(\cdot)$ と n 時点までの KM_2O -ランジュヴァン行列 $\mathcal{LM}(\mathbf{Z}; n)$ があれば良いということである.

上記定理と 2.1.3 節の DDT, FDT を組みあわせることによって, \mathbf{Z} の $\mathcal{LM}(\mathbf{Z})$ を計算するアルゴリズムが次のように求まる (以下の式は全て複号同順とする):

[第 1 段 (初期値)] それぞれ $V_{\pm}(\mathbf{Z})(0)$, $\delta_{\pm}(\mathbf{Z})(1)$, $\gamma_{\pm}(\mathbf{Z})(1, 0)$, $V_{\pm}(\mathbf{Z})(1)$ が次のように求まる:

$$V_{\pm}(\mathbf{Z})(0) = R(0);$$

$$\delta_{\pm}(\mathbf{Z})(1) = -R(\pm 1)V_{\mp}(0)^{-1};$$

$$\gamma_{\pm}(\mathbf{Z})(1, 0) = \delta_{\pm}(\mathbf{Z})(1);$$

$$V_{\pm}(\mathbf{Z})(1) = (I - \delta_{\pm}(\mathbf{Z})(1)\delta_{\mp}(\mathbf{Z}))V_{\pm}(\mathbf{Z})(0).$$

[第 2 段] ある n ($1 \leq n \leq r-l$) に対して, $\gamma_{\pm}(\mathbf{Z})(m, k)$, $\delta_{\pm}(\mathbf{Z})(m)$, $V_{\pm}(\mathbf{Z})(n')$ ($0 \leq k < m \leq n, 0 \leq n' \leq n$) が求まったとする. この時, 定理 2.1.4 により, $\delta_{\pm}(n+1)$ が求まる:

$$\delta_{\pm}(\mathbf{Z})(n+1) = -(R(\pm(n+1)) + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{+}(\mathbf{Z})(n, k)R(k+1))V_{\mp}(\mathbf{Z})(n)^{-1}.$$

¹正確には正定値行列となる ([12])

[第3段] 第2段で求めた $\delta_{\pm}(\mathbf{Z})(n+1)$ を用いて, DDT と FDT により, $\gamma_{\pm}(\mathbf{Z})(n+1, k) (0 \leq k \leq n)$ と $V_{\pm}(\mathbf{Z})(n+1)$ が求まる:

$$\gamma_{\pm}(\mathbf{Z})(n+1, 0) = \delta_{\pm}(\mathbf{Z})(n+1);$$

$$\gamma_{\pm}(\mathbf{Z})(n+1, k) = \gamma_{\pm}(\mathbf{Z})(n, k-1) + \delta_{\pm}(\mathbf{Z})(n+1)\gamma_{\mp}(\mathbf{Z})(n, n-k);$$

$$V_{\pm}(\mathbf{Z})(n+1) = (I - \delta_{\pm}(\mathbf{Z})(n+1)\delta_{\mp}(n+1))V_{\pm}(\mathbf{Z})(n).$$

以下, 第2段と第3段を順次適用することによって, \mathbf{Z} の $\mathcal{LM}(\mathbf{Z})$ が求まる.

2.1.5. 構成定理

R を $\{-N, -N+1, \dots, N-1, N+1\}$ 上で定義された $d \times d$ 行列に値をとる関数で, 次の性質を満たすものとする:

$$(2.1.13) \quad R(-n) = {}^t R(n) \quad (0 \leq n \leq N).$$

さらに, 各 $n (1 \leq n \leq N+1)$ に対して, 次で定義されるブロック行列

$$(2.1.14) \quad T_{\pm}(n) \equiv \begin{pmatrix} R(0) & R(\pm 1) & \cdots & R(\pm(n-1)) \\ R(\mp 1) & R(0) & \cdots & R(\pm(n-2)) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R(\mp(n-1)) & R(\mp(n-2)) & \cdots & R(0) \end{pmatrix}$$

は, 以下を満たすとする:

$$(2.1.15) \quad \begin{cases} (T_{\pm}(n)\xi, \xi) \leq 0 & (\forall \xi \in \mathbb{R}^{nd}, 1 \leq n \leq N+1) \\ T_{\pm}(n) \text{ は正則行列.} \end{cases}$$

2.1.4 節で述べられたアルゴリズムに従って, R から KM_2O -ランジュヴァン行列 $\mathcal{LM}(R)$ が定義される:

$$(2.1.16) \quad \mathcal{LM}(R) \equiv \{\gamma_{\pm}(R)(n, k), \delta_{\pm}(R)(n), V_{\pm}(R)(m); 0 \leq k < n \leq N, 0 \leq m \leq N\}.$$

R とは別に与えられた, d 次元の確率過程 $\mathbf{Z} = (Z(n); 0 \leq n \leq N)$ あるとする. 今, $\mathcal{LM}(R)$ と \mathbf{Z} を用いて確率過程 $\nu = (\nu(n); 0 \leq n \leq N)$ を次のように定義する:

$$(2.1.17) \quad \begin{cases} \nu(0) = Z(0) & (n=0) \\ \nu(n) = Z(n) + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{+}(n, k)Z(k) & (1 \leq n \leq N). \end{cases}$$

弱定常性の検定に関係して, 次の定理が重要である.

定理 2.1.5 ([13]) \mathbf{Z} が弱定常性を満たすための必要十分条件は次で与えられる:

$$E(\nu_{\pm}(m) {}^t \nu_{\pm}(n)) = \delta_{mn} V_{\pm}(R)(n) \quad (0 \leq m, n \leq r-l) \quad (\text{複合同順}).$$

2.2. 退化する場合 ([11])

この節では, \mathbf{Z} は条件 (2.1) を満たさない, すなわち \mathbf{Z} は退化しているとする.

2.2.1. 揺動流

退化した場合の \mathbf{Z} に対しても, 退化していない場合と同様に前向きおよび後ろ向きの KM_2O -ランジュヴァン揺動流 $\nu_+(\mathbf{Z}), \nu_-(\mathbf{Z})$ および KM_2O -ランジュヴァン揺動行列 $V_+(\mathbf{Z})(n), V_-(\mathbf{Z})(n)$ ($0 \leq n \leq r-l$) が定義される:

$$(2.2.1a) \quad \begin{cases} \nu_+(\mathbf{Z})(0) \equiv Z(l) \\ \nu_+(\mathbf{Z})(n) \equiv Z(l+n) - P_{\mathbf{M}_l^{l+n-1}(\mathbf{Z})} Z(l+n) \quad (1 \leq n \leq r-l) \end{cases}$$

$$(2.2.1b) \quad \begin{cases} \nu_-(\mathbf{Z})(0) \equiv Z(r) \\ \nu_-(\mathbf{Z})(-n) \equiv Z(r-n) - P_{\mathbf{M}_{r-(n-1)}^r(\mathbf{Z})} Z(r-n) \quad (1 \leq n \leq r-l) \end{cases}$$

$$(2.2.1c) \quad V_+(\mathbf{Z})(n) \equiv E(\nu_+(\mathbf{Z})(n) {}^t \nu_+(\mathbf{Z})(n)) \quad (0 \leq n \leq r-l)$$

$$(2.2.1d) \quad V_-(\mathbf{Z})(n) \equiv E(\nu_-(\mathbf{Z})(-n) {}^t \nu_-(\mathbf{Z})(-n)) \quad (0 \leq n \leq r-l).$$

2.2.2. 添加ノイズ流

$\xi = (\xi(n); 0 \leq n \leq r-l)$ を \mathbf{Z} と同じ確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) 上で定義された d 次元の確率過程で, 以下を満たすものとする:

$$(2.2.2a) \quad \xi \text{ は退化しない};$$

$$(2.2.2b) \quad E(Z(m) {}^t \xi(n)) = 0 \quad (0 \leq m, n \leq N).$$

任意の正の実数 w に対して, (Ω, \mathcal{B}, P) 上で定義された d 次元の確率過程 $\mathbf{Z}^w = (Z^w(n); l \leq n \leq r)$ を次のように定義する:

$$(2.2.3) \quad Z^w(n) \equiv Z(n) + w\xi(n-l).$$

\mathbf{Z}^w を \mathbf{Z} のウェイト w のウェイト変換, ξ を添加ノイズ過程と呼ぶ. 定義より次が従う.

補題 2.2.1 ([11]) \mathbf{Z}^w は退化しない.

補題 2.2.1 より, 2.1節と同様にして \mathbf{Z}^w に対する KM_2O -ランジュヴァン行列 $\mathcal{LM}(\mathbf{Z}^w)$ が得られる:

$$(2.2.4) \quad \mathcal{LM}(\mathbf{Z}^w) = \{\gamma_{\pm}(\mathbf{Z}^w)(n, k), \delta_{\pm}(\mathbf{Z}^w)(n), V_{\pm}(\mathbf{Z}^w)(m); 0 \leq k < n \leq r-l, 0 \leq m \leq r-l\}.$$

2.2.3. KM_2O -ランジュヴァン行列

2.2.2節と同様に w を正の実数, $\xi = (\xi(n); 0 \leq n \leq r-l)$ を添加ノイズ流とする. また $\mathbf{Z}^w = (Z^w(n); l \leq n \leq r)$ をウェイト w のウェイト変換とする.

この節では, \mathbf{Z}^w と \mathbf{Z} 間の関係式について見て行く. また以下では, ξ は以下を満たすとする:

$$(2.2.5) \quad (\xi(m) {}^t \xi(n)) = \delta_{mn} I \quad (0 \leq m, n \leq r-l).$$

ただし, δ_{mn} は

$$(2.2.6) \quad \delta_{mn} \equiv \begin{cases} 0 & (m = n) \\ 1 & (m \neq n) \end{cases}$$

で定義され, I は $d \times d$ の単位行列とする.

KM_2O -ランジュヴァン揺動行列に関して以下が成り立つ.

定理 2.2.1 ([11])

$$\begin{cases} \lim_{w \rightarrow 0} V_+(\mathbf{Z}^w)(n) = V_+(\mathbf{Z})(n) & (0 \leq n \leq r-l) \\ \lim_{w \rightarrow 0} V_-(\mathbf{Z}^w)(-n) = V_-(\mathbf{Z})(-n) & (0 \leq n \leq r-l). \end{cases}$$

仮定より \mathbf{Z} は退化しているので, 各 n に対して KM_2O -ランジュヴァン方程式で表現した式

$$(2.2.7a) \quad Z(l+n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(\mathbf{Z})(n, k) Z(l+k) + \nu_+(\mathbf{Z})(n)$$

$$(2.2.7b) \quad Z(r-n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-(\mathbf{Z})(n, k) Z(r-k) + \nu_-(\mathbf{Z})(n)$$

において, KM_2O -ランジュヴァン散逸行列 $\gamma_{\pm}(\mathbf{Z})(n, k)$ ($0 \leq k < n \leq r-l$) は一意には定まらない. しかし, 次の定理が成り立つ.

定理 2.2.2 ([11])

- (i) 各 n, k ($0 \leq k < n \leq r-l$) に対して $\gamma_+^0(n, k)$ と $\gamma_-^0(n, k)$ が一意に存在して次を満たす:

$$\begin{cases} \lim_{w \rightarrow 0} \gamma_+(\mathbf{Z}^w)(n, k) = \gamma_+^0(\mathbf{Z})(n, k) \\ \lim_{w \rightarrow 0} \gamma_-(\mathbf{Z}^w)(n, k) = \gamma_-^0(\mathbf{Z})(n, k). \end{cases}$$

- (ii) $\gamma_{\pm}^0(n, k)$ ($0 \leq k < n \leq r-l$) は KM_2O -ランジュヴァン方程式を満たす. すなわち, 各 n に対して

$$Z(l+n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+^0(\mathbf{Z})(n, k) Z(l+k) + \nu_+(\mathbf{Z})(n);$$

$$Z(r-n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-^0(\mathbf{Z})(n, k) Z(r-k) + \nu_-(\mathbf{Z})(-n).$$

この定理で重要なのは, ξ の取り方によらず $\gamma_{\pm}^0(n, k)$ ($0 \leq k < n \leq r-l$) が一意に定まるという点にある. 退化した場合の KM_2O -ランジュヴァン偏相関行列 $\delta_{\pm}^0(\mathbf{Z})(n)$ ($1 \leq n \leq r-l$) を次で定義する:

$$(2.2.9) \quad \begin{cases} \delta_+^0(\mathbf{Z})(n) = \gamma_+(\mathbf{Z})(n, 0) \\ \delta_-^0(\mathbf{Z})(n) = \gamma_-(\mathbf{Z})(n, 0). \end{cases}$$

以上より, 退化した場合の KM_2O -ランジュヴァン行列 $\mathcal{LM}(\mathbf{Z})$ を以下で定義する:

(2.2.10)

$$\mathcal{LM}(\mathbf{Z}) \equiv \{ \gamma_{\pm}^0(\mathbf{Z})(n, k), \delta_{\pm}^0(\mathbf{Z})(n), V_{\pm}(\mathbf{Z})(m); 0 \leq k < n \leq r-l, 0 \leq m \leq r-l \}.$$

2.2.4. 弱定常性との関係

2.2.2 節と同様に w を正の実数, $\xi = (\xi(n); 0 \leq n \leq r-l)$ を添加ノイズ流とする. また, $\mathbf{Z}^w = (Z^w(n); l \leq n \leq r)$ をウェイト w のウェイト変換とする.

まず次の定理を示す.

定理 2.2.3 ([11]) 次は互いに同値である:

- (i) \mathbf{Z} は弱定常性を満たす;
- (ii) ある正の実数 w に対し \mathbf{Z}^w は弱定常性を満たす;
- (iii) 任意の正の実数 w に対し \mathbf{Z}^w は弱定常性を満たす.

\mathbf{Z}^w に対して定理 2.1.1 を適用した結果と定理 2.2.2 によって次がわかる.

定理 2.2.4 ([11]) \mathbf{Z} と ξ は弱定常性を満たすとし, $\gamma_{\pm}(n, k)$ ($0 \leq k < n \leq r-l$) を定理 2.2.2 で得られるものとする. この時, 各 m ($1 \leq m \leq N$), n, k ($1 \leq k < n \leq N$) に対して次が成立する:

$$\gamma_{\pm}^0(\mathbf{Z})(m, 0) = \delta_{\pm}^0(\mathbf{Z})(m) \quad (\text{複号同順});$$

$$\gamma_{\pm}^0(\mathbf{Z})(n, k) = \gamma_{\pm}^0(\mathbf{Z})(n-1, k-1) + \delta_{\pm}^0(\mathbf{Z})(n)\gamma_{\mp}^0(\mathbf{Z})(n-1, n-k-1) \quad (\text{複号同順});$$

$$V_+(\mathbf{Z})(0) = V_-(\mathbf{Z})(0);$$

$$V_{\pm}(\mathbf{Z})(m) = (I - \delta_{\pm}^0(\mathbf{Z})(m)\delta_{\mp}^0(\mathbf{Z})(m))V_{\pm}(\mathbf{Z})(m-1);$$

$$V_+(\mathbf{Z})(m-1)^t \delta_-^0(\mathbf{Z})(m) = \delta_+^0(\mathbf{Z})(m)V_-(m-1).$$

よって, 退化した確率過程 \mathbf{Z} に対しても, この定理の意味において散逸散逸定理と揺動散逸定理が成立する.

2.2.5. アルゴリズム

2.2.2 節と同様に w を正の実数, $\xi = (\xi(n); 0 \leq n \leq r-l)$ を添加ノイズ流とする. また, $\mathbf{Z}^w = (Z^w(n); l \leq n \leq r)$ をウェイト w のウェイト変換とする.

2.2.4 節において, 退化した確率過程 \mathbf{Z} に対しても揺動散逸定理と揺動揺動定理が成立することを見た.

2.1.4 節と同様の議論によって, KM_2O -ランジュヴァン行列 $\mathcal{LM}(\mathbf{Z})$ を計算するためには $\delta_{\pm}^0(\mathbf{Z})(n)$ が必要であることがわかる. よって, \mathbf{Z}^w に対する KM_2O -ランジュヴァン偏相関行列 $\delta_{\pm}^0(\mathbf{Z}^w)(n)$ ($1 \leq n \leq r-l$) が計算できることを示すと良い.

ウェイト変換 \mathbf{Z}^w は退化していないので, 2.1.4 節の方法によって \mathbf{Z}^w の見本共分散行列関数 $R(\mathbf{Z}^w)(\cdot)$ を用いて $\delta_{\pm}^0(\mathbf{Z}^w)(n)$ ($1 \leq n \leq r-l$) は求まる:

(2.2.13)

$$\delta_{\pm}^0(\mathbf{Z}^w)(n+1) = -(R(\mathbf{Z}^w)(\pm(n+1))) + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{\mp}(\mathbf{Z}^w)(n, k)R(\mathbf{Z}^w)(k+1)V_{\mp}(\mathbf{Z}^w)(n)^{-1}.$$

一方, 定理 2.2.2 によって, 各 n ($0 \leq n \leq r-l-1$) に対して

$$(2.2.14) \quad \begin{cases} \lim_{w \rightarrow 0} \delta_+(\mathbf{Z}^w)(n+1, k) = \delta_+^0(\mathbf{Z})(n+1, k) \\ \lim_{w \rightarrow 0} \delta_-(\mathbf{Z}^w)(n+1, k) = \delta_-^0(\mathbf{Z})(n+1, k) \end{cases}$$

が成立する. この (2.2.14) と, 定理 2.2.4 によって, 退化した確率過程 \mathbf{Z} に対する KM_2O -ランジュヴァン行列を求めるアルゴリズムを得たことになる.

第 3 章

多次元の局所時間域における 非線形情報解析

この章では、多次元の非線形情報解析を軸とした議論を展開する。

まず始めに非線形情報空間について議論し、それを生成する入れ子式の確率過程について述べる。

次に非線形因果性について議論する。多次元の非線形性を用いなければ定義できない新しい因果性の概念についても述べる。

さらに、多次元の非線形情報解析の応用として、多次元の非線形予測子を理論的に求める。最後に時系列解析に対して応用することを考慮した、部分的非線形情報空間の定義を与える。また、部分的非線形情報空間を利用した有限階数の非線形因果性と、非線形因果性を用いた非線形予測子についても述べる。

3.1. 非線形情報空間

この節では、[11]において得られた結果を多次元の確率過程の場合に一般化する。

3.1.1. 局所非線形情報空間

d を自然数とし、 $\mathbf{Z} = (Z(n); l \leq n \leq r)$ を確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) で定義された \mathbb{R}^d に値をとる確率過程で以下の条件 (E), (M) を満たすものとする:

(E) 任意の n ($l \leq n \leq r$) に対して、ある正の数 $\lambda_0(n)$ が存在して、任意の j ($1 \leq j \leq d$) と任意の実数 λ ($|\lambda| \leq \lambda_0(n)$) に対して

$$E(\exp \{\lambda Z_j(n)\}) < \infty$$

(M) $E(Z_j(n)) = 0$ ($l \leq n \leq r, 1 \leq j \leq d$).

任意の n_1, n_2 ($l \leq n_1 \leq n_2 \leq r$) に対し、 $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の中の閉部分空間 $\mathbf{M}_{n_1}^{n_2}(\mathbf{Z})$ と $\mathbf{N}_{n_1}^{n_2}(\mathbf{Z})$ を次のように定義する:

$$(3.1.1) \quad \mathbf{M}_{n_1}^{n_2}(\mathbf{Z}) \equiv \{Z_j(m); n_1 \leq m \leq n_2, 1 \leq j \leq d\}$$

$$(3.1.2) \quad \mathbf{N}_{n_1}^{n_2}(\mathbf{Z}) \equiv \{Y \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P); Y \text{ は } \mathcal{B}_{n_1}^{n_2}(\mathbf{Z})\text{-可測}\}.$$

ここで、 $\mathcal{B}_{n_1}^{n_2}(\mathbf{Z})$ は $Z_j(k)$ ($n_1 \leq k \leq n_2, 1 \leq j \leq d$) で生成される最小の σ -加法族とする。これらの空間 $\mathbf{M}_{n_1}^{n_2}(\mathbf{Z})$, $\mathbf{N}_{n_1}^{n_2}(\mathbf{Z})$ をそれぞれ線形情報空間、非線形情報空間と呼ぶ。

[3] に示されていることより、条件 (E) から次が従う。

補題 3.1.1

- (i) 各 n, j ($l \leq n \leq r, 1 \leq j \leq d$) に対し、 $Z_j(n) \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p(\Omega, \mathcal{B}, P)$.
- (ii) 任意の自然数 n, p_k, j_k ($l \leq n \leq r, p_k \in \mathbf{N}^*, 1 \leq j_k \leq d, l \leq k \leq n$) に対し、

$$Z_{j_1}(l)^{p_1} Z_{j_2}(l+1)^{p_2} \cdots Z_{j_n}(n)^{p_n} \in \mathbf{N}_l^n(\mathbf{Z}).$$

各 n ($l \leq n \leq r$) に対し, $\mathbf{N}_l^n(\mathbf{Z})$ の部分集合 $\mathbf{F}_l^n(\mathbf{Z})$ を次で定義する:

(3.1.3)

$$\mathbf{F}_l^n(\mathbf{Z}) \equiv \left\{ \prod_{k=0}^{n-l} \prod_{j=1}^d Z_j(n-k)^{p_{k,j}} - E \left(\prod_{k=0}^{n-l} \prod_{j=1}^d Z_j(n-k)^{p_{k,j}} \right); p_{k,j} \in \mathbf{N}^*, \sum_{j=1}^d p_{0,j} > 0 \right\}.$$

条件 (E) を用いると, [11] の定理 8.1 と同様にして, [3] の命題 2.1 を確率変数の族 $\{Z_j(n); l \leq n \leq r, 1 \leq j \leq d\}$ に適用することにより次の定理を得る.

定理 3.1.1

$$\mathbf{N}_l^n(\mathbf{Z}) = \left[\{1\} \right] \oplus \left[\bigcup_{m=l}^n \mathbf{F}_l^m(\mathbf{Z}) \right] \quad (l \leq n \leq r).$$

3.1.2. 非線形情報空間の生成系

この節では, 多次元の確率過程に対する非線形情報空間の生成系を構成する.

3.1.2.1. パラメータ. まず, 集合 $\bigcup_{m=l}^r \mathbf{F}_l^m(\mathbf{Z})$ をパラメータ付けすることを考える. 集合 \mathbf{M} を次のように定義する:

$$(3.1.4) \quad \mathbf{M} \equiv (\mathbf{N}^*)^d = \left\{ \mathbf{p} = {}^t(p_1, p_2, \dots, p_d); p_j \in \mathbf{N}^* (1 \leq j \leq d) \right\}.$$

この \mathbf{M} を用いて集合 \mathbf{M}^{r-l+1} の部分集合 Λ_{loc} を次のように定義する:

$$(3.1.5) \quad \Lambda_{loc} \equiv \{ \mathbf{p} = (\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{r-l}) \in \mathbf{M}^{r-l+1}; |\mathbf{p}_0| \geq 1 \}.$$

ただし, \mathbf{M} の要素 $\mathbf{p} = {}^t(p_1, p_2, \dots, p_d)$ に対し, \mathbf{p} の長さを次で定義する:

$$(3.1.6) \quad |\mathbf{p}| \equiv \sum_{j=1}^d p_j.$$

さらに, 簡単のために次の記法を用いる. 任意の \mathbb{R}^d のベクトル $\mathbf{v} = {}^t(v_1, v_2, \dots, v_d)$ と $(\mathbf{N}^*)^d$ の要素 $\boldsymbol{\alpha} = {}^t(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ に対して, 実数 \mathbf{v}^α を

$$(3.1.7) \quad \mathbf{v}^\alpha \equiv \prod_{j=1}^d v_j^{\alpha_j}$$

で定義する.

上記の定義を用いて, Λ_{loc} の各元 $\mathbf{p} = {}^t(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{r-l})$ に対し 1次元の確率過程 $\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{Z}) = (\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{Z})(n); l + \sigma(\mathbf{p}) \leq n \leq r)$ を定義する:

$$(3.1.8) \quad \varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{Z})(n) \equiv \prod_{k=0}^{\sigma(\mathbf{p})} Z(n-k)^{\mathbf{p}_k} \quad (l + \sigma(\mathbf{p}) \leq n \leq r).$$

ただし

$$(3.1.9) \quad \sigma(\mathbf{p}) \equiv \max \{ k \in \{0, 1, \dots, r-l\}; |\mathbf{p}_k| > 0 \}.$$

また, これら確率過程全体を G_{loc} とおく:

$$(3.1.10) \quad G_{loc}(\mathbf{Z}) \equiv \{ \varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{Z}); \mathbf{p} \in \Lambda_{loc} \}.$$

定義からただちに次が成立する:

$$(3.1.11) \quad \mathbf{F}_l^n(\mathbf{Z}) = \bigcup_{\mathbf{p} \in \Lambda_{loc}} \left\{ \varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{Z})(n) - E(\{\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{Z})(n)\}); l + \sigma(\mathbf{p}) \leq n \leq r \right\}.$$

非線形情報空間 $\mathbf{N}_l^r(\mathbf{Z})$ をクラス分けすることを考える. 各自然数 q に対して, Λ_{loc} の部分集合 $\Lambda_{loc}(q)$ と $G_{loc}(\mathbf{Z})$ の部分集合 $G_{loc}(\mathbf{Z})(q)$ を次のように定義する:

$$(3.1.12) \quad \Lambda_{loc}(q) \equiv \left\{ \mathbf{p} \in \Lambda_{loc}; \sum_{k=0}^{r-l} (k+1)|\mathbf{p}_k| = q \right\}$$

$$(3.1.13) \quad G_{loc}(\mathbf{Z})(q) \equiv \left\{ \varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{Z}); \mathbf{p} \in \Lambda_{loc}(q) \right\}.$$

定義から次が成立する:

$$(3.1.14) \quad G_{loc}(\mathbf{Z}) = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} G_{loc}(\mathbf{Z})(q) \quad (\text{直和}).$$

3.1.2.2. 辞書式順序. この節では, Λ_{loc} の元に辞書式順序を入れることを考える. 任意の Λ_{loc} の元 \mathbf{p}, \mathbf{p}' をとる. ある自然数 q, q' があって, $|\mathbf{p}| = q, |\mathbf{p}'| = q'$ を満たす. このとき, 次の条件 (i) または (ii) が成立するとき, \mathbf{p} が \mathbf{p}' に先行すると言う:

(i) $q < q'$

(ii) $q = q'$ かつ \mathbf{p}_{k_0} の j_0 成分が \mathbf{p}'_{k_0} の j_0 成分より大.

ただし, k_0, j_0 は次で定義される:

$$(3.1.15) \quad k_0 \equiv \min \left\{ 0 \leq k \leq r-l; \mathbf{p}_k \neq \mathbf{p}'_k \right\}$$

$$(3.1.16) \quad j_0 \equiv \min \left\{ 1 \leq j \leq d; \mathbf{p}_{k_0} \text{ の } j \text{ 成分} \neq \mathbf{p}'_{k_0} \text{ の } j \right\}.$$

この順序により, Λ_{loc} は次のように表現できる:

$$(3.1.17) \quad \Lambda_{loc} = \left\{ \mathbf{p}_j; j \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

$G_{loc}(\mathbf{Z})$ と Λ_{loc} の間の対応を用いることにより, $G_{loc}(\mathbf{Z})$ の順序が Λ_{loc} の順序で定義されるので, これをもって $G_{loc}(\mathbf{Z})$ のパラメータ付けが得られる. よって $G_{loc}(\mathbf{Z})$ は次のように書くことができる:

$$(3.1.18) \quad G_{loc}(\mathbf{Z}) = \left\{ \varphi_j(\mathbf{Z}); j \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

ただし, 各 $j \in \mathbb{N}^*$ に対して φ_j は次で定義される:

$$(3.1.19) \quad \varphi_j(\mathbf{Z})(n) \equiv \varphi_{\mathbf{p}_j}(\mathbf{Z})(n) \quad (l + \sigma(j) \leq n \leq r).$$

ここで $\sigma(j) \equiv \sigma(\mathbf{p}_j)$ とする. また, 自然数 d_q を次で定義する:

$$(3.1.20) \quad d_q \equiv \left(\text{集合} \bigcup_{s=1}^q G_{loc}(\mathbf{Z})(s) \text{ の要素数} \right) - 1.$$

$G_{loc}(\mathbf{Z})(q)$ は次のように書ける:

$$(3.1.21) \quad G_{loc}(\mathbf{Z})(q) = \left\{ \varphi_{d_{q-1}+1}(\mathbf{Z}), \varphi_{d_{q-1}+2}(\mathbf{Z}), \dots, \varphi_{d_q}(\mathbf{Z}) \right\}.$$

$G_{loc}(\mathbf{Z})(q)$ を順に並べたものを (A.1) に示す. また, \mathbf{Z} の次元 d が 1 の時および 2 の時に, \mathbf{Z} の成分で具体的に書き下したものをそれぞれ表 A.2 と表 A.3 に示す.

3.1.2.3. 入れ子式の確率過程. 任意の自然数 q を固定する. このとき, 任意の自然数 j ($0 \leq j \leq d_q$) に対して, 1次元の確率過程 $\phi_j(\mathbf{Z}) = (\phi_j(\mathbf{Z}); l + \sigma(j) \leq n \leq r)$ を次のように定義する:

$$(3.1.22) \quad \phi_j(\mathbf{Z})(n) \equiv \varphi_j(\mathbf{Z})(n) - E(\varphi_j(\mathbf{Z})(n)).$$

ここで注意すべきことは, $\phi_j(\mathbf{Z})$ の時間域が j に依存していることである. 全ての j に対して $\phi_j(\mathbf{Z})$ の時間域を元の確率過程 \mathbf{Z} のそれと同じ l から r に拡張するために, 1次元の確率過程 $\tilde{\phi}_j(\mathbf{Z}) = (\tilde{\phi}_j(\mathbf{Z}); l \leq n \leq r)$ を次のように定義する:

$$(3.1.23) \quad \tilde{\phi}_j(\mathbf{Z})(n) \equiv \begin{cases} 0 & (l \leq n < l + \sigma(j)) \\ \phi_j(\mathbf{Z})(n) - E(\phi_j(\mathbf{Z})(n)) & (l + \sigma(j) \leq n \leq r). \end{cases}$$

これら $d_q + 1$ の確率過程全体を階数 q の非線形変換のクラスと呼び $\mathcal{T}^{(q)}(\mathbf{Z})$ と書く:

$$(3.1.24) \quad \mathcal{T}^{(q)}(\mathbf{Z}) \equiv \{\tilde{\phi}_j(\mathbf{Z}); 0 \leq j \leq d_q\}.$$

$(d_q + 1)$ 次元の確率過程 $\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)} = (\tilde{Z}^{(q)}(n); l \leq n \leq r)$ と $(d_{q+1} - d_q)$ 次元の確率過程 $\tilde{\mathbf{W}}^{(q+1)} = (\tilde{W}^{(q+1)}(n); l \leq n \leq r)$ を定義する:

$$(3.1.25) \quad \tilde{Z}^{(q)}(n) \equiv {}^t(\tilde{\phi}_0(\mathbf{Z})(n), \tilde{\phi}_1(\mathbf{Z})(n), \dots, \tilde{\phi}_{d_q}(\mathbf{Z})(n))$$

$$(3.1.26) \quad \tilde{W}^{(q+1)}(n) \equiv {}^t(\tilde{\phi}_{d_q+1}(\mathbf{Z})(n), \tilde{\phi}_{d_q+2}(\mathbf{Z})(n), \dots, \tilde{\phi}_{d_{(q+1)}}(\mathbf{Z})(n)).$$

確率過程 $\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}, \tilde{\mathbf{W}}^{(q)}$ と元の確率過程 \mathbf{Z} の間には, 定理 3.1.1 より, 次の定理が成り立つ.

定理 3.1.2

(i) $\tilde{\mathbf{Z}}^{(1)} = \mathbf{Z}.$

(ii) 確率過程の族 $\{\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}; q \in \mathbf{N}\}$ は入れ子構造になっている, すなわち,

$$\tilde{\mathbf{Z}}^{(q+1)}(n) = \begin{pmatrix} \tilde{Z}^{(q)}(n) \\ \tilde{W}^{(q+1)}(n) \end{pmatrix} \quad (q \in \mathbf{N}, l \leq n \leq r).$$

(iii) $\left[\bigcup_{l \leq m \leq n} \mathbf{F}_l^m(\mathbf{Z}) \right] = \left[\bigcup_{q=1}^{\infty} \mathbf{M}_l^n(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}) \right] \quad (l \leq n \leq r).$

(iv) $\mathbf{N}_l^n(\mathbf{Z}) = \left[\{1\} \right] \oplus \left[\bigcup_{q=1}^{\infty} \mathbf{M}_l^n(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}) \right] \quad (l \leq n \leq r).$

3.2. 非線形因果性

この節では, [16] と [20] で研究された因果性と決定性について, 時間域が局所的な多次元の確率過程の場合に対して改良と一般化を行なう. この中には確率過程間の新しい関係性を調べるための定義も含まれる.

3.2.1. 因果性

この節では, [16] で研究された非線形因果性についての改良を行なう. この節を通して以下の状況を考える. d を自然数とし, $\mathbf{X} = (X(n); l \leq n \leq r)$, $\mathbf{Y} = (Y(n) = {}^t(Y_1(n), Y_2(n), \dots, Y_d(n)); l \leq n \leq r)$ をそれぞれ確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) で定義された1次元, d 次元の確率過程とする. さらに, $X(m)$ と $Y_j(n)$ ($l \leq m, n \leq r, 1 \leq j \leq d$) は $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ に属するものとする.

3.2.1.1. 線形因果性. \mathbf{Y} から \mathbf{X} へ線形の因果性があるとは, ある整数 M_0 ($l \leq M_0 \leq r$) と線形の関数 $L_n : \mathbb{R}^{(n-l+1)d} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$(3.2.1) \quad X(n) = L_n(Y(n), Y(n-1), \dots, Y(l)) \quad (M_0 \leq n \leq r)$$

を満たす時を言う. このとき, この関係を次で表す:

$$(3.2.2) \quad \mathbf{Y} \xrightarrow{(LC)} \mathbf{X}.$$

この定性的な定義を定量的に表すと次のようになる.

定理 3.2.1 次の 3つは互いに同値である:

- (i) $\mathbf{Y} \xrightarrow{(LC)} \mathbf{X}$;
- (ii) ある整数 M_0 ($l \leq M_0 \leq r$) が存在して

$$\mathbf{M}_l^n(\mathbf{X}) \subset \mathbf{M}_l^n(\mathbf{Y}) \quad (M_0 \leq n \leq r);$$

- (iii) ある整数 M_0 ($l \leq M_0 \leq r$) が存在して

$$\|P_{\mathbf{M}_l^n(\mathbf{Y})} X(n)\| = \|X(n)\| \quad (M_0 \leq n \leq r).$$

3.2.1.2. 非線形の強い意味の因果性 (強因果性). \mathbf{Y} から \mathbf{X} へ非線形の強い意味の因果性があるとは, ある整数 M_0 ($l \leq M_0 \leq r$) と可測関数 $F_n : \mathbb{R}^{(n-l+1)d} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$(3.2.3) \quad X(n) = F_n(Y(n), Y(n-1), \dots, Y(l)) \quad (M_0 \leq n \leq r)$$

を満たす時を言う. この時, この関係を次で表す:

$$(3.2.4) \quad \mathbf{Y} \xrightarrow{(C)} \mathbf{X}.$$

さらにこの節では, \mathbf{Y} は 3.1 節で定義された条件 (E) と (M) を満たすとする. 定理 3.1.2 を \mathbf{Y} に適用することにより線形の意味で表現された次の定量的な特徴付けを得る.

定理 3.2.2 次の 3つは互いに同値である:

- (i) $\mathbf{Y} \xrightarrow{(C)} \mathbf{X}$;
- (ii) ある整数 M_0 ($l \leq M_0 \leq r$) が存在して

$$\mathbf{N}_l^n(\mathbf{X}) \subset \mathbf{N}_l^n(\mathbf{Y}) \quad (M_0 \leq n \leq r);$$

- (iii) ある整数 M_0 ($l \leq M_0 \leq r$) が存在して

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|P_{\mathbf{M}_l^n(\mathbf{Y}^{(q)})} X(n)\| = \|X(n)\| \quad (M_0 \leq n \leq r).$$

3.2.1.3. 非線形の弱い意味の因果性 (弱因果性). 3.2.1.2 節で定義された強因果性は, 原因となるある確率過程 \mathbf{Y} の情報を用いて, 確率過程 \mathbf{X} の情報が完全に決定されることを意味している. しかしながら, 第 1 章に述べた通り, 現実の現象はさまざまに関連し合っていて, \mathbf{Y} だけの情報では完全に \mathbf{X} の情報を記述できないことも多い. このような場合, \mathbf{X} の過去の情報や \mathbf{X} と \mathbf{Y} の相互作用も考慮することは重要である.

そこでこの節では, 弱い意味の因果性の定義を与えることにする. ここで弱いとは, 3.2.1.2 節で定義された強因果性と比較して弱いという意味である.

確率過程 \mathbf{Y} から \mathbf{X} に対して, 弱い意味の因果性があるとは, ある整数 M_0 ($l \leq M_0 \leq r-1$) と可測関数 $G_n : \mathbb{R}^{n-l+1+(n-l+2)d} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, 任意の n ($M_0 \leq n \leq r-1$) に対して

$$(3.2.5) \quad X(n+1) = G_n(X(n), X(n-1), \dots, X(l), Y(n+1), Y(n), \dots, Y(l))$$

が成立する時を言う。この時、この関係を次で表す:

$$(3.2.6) \quad \mathbf{Y} \xrightarrow{(WC)} \mathbf{X}.$$

定義より次が直ちに従う。

定理 3.2.3

$$\mathbf{Y} \xrightarrow{(C)} \mathbf{X} \implies \mathbf{Y} \xrightarrow{(WC)} \mathbf{X}.$$

弱い意味の因果性を定量的に特徴付けるために、確率過程 $\mathbf{X}_{+1} = (X_{+1}(n); l \leq n \leq r-1)$ と $\mathbf{Y}_{+1} = (Y_{+1}(n); l \leq n \leq r-1)$ を定義する:

$$(3.2.7) \quad X_{+1}(n) \equiv X(n+1) \quad (l \leq n \leq r-1)$$

$$(3.2.8) \quad Y_{+1}(n) \equiv Y(n+1) \quad (l \leq n \leq r-1).$$

さらに、 $(d+1)$ 次元の確率過程 $\mathbf{Z} = (Z(n); l \leq n \leq r-1)$ を

$$(3.2.9) \quad Z(n) \equiv {}^t(X(n), {}^tY_{+1}(n)) = {}^t(X(n), {}^tY(n+1))$$

で定義する。

また、以下では、 \mathbf{X} と \mathbf{Y} は 3.1 節で定義された条件 (E) と (M) を満たすとする。定理 3.2.2 を \mathbf{Z} に適用することにより次を得る。

定理 3.2.4 次の3つは互いに同値である:

- (i) $\mathbf{Y} \xrightarrow{(WC)} \mathbf{X};$
- (ii) $\mathbf{Z} \xrightarrow{(C)} \mathbf{X}_{+1};$
- (iii) ある整数 M_0 ($l \leq M_0 \leq r-1$) が存在して

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|P_{\mathbf{M}_l^q(\mathbf{Z}^{(q)})} X(n+1)\| = \|X(n+1)\| \quad (M_0 \leq n \leq r-1).$$

3.2.1.4. 非線形非瞬時的弱因果性. \mathbf{X} に対して、因果性もしくは弱因果性を持つような確率過程 \mathbf{Y} を見つけることが出来たとしても、 \mathbf{X} を予測するという観点から見ると、我々が手にすることが出来る情報は \mathbf{X} と \mathbf{Y} の過去の情報だけである。

上記の理由から、この節では、非瞬時的な弱因果性の定義を与えることにする。 \mathbf{Y} から \mathbf{X} へ非瞬時的な弱因果性があるとは、ある整数 M_0 ($l \leq M_0 \leq r-1$) と可測関数 $H_n: \mathbb{R}^{(n-l+1)(d+1)} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して、任意の n ($M_0 \leq n \leq r-1$) に対して

$$(3.2.10) \quad X(n+1) = H_n(X(n), X(n-1), \dots, X(l), Y(n), Y(n), \dots, Y(l))$$

が成立する時を言う。この時、この関係を次で表わす:

$$(3.2.11) \quad \mathbf{Y} \xrightarrow{(WC^-)} \mathbf{X}.$$

定義より次が直ちに従う。

定理 3.2.5

$$\mathbf{Y} \xrightarrow{(WC^-)} \mathbf{X} \implies \mathbf{Y} \xrightarrow{(WC)} \mathbf{X}.$$

この定性的な定義を定量的に表現するために、 $(d+1)$ 次元の確率過程 $\mathbf{W} = (W(n); l \leq n \leq r)$ を定義する:

$$(3.2.12) \quad W(n) \equiv {}^t(X(n), {}^tY(n)).$$

さらに、以下では、 \mathbf{X} と \mathbf{Y} は 3.1 節で定義された条件 (E) と (M) を満たすとする。定理 3.2.2 を \mathbf{W} に適用することにより次を得る。

定理 3.2.6 次の 3 つは互いに同値である:

- (i) $\mathbf{Y} \xrightarrow{(WC^-)} \mathbf{X};$
- (ii) $\mathbf{W} \xrightarrow{(C)} \mathbf{X}_{+1};$
- (iii) ある整数 M_0 ($l \leq M_0 \leq r-1$) が存在して

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \|P_{\mathbf{M}_l^{(q)}} X(n+1)\| = \|X(n+1)\| \quad (M_0 \leq n \leq r-1).$$

3.2.2. 決定性

この節では, [20] において研究された非線形決定性に関する結果を時間域が局所的な場合に定式化する.

$\mathbf{X} = (X(n); l \leq n \leq r)$ を確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) 上で定義された 1 次元の確率過程で各 $X(n)$ ($l \leq n \leq r$) は 2 乗可積分であるとする.

3.2.1.3 節と同様に, 確率過程 $\mathbf{X}_{+1} = (X_{+1}(n); l \leq n \leq r-1)$ を定義する:

$$(3.2.13) \quad X_{+1}(n) \equiv X(n+1) \quad (l \leq n \leq r-1).$$

さらに, \mathbf{X} の時間域を $\{l, l+1, \dots, r-1\}$ に制限した確率過程を $\mathbf{X}^{(l, r-1)}$ と書く. この時, 確率過程 \mathbf{X} が決定性を持つとは

$$(3.2.14) \quad \mathbf{X}^{(l, r-1)} \xrightarrow{(C)} \mathbf{X}_{+1}$$

が成立する時を言う. 言い換えると, ある整数 M_0 ($l \leq M_0 \leq r-1$) と可測関数 $I_n : \mathbb{R}^{n-l+1} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して

$$(3.2.15) \quad X(n+1) = I_n(X(n), X(n-1), \dots, X(l)) \quad (M_0 \leq n \leq r-1)$$

が成立することである.

3.3. 非線形予測公式

[11] において, 退化した場合も含む計量ベクトル流に対する KM_2O -ランジュヴァン方程式論と, それを 1 次元の確率過程に応用した非線形予測問題が論じられている.

この節では, 上記の結果を多次元の確率過程から生成される入れ子式の確率過程に適用することによって, 多次元の非線形予測公式を得る. 以下では 3.1 節と同様の状況を考え, 入れ子式の確率過程 $\{\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}; q \in \mathbf{N}\}$ に対して議論することにする.

3.3.1. $\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}$ に対する KM_2O -ランジュヴァン方程式

この節では, 退化した場合も含む $\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}$ に対して KM_2O -ランジュヴァン方程式論を適用する. 任意の自然数 q に対し, (d_q+1) 次元の確率過程 $\nu_+(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}) = (\nu_+(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(n); 0 \leq n \leq r-l)$ を $\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}$ に付随する KM_2O -ランジュヴァン揺動流とする:

$$(3.3.1) \quad \nu_+(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(n) \equiv \begin{cases} \tilde{Z}^{(q)}(l) & (n=0) \\ \tilde{Z}^{(q)}(l+n) - P_{\mathbf{M}_l^{l+n-1}(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})} \tilde{Z}^{(q)}(n) & (0 < n \leq r-l). \end{cases}$$

また, KM_2O -ランジュヴァン揺動行列 $V_+(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(n)$ ($0 \leq n \leq r-l$) は次で定義される:

$$(3.3.2) \quad V_+(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(n) \equiv E\left(\nu_+(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(n)^t \nu_+(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(n)\right) \quad (0 \leq n \leq r-l).$$

注意すべき点は, $\{\tilde{Z}_j^{(q)}(n); l \leq n \leq r, 1 \leq j \leq d_q + 1\}$ が $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の中では退化することである. しかしながら, 定理 2.2.1 により最小の KM_2O -ランジュヴァン散逸行列 $\gamma_+^0(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}) = (\gamma_+^0(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(n, k); 0 \leq k < n \leq r - l)$ を用いて

$$(3.3.3) \quad \tilde{Z}^{(q)}(l+n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+^0(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(n, k) \tilde{Z}^{(q)}(l+k) + \nu_+(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(n) \quad (0 \leq n \leq r-l)$$

として, $\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}$ に対する KM_2O -ランジュヴァン方程式を導くことができる.

3.3.2. $\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}$ に対する線形予測公式

[11] のアルゴリズム (6.1) に従って, $\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}$ に対する予測行列 $Q_+(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}) = (Q_+(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(n, m; k); 0 \leq k \leq m < n \leq r-l)$ を次のように定義する:

$$(3.3.4) \quad Q_+(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(n, m; k) \equiv \begin{cases} -\gamma_+^0(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(m+1, k) & (n = m+1) \\ -\sum_{j=m+1}^{n-1} \gamma_+^0(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(n, j) Q_+(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(j, m; k) - \gamma_+^0(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(n, k) & (n > m+1). \end{cases}$$

さらに, [11] の定理 6.1 を適用することにより次を得る.

補題 3.3.1 任意の整数 n, p ($l \leq n \leq r-1, 1 \leq p \leq r-n$) に対して,

$$P_{\mathbf{M}_l^p(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})} \tilde{Z}^{(q)}(n+p) = \sum_{k=0}^{n-l} Q_+(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(n-l+p, n-l; k) \tilde{Z}^{(q)}(l+k).$$

3.3.3. \mathbf{Z} に対する非線形予測公式

定理 3.1.2 によって, [11] の定理 9.1 と同様に, 補題 3.3.1 において q を ∞ に近づけることにより次の結果を得る.

定理 3.3.1 (多次元の局所非線形予測子) 任意の整数 n, p ($l \leq n \leq r-1, 1 \leq p \leq r-n$) に対して,

$$P_{\mathbf{N}_l^p(\mathbf{Z})} Z(n+p) = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-l} Q_+(\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)})(n-l+p, n-l; k) \tilde{Z}^{(q)}(l+k)$$

のはじめの d 成分.

この定理が主張することは, 多次元の時間域が局所的な \mathbf{Z} の非線形予測子が $\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)}$ の線形予測子の極限で表わせるということである.

3.4. 部分的非線形情報空間

前節と同様に, 確率過程 $\mathbf{Z} = (Z(n); l \leq n \leq r)$ で条件 (E) と (M) を満たすものについて議論する.

3.4.1. 部分的非線形情報空間の定義

(3.1.24)において, 階数 q の非線形情報としての1次元確率過程のクラス $\mathcal{T}^{(q)}(\mathbf{Z})$ を導入した. 理論的な観点から言うと, たとえ \mathbf{Z} が強定常性を持っていたとしても $\tilde{\mathbf{Z}}^{(q)} (q \in \mathbf{N})$ は弱定常性すら持たない. しかしながら, $\phi_j(\mathbf{Z})$ は強定常性を持つ.

一方, 実際の時系列解析に応用するという観点からは, 元の \mathbf{Z} の非線形変換の選び方に注意しなければならない.

このような理由から, 非線形変換の使いかたを表現するために, 多重指数の空間を導入する. 任意に固定した自然数 q, D に対して, $\mathbf{J}^{(q,D)}$ を

$$(3.4.1) \quad \mathbf{J}^{(q,D)} \equiv \{J = (j_1, j_2, \dots, j_D); 0 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_D \leq d_q, j_k \in \mathbf{N}^*\}$$

で定義する. $\mathbf{J}^{(q,D)}$ の各要素 $J = (j_1, j_2, \dots, j_D)$ に対して, D 次元の確率過程 $\mathbf{Z}_J = (Z_J(n); l + \sigma(J) \leq n \leq r)$ を次のように定義する:

$$(3.4.2) \quad Z_J(n) \equiv {}^t(\phi_{j_1}(\mathbf{Z})(n), \phi_{j_2}(\mathbf{Z})(n), \dots, \phi_{j_D}(\mathbf{Z})(n)).$$

ただし, $\sigma(J)$ は

$$(3.4.3) \quad \sigma(J) \equiv \max\{\sigma(j_k); 1 \leq k \leq D\}$$

で定義されるものとする. これらの確率過程の系を $\mathcal{T}^{(q,D)}(\mathbf{Z})$ と書くことにする:

$$(3.4.4) \quad \mathcal{T}^{(q,D)}(\mathbf{Z}) \equiv \left\{ \mathbf{Z}_J; J \in \mathbf{J}^{(q,D)} \right\}.$$

この空間 $\mathcal{T}^{(q,D)}(\mathbf{Z})$ を \mathbf{Z} に付随する階数 (q, D) の部分的非線形情報空間と呼ぶ.

3.4.2. 部分的非線形確率過程に対する定常性と揺動散逸定理

前節で示したように, もとの確率過程 \mathbf{Z} が強定常性を持つならば, $\mathcal{T}^{(q,D)}(\mathbf{Z})$ に含まれる全ての確率過程は強定常性を持ち, ゆえに弱定常性も持つ. 時系列解析の観点からは与えられた時系列に対して, その弱定常性をチェックすることは重要である.

このような理由から, $\mathcal{T}^{(q,D)}(\mathbf{Z})$ の中で定常性を満たすものを扱うことにする. 任意の $J \in \mathbf{J}^{(q,D)}$ に対して, \mathbf{Z}_J が弱定常性を持つとは, ある共分散行列関数 $R(\mathbf{Z}_J) : \{-(r-l-\sigma(J)), -(r-l-\sigma(J))+1, \dots, r-l-\sigma(J)\} \rightarrow M(D; \mathbb{R})$ が存在して, 次を満たすこととする:

$$(3.4.5) \quad E(Z_J(m) {}^t Z_J(n)) = R(\mathbf{Z}_J)(m-n) \quad (0 \leq m, n \leq r-l-\sigma(J)).$$

$\mathcal{T}^{(q,D)}$ の中で弱定常性を満たすような確率過程を $ST^{(q,D)}(\mathbf{Z})$ と書く:

$$(3.4.6) \quad ST^{(q,D)}(\mathbf{Z}) \equiv \left\{ \mathbf{Z}_J \in \mathcal{T}^{(q,D)}(\mathbf{Z}); \mathbf{Z}_J \text{ は弱定常性を満たす} \right\}.$$

今, 任意の $J \in \mathbf{J}^{(q,D)}$ を固定する. 弱定常性に関連して, \mathbf{Z}_J に付随する2種類の KM_2O -ランジュヴァン揺動流を導入する. KM_2O -ランジュヴァン揺動流 $\nu_+(\mathbf{Z}_J) = (\nu_+(\mathbf{Z}_J)(n); 0 \leq n \leq r-l-\sigma(J))$ は次で定義される:

$$(3.4.7) \quad \begin{aligned} & \nu_+(\mathbf{Z}_J)(n) \\ & \equiv \begin{cases} Z_J(l + \sigma(J)) & (n = 0) \\ Z_J(l + \sigma(J) + n) - P_{M_{l+\sigma(J)}^{l+\sigma(J)+n-1}(\mathbf{Z}_J)} Z_J(l + \sigma(J) + n) & (0 < n \leq r-l-\sigma(J)). \end{cases} \end{aligned}$$

そして前向き KM₂O-ランジュヴァン揺動行列 $V_+(\mathbf{Z}_J) = (V_+(\mathbf{Z}_J)(n); 0 \leq n \leq r-l-\sigma(J))$ を

$$(3.4.8) \quad V_+(\mathbf{Z}_J)(n) \equiv E \left(\nu_+(\mathbf{Z}_J)(n)^t \nu_+(\mathbf{Z}_J)(n) \right) \quad (0 \leq n \leq r-l-\sigma(J))$$

で定義する. さらに定理 2.2.1 を \mathbf{Z}_J に適用することによって, 最小な KM₂O-ランジュヴァン散逸行列 $\gamma_+^0(\mathbf{Z}_J) = (\gamma_+^0(\mathbf{Z}_J)(n, k); 0 \leq k < n \leq r-l-\sigma(J))$ が一意に存在して, 任意の $n(0 \leq n \leq r-l-\sigma(J))$ に対して

$$(3.4.9) \quad Z_J(l + \sigma(J) + n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+^0(\mathbf{Z}_J)(n, k) Z_J(l + \sigma(J) + k) + \nu_+(\mathbf{Z}_J)(n).$$

この式 (3.4.9) を \mathbf{Z}_J に対する前向き KM₂O-ランジュヴァン方程式と呼ぶ.

一方, 後向き KM₂O-ランジュヴァン揺動流 $\nu_-(\mathbf{Z}_J) = (\nu_-(\mathbf{Z}_J)(n); -r+l+\sigma(J) \leq n \leq 0)$ は次で定義される:

$$(3.4.10) \quad \nu_-(\mathbf{Z}_J)(n) \equiv \begin{cases} Z_J(r) & (n=0) \\ Z_J(r+n) - P_{\mathbf{M}_{r+n+1}(\mathbf{Z}_J)} Z_J(r+n) & (-r+l+\sigma(J) \leq n < 0). \end{cases}$$

式 (3.4.8) と同様に, \mathbf{Z}_J に付随する KM₂O-ランジュヴァン揺動行列 $V_-(\mathbf{Z}_J) = (V_-(\mathbf{Z}_J)(n); 0 \leq n \leq r-l-\sigma(J))$ を

$$(3.4.11) \quad V_-(\mathbf{Z}_J)(n) \equiv E \left(\nu_-(\mathbf{Z}_J)(-n)^t \nu_-(\mathbf{Z}_J)(-n) \right) \quad (0 \leq n \leq r-l-\sigma(J))$$

で定義する.

さらに, 定理 2.2.1 を \mathbf{Z}_J に適用することによって最小な KM₂O-ランジュヴァン散逸行列 $\gamma_-^0(\mathbf{Z}_J) = (\gamma_-^0(\mathbf{Z}_J)(n, k); 0 \leq k < n \leq r-l-\sigma(J))$ が一意に存在して, 任意の $n(0 \leq n \leq r-l-\sigma(J))$ に対して

$$(3.4.12) \quad Z_J(r-n) = - \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_-^0(\mathbf{Z}_J)(n, k) Z_J(r-k) + \nu_-(\mathbf{Z}_J)(-n) \quad (0 \leq n \leq r-l-\sigma(J))$$

を満たす. この式 (3.4.12) を \mathbf{Z}_J に付随する後向き KM₂O-ランジュヴァン方程式と呼ぶ. 特に, 最小の前向きおよび後向き KM₂O-ランジュヴァン偏相関行列 $\delta_+(\mathbf{Z}_J) = (\delta_+(\mathbf{Z}_J)(n); 1 \leq n \leq r-l-\sigma(J))$ $\delta_-(\mathbf{Z}_J) = (\delta_-(\mathbf{Z}_J)(n); 1 \leq n \leq r-l-\sigma(J))$ を

$$(3.4.13) \quad \delta_{\pm}(\mathbf{Z}_J)(n) \equiv \gamma_{\pm}(\mathbf{Z}_J)(n, 0)$$

で定義する. ここで, \mathbf{Z}_J に付随する KM₂O-ランジュヴァン行列と呼ばれる行列の系 $\mathcal{LM}(\mathbf{Z}_J)$ を

$$(3.4.14) \quad \mathcal{LM}(\mathbf{Z}_J) \equiv \{ \gamma_{\pm}^0(\mathbf{Z}_J)(n, k), \delta_{\pm}^0(\mathbf{Z}_J)(n), V_{\pm}(\mathbf{Z}_J)(m) \\ ; 0 \leq k < n \leq r-l-\sigma(J), 0 \leq m \leq r-l-\sigma(J) \}$$

で定義する.

また, 2.2.4 節と 2.2.5 節に述べたことより, 退化した場合の定常過程に対するアルゴリズムを使って上記の $\mathcal{LM}(\mathbf{Z}_J)$ を求めることができる.

3.5. 有限階数の非線形因果性と因果性を利用した予測解析

この節では, 3.2 節と同様の状況を考え, 3.4 節で議論した部分的非線形情報空間を非線形因果解析と予測解析に応用することを考える.

l, r を整数, d を自然数とする. $\mathbf{X} = (X(n); l \leq n \leq r)$, $\mathbf{Y} = (Y(n); l \leq n \leq r)$ をそれぞれ (Ω, \mathcal{B}, P) 上で定義された 1 次元, d 次元の確率過程で条件 (E) と (M) を満たすものとする.

3.5.1. 部分的非線形情報と決定性と因果性

3.2.2, 3.2.1.2, 3.2.1.3, 3.2.1.4 の各節に対応してここでは, 有限階数の非線形決定性と非線形因果性についての定義を与え, 非線形決定性, 非線形因果性との関係を見て行く.

3.5.1.1. 有限階数の非線形決定性. \mathbf{X} が有限階数の決定性を持つとは, ある自然数 q, D ($D \leq d_q$) と $\mathbf{J}^{(q,D)}$ の要素 J が存在して, $\mathbf{X}_J^{(\sigma(J), r-1)} \xrightarrow{(LC)} \mathbf{X}_{+1}^{(\sigma(J), r-1)}$ を満たす時を言う. 3.2.2 における定義から, ただちに次が従う.

定理 3.5.1 \mathbf{X} が有限階数の決定性を持つならば \mathbf{X} は決定性を持つ.

3.5.1.2. 有限階数の強因果性. \mathbf{Y} から \mathbf{X} に対して有限階数の強因果性があるとは, ある自然数 q, D ($D \leq d_q$) と $\mathbf{J}^{(q,D)}$ の要素 J が存在して, $\mathbf{Y}_J \xrightarrow{(LC)} \mathbf{X}^{(\sigma(J), r)}$ を満たす時を言う. 3.2.1.2 の定義から直ちに次が従う.

定理 3.5.2

(i) ある自然数 q があって $\tilde{\mathbf{Y}}^{(q)} \xrightarrow{(LC)} \mathbf{X}$ ならば, $\mathbf{Y} \xrightarrow{(C)} \mathbf{X}$.

(ii) \mathbf{Y} から \mathbf{X} に対して有限階数の強因果性があるならば, $\mathbf{Y} \xrightarrow{(C)} \mathbf{X}$.

3.5.1.3. 有限階数の弱因果性. $(d+1)$ 次元の確率過程 $\mathbf{Z} = (Z(n); l \leq n \leq r-1)$ を次のように定義する:

$$(3.5.1) \quad Z(n) \equiv {}^t(X(n), {}^tY_{+1}(n)) \quad (l \leq n \leq r-1).$$

この時, 弱因果性の定義から次がわかる.

定理 3.5.3 ある自然数 q, D ($D \leq (d+1)_q$) と $\mathbf{J}^{(q,D)}$ の要素 J が存在して, $\mathbf{Z}_J^{(l+\sigma(J), r-1)} \xrightarrow{(LC)} \mathbf{X}_{+1}^{(l+\sigma(J), r-1)}$ を満たすとする. この時 $\mathbf{Y} \xrightarrow{(WC)} \mathbf{X}$.

有限階数の弱因果性を次のように定義する. \mathbf{Y} から \mathbf{X} に対して, 有限階数の弱因果性があるとは, 3.5.1 で定義された \mathbf{Z} に対してある自然数 q, D ($D \leq d_q$) と $\mathbf{J}^{(q,D)}$ の要素 J が存在して, $\mathbf{Z}_J^{(l+\sigma(J), r-1)} \xrightarrow{(LC)} \mathbf{X}_{+1}^{(l+\sigma(J), r-1)}$ を満たす時を言う.

3.5.1.4. 有限階数の非瞬時的弱因果性. $(d+1)$ 次元の確率過程 $\mathbf{W} = (W(n); l \leq n \leq r-1)$ を次のように定義する:

$$(3.5.2) \quad W(n) \equiv {}^t(X(n), Y_1(n), Y_2(n), \dots, Y_d(n)) \quad (l \leq n \leq r).$$

この時, 非瞬時的弱因果性の定義から次がわかる

定理 3.5.4 ある自然数 q, D ($D \leq (d+1)_q$) と $\mathbf{J}^{(q,D)}$ の要素 J が存在して, $\mathbf{W}_J^{(l+\sigma(J), r-1)} \xrightarrow{(LC)} \mathbf{X}_{+1}^{(l+\sigma(J), r-1)}$ を満たすとする. この時 $\mathbf{Y} \xrightarrow{(WC^-)} \mathbf{X}$.

有限階数の非瞬時的弱因果性を次のように定義する. \mathbf{Y} から \mathbf{X} に対して, 有限階数の弱因果性があるとは, 3.5.2 で定義された \mathbf{W} に対して, ある自然数 q, D ($D \leq d_q$) と $\mathbf{J}^{(q,D)}$ の要素 J が存在して, $\mathbf{W}_J^{(l+\sigma(J), r-1)} \xrightarrow{(LC)} \mathbf{X}_{+1}^{(l+\sigma(J), r-1)}$ を満たす時を言う.

3.5.2. 決定解析および因果解析を元にした非線形予測子

この節では、3.5.1 節での有限階数の各因果関係とそれぞれに適した予測子について論じる。

3.5.2.1. 有限階数の決定性を元にした非線形予測子. 定理 3.5.1 に対応して次の定理を示す。

定理 3.5.5 ある自然数 $q, D (D \leq d_q)$ と $\mathbf{J}^{(q,D)}$ の要素 $J = (j_1, j_2, \dots, j_D)$ があって $\mathbf{X}_J^{(l+\sigma(J), r-1)} \xrightarrow{(LC)} \mathbf{X}_{+1}^{(l+\sigma(J), r-1)}$ を満たすとする。

- (i) もし $j_1 = 0$ なら, ある $M_0 (l + \sigma(J) \leq M_0 \leq r - 1)$ が存在して, 任意の整数 $n, p (l + M_0 \leq n \leq r - 1, 1 \leq p \leq r - 1 - n)$ に対して

$$P_{M_{l+\sigma(J)}^n(\mathbf{X}_J)} X(n+p) = \sum_{k=0}^{n-l-\sigma(J)} Q_+(\mathbf{X}_J)(n-l-\sigma(J)+p, n-l-\sigma(J); k) X_J(l+\sigma(J)+k) \text{ の第一成分.}$$

- (ii) もし $j_1 \neq 0$ なら, ある整数 $M_0 (l + \sigma(J) \leq M_0 \leq r - 1)$ が存在して, 任意の整数 $n, p (l + M_0 \leq n \leq r - 1, 1 \leq p \leq r - 1 - n)$ に対して

$$P_{M_{l+\sigma(J)}^n(\mathbf{S})} X(n+p) = \sum_{k=0}^{n-l-\sigma(J)} Q_+(\mathbf{S})(n-l-\sigma(J)+p, n-l-\sigma(J); k) S(l+\sigma(J)+k) \text{ の第一成分.}$$

ただし, $\mathbf{S} = (S(n); l + \sigma(J) \leq n \leq r - 1)$ は $(D + 1)$ 次元の確率過程で次で定義される:

$$(3.5.3) \quad S(n) \equiv {}^t(X(n), {}^tZ_J(n)).$$

3.5.2.2. 有限階数の強因果性を元にした非線形予測子. 定理 3.5.2 に対応して, 次の定理を示す。

定理 3.5.6 ある自然数 $q, D (D \leq q)$ と $\mathbf{J}^{(q,D)}$ の要素 $J = (j_1, j_2, \dots, j_D)$ が存在して $\mathbf{Y}_J \xrightarrow{(LC)} \mathbf{X}^{(\sigma(J), r)}$ を満たすとする。この時, 任意の整数 $n, p (l + M_0 \leq n \leq r - 1, 1 \leq p \leq r - 1 - n)$ に対して

$$(3.5.4) \quad P_{M_{l+\sigma(J)}^n(\mathbf{T})} X(n+p) = \sum_{k=0}^{n-l-\sigma(J)} Q_+(\mathbf{T})(n-l-\sigma(J)+p, n-l-\sigma(J); k) T(l+\sigma(J)+k) \text{ の第一成分.}$$

ただし $\mathbf{T} = (T(n); l + \sigma(J) \leq n \leq r - 1)$ は $(D + 1)$ 次元の確率過程で次で定義される:

$$(3.5.5) \quad T(n) \equiv {}^t(X(n), {}^tY_J(n+1)).$$

3.5.2.3. 有限階数の弱因果性を元にした非線形予測子. 定理 3.5.3 に対応して, 次を示す。

定理 3.5.7 ある自然数 $q, D (D \leq (d+1)_q)$ と $\mathbf{J}^{(q,D)}$ の要素 $J = (j_1, j_2, \dots, j_D)$ が存在して, $\mathbf{Z}_J^{(l+\sigma(J), r-1)} \xrightarrow{(LC)} \mathbf{X}_{+1}^{(l+\sigma(J), r-1)}$ を満たすとする。

- (i) もし $j_1 = 0$ なら, ある整数 M_0 ($l + \sigma(J) \leq M_0 \leq r - 1$) が存在して, 任意の自然数 n, p ($l + M_0 \leq n \leq r - 1, 1 \leq p \leq r - 1 - n$) に対して

$$P_{\mathbf{M}_{l+\sigma(J)}^n(\mathbf{Z}_J^{(l+\sigma(J), r-1)})} X(n+p) = \sum_{k=0}^{n-l-\sigma(J)} Q_+(\mathbf{Z}_J^{(l+\sigma(J), r-1)})(n-l-\sigma(J)+p, n-l-\sigma(J); k) Z_J(l+\sigma(J)+k) \text{ の第一成分.}$$

- (ii) もし $j_1 \neq 0$ なら, ある整数 M_0 ($l + \sigma(J) \leq M_0 \leq r - 1$) が存在して, 任意の自然数 n, p ($l + M_0 \leq n \leq r - 1, 1 \leq p \leq r - 1 - n$) に対して

$$P_{\mathbf{M}_{l+\sigma(J)}^n(\mathbf{U}^{(l+\sigma(J), r-1)})} X(n+p) = \sum_{k=0}^{n-l-\sigma(J)} Q_+(\mathbf{U}^{(l+\sigma(J), r-1)})(n-l-\sigma(J)+p, n-l-\sigma(J); k) U(l+\sigma(J)+k) \text{ の第一成分.}$$

ただし, $\mathbf{U} = (U(n); \sigma(J) \leq n \leq r - 1)$ は $(D+1)$ 次元の確率過程で次で定義される:

$$(3.5.6) \quad U(n) \equiv {}^t(X(n), {}^t Z_J(n)).$$

3.5.2.4. 有限階数の非瞬時的弱因果性を元にした非線形予測子. 定理 3.5.4 に対応して, 次の定理を示す.

定理 3.5.8 ある自然数 q, D ($D \leq (d+1)_q$) と $\mathbf{J}^{(q, D)}$ の要素 $J = (j_1, j_2, \dots, j_D)$ が存在して, $\mathbf{W}_J^{(l+\sigma(J), r-1)} \xrightarrow{(LC)} \mathbf{X}_{+1}^{(l+\sigma(J), r-1)}$ を満たすとする.

- (i) もし $j_1 = 0$ なら, ある整数 M_0 ($l + \sigma(J) \leq M_0 \leq r$) が存在して, 任意の整数 n, p ($l + M_0 \leq n \leq r, 1 \leq p \leq r - 1$) に対して

$$P_{\mathbf{M}_{l+\sigma(J)}^n(\mathbf{W}_J^{(l+\sigma(J), r-1)})} X(n+p) = \sum_{k=0}^{n-l-\sigma(J)} Q_+(\mathbf{W}_J^{(l+\sigma(J), r-1)})(n-l-\sigma(J)+p, n-l-\sigma(J); k) W_J(l+\sigma(J)+k) \text{ の第一成分.}$$

- (ii) もし $j_1 \neq 0$ なら, ある整数 M_0 ($l + \sigma(J) \leq M_0 \leq r$) が存在して, 任意の整数 n, p ($l + M_0 \leq n \leq r, 1 \leq p \leq r - 1 - n$) に対して

$$P_{\mathbf{M}_{l+\sigma(J)}^n(\mathbf{V})} X(n+p) = \sum_{k=0}^{n-l-\sigma(J)} Q_+(\mathbf{V})(n-l-\sigma(J)+p, n-l-\sigma(J); k) V(l+\sigma(J)+k)$$

の第一成分.

ただし, $\mathbf{V} = (V(n); l + \sigma(J) \leq n \leq r - 1)$ は $(D+1)$ 次元の確率過程で次で定義される:

$$(3.5.7) \quad V(n) \equiv {}^t(X(n), {}^t W_J(n)).$$

第 4 章

非線形時系列解析

この章でははじめに, [18] で紹介された時系列に対する定常性のテストである Test(S) について簡単に触れる. さらに [21] で得られた判定基準についても簡単に説明する. 詳しくは付録で述べる.

次に [16] で論じられた時系列に対する因果性のテストである Test(CS) と [20] で論じられた時系列に対する決定性のテストである Test(D) で用いられている基準を改良したものを提案する.

最後に, 与えられたデータからモデルを決定する方法と各方法に対応した予測子の計算方法を紹介する.

4.1. Test(S)

以後, d 次元のデータ $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}(n); 0 \leq n \leq N)$ が与えられているとする.

4.1.1. Test(S) の概略

[第 1 段] 見本平均ベクトル $\mu^{\mathcal{Z}}$ と見本共分散行列関数 $R^{\mathcal{Z}} = ((R_{jk}^{\mathcal{Z}}(n))_{1 \leq j, k \leq d}; |n| \leq N)$ を次で定義する:

$$(4.1.1) \quad \mu^{\mathcal{Z}} \equiv {}^t(\mu_1^{\mathcal{Z}}, \mu_2^{\mathcal{Z}}, \dots, \mu_d^{\mathcal{Z}}) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \mathcal{Z}(n)$$

$$(4.1.2) \quad \begin{cases} R_{jk}^{\mathcal{Z}}(n) \equiv \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N-n} (\mathcal{Z}_j(n+m) - \mu_j^{\mathcal{Z}})(\mathcal{Z}_k(m) - \mu_k^{\mathcal{Z}}) & (0 \leq n \leq N) \\ R_{jk}^{\mathcal{Z}}(-n) \equiv R_{jk}^{\mathcal{Z}}(-n) & (0 \leq n \leq N). \end{cases}$$

[第 2 段] 規格化されたデータ $\tilde{\mathcal{Z}} = (\tilde{\mathcal{Z}}(n); 0 \leq n \leq N)$ を

$$(4.1.3) \quad \tilde{\mathcal{Z}}_j(n) \equiv (R_{jj}^{\mathcal{Z}}(0))^{-1/2} (\mathcal{Z}_j(n) - \mu_j^{\mathcal{Z}}) \quad (1 \leq j \leq d, 0 \leq n \leq N)$$

で定義する. 定義より $\mu^{\tilde{\mathcal{Z}}} = 0$, $R^{\tilde{\mathcal{Z}}}(0) = I_d$ となる. 時系列解析の経験則により ([2]), ある数 M があって, 共分散行列関数 $R^{\tilde{\mathcal{Z}}}(n)$ ($|n| \leq M$) の信頼できる M は $[2\sqrt{N+1}/d - 1]$ から $[3\sqrt{N+1}/d - 1]$ の間であることが知られている. ここでは M の値として以下を採用する:

$$(4.1.4) \quad M \equiv [3\sqrt{N+1}/d] - 1.$$

[第 3 段] 3.4 節のアルゴリズムを見本共分散行列関数 $R^{\tilde{\mathcal{Z}}} = (R^{\tilde{\mathcal{Z}}}(n); |n| \leq M)$ に適用することにより, 見本 KM_2O -レンジュヴァン行列 $\mathcal{LM}(\mathcal{Z})$ を得る:

$$(4.1.5) \quad \mathcal{LM}(\mathcal{Z}) = \{\gamma_{\pm}(n, k), \delta_{\pm}(m), V_{\pm}(l); 0 \leq k < n \leq M, 1 \leq m \leq M, 0 \leq l \leq M\}.$$

[第4段] 見本 KM_2O -ランジュヴァン揺動流と呼ばれる d 次元のデータ $\nu = (\nu(n); 0 \leq n \leq M)$ を次のように定義する:

$$(4.1.6) \quad \begin{cases} \nu(0) \equiv \tilde{Z}(0) \\ \nu(n) \equiv \tilde{Z}(n) + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n, k) \tilde{Z}(k) \quad (1 \leq n \leq M). \end{cases}$$

このとき, $M+1$ 個の正則行列 $W_+(n)$ ($0 \leq n \leq M$) を取ることができて, 次を満たす:

$$(4.1.7) \quad V_+(n) = W_+(n) {}^t W_+(n) \quad (0 \leq n \leq M).$$

この $W_+(n)$ を用いて, ν_+ を規格化した d 次元のデータ $\xi_+ = (\xi_+(n); 0 \leq n \leq M)$ を

$$(4.1.8) \quad \xi_+(n) \equiv W_+(n)^{-1} \nu_+(n) \quad (0 \leq n \leq M)$$

で定義する. さらに, この ξ_+ から 1次元のデータ $\xi = (\xi(n); 0 \leq n \leq d(M+1) - 1)$ を次のように定義する:

$$(4.1.9) \quad \xi(n) \equiv \xi_{+j}(m), \quad n = dm + j - 1 \quad (1 \leq j \leq d, 0 \leq m \leq M).$$

[第5段] 構成定理 (定理 2.1.5) より \tilde{Z} が定常性を満たす, すなわち, ある弱定常性を満たす確率過程の実現値であるための必要十分条件は ξ が正規白色雑音の実現値であることである. この考え方にしたがって, Test(S) が [18] において提案されている. この Test(S) を用いて, 与えられたデータに対する定常性の検定が実行できる. [21] で改良された部分も含めて, 詳細については付録に述べる.

4.1.2. 非線形変換に対する定常性の判定

3.1 節において, d 次元の確率過程 \mathbf{Z} に対する非線形情報空間 $N^p(\mathbf{Z})$ を生成する 1次元確率過程の族 $\{\varphi_j(\mathbf{Z}); j \in \mathbb{N}^*\}$ を構成した.

今, 与えられたデータ $\tilde{\mathbf{Z}}$ に対して, 同様の構成法を適用することにより, 任意の自然数 q に対して, 階数 q の非線形変換のクラス $\mathcal{T}^{(q)}(\tilde{\mathbf{Z}})$ を次のように定義できる:

$$(4.1.10) \quad \mathcal{T}^{(q)}(\tilde{\mathbf{Z}}) \equiv \{\varphi_j(\tilde{\mathbf{Z}}); 0 \leq j \leq d_q\}.$$

特に, (3.4.4) と同様にして, 任意の自然数 q, D ($D \leq d_q$) に対して, 非線形変換のクラス $\mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{\mathbf{Z}})$ を

$$(4.1.11) \quad \mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{\mathbf{Z}}) \equiv \{\tilde{Z}_J; J \in \mathbf{J}^{(q,D)}\}$$

で定義する. ただし $\mathbf{J}^{(q,D)}$ の要素 $J = (j_1, j_2, \dots, j_D)$ に対して, D 次元のデータ $\tilde{Z}_J = (\tilde{Z}_J(n); \sigma(J) \leq n \leq N)$ は

$$(4.1.12) \quad \tilde{Z}_J(n) \equiv {}^t(\phi_{j_1}(\tilde{\mathbf{Z}})(n), \phi_{j_2}(\tilde{\mathbf{Z}})(n), \dots, \phi_{j_D}(\tilde{\mathbf{Z}})(n))$$

で定義される. Test(S) をこれらのデータ \tilde{Z}_J に適用することによって, \tilde{Z}_J が定常性を持つかどうかを判定できる.

4.2. Test(CS) と Test(CS)-2

この節では, [16], [20] にて議論された因果性の検証方法である Test(CS) について簡単に振り返る. また, 新しい因果関係の判断基準である Test(CS)-2 について提案する.

4.2.1. Test(CS)の方法と判定基準

$\mathcal{X} = (\mathcal{X}(n); 0 \leq n \leq N)$ と $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}(n); 0 \leq n \leq N)$ をそれぞれ 1次元と d 次元のデータとする. また \mathcal{X} と \mathcal{Y} は定常性を満たし, $(d+1)$ 次元のデータ $\mathcal{U} \equiv {}^t(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ も定常性を満たすとする. ここで \mathcal{X} と \mathcal{Y} の見本相互共分散行列関数を $R^{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$ と書く:

$$(4.2.1) \quad \begin{cases} R^{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(n) \equiv \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N-n} (\mathcal{X}(n+m) - \mu^{\mathcal{X}})(\mathcal{Y}(m) - \mu^{\mathcal{Y}}) & (0 \leq n \leq N) \\ R^{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(-n) \equiv {}^t R^{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(n) & (0 \leq n \leq N). \end{cases}$$

\mathcal{Y} の見本共分散行列関数 $R^{\mathcal{Y}}$ と $R^{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$ を用いて, [16], [20] の定義に従うことによって, 見本因果関数 $C_*(\mathcal{X}|\mathcal{Y}) : \{0, 1, \dots, M\} \rightarrow [0, 1]$ が次のように定義される:

$$(4.2.2) \quad C_n(\mathcal{X}|\mathcal{Y}) \equiv \left\{ \sum_{k=0}^n C(n, k) V_+(k) {}^t C(n, k) \right\}^{1/2}.$$

ただし

$$(4.2.3) \quad M \equiv [3\sqrt{N+1}/(d+1)] - 1$$

$$(4.2.4) \quad C(n, k) = \begin{cases} R^{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(n) R^{\mathcal{Y}}(0)^{-1} & (k=0) \\ \left(R^{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(n-k) + \sum_{l=0}^{k-1} R^{\mathcal{X}\mathcal{Y}}(n-l) {}^t \gamma_+(k, l) \right) V_+(k)^{-1} & (1 \leq k \leq M). \end{cases}$$

データ \mathcal{U} が定常性を満たすことより, 見本因果関数 $C_*(\mathcal{X}|\mathcal{Y})$ は単調増加関数となり, この関数の $n=M$ の時の値を \mathcal{Y} から \mathcal{X} への見本因果値と呼ぶ ([16],[20]). さらに \mathcal{Y} から \mathcal{X} へ線形の因果性があると判定される場合に

$$(4.2.5) \quad \mathcal{Y} \xrightarrow{(LC)} \mathcal{X}$$

と書くことにする. [16],[20] で提案されている因果性があるかどうかの判定基準は 1000 個の乱数から \mathcal{X} への因果値の分布と \mathcal{Y} から \mathcal{X} への因果値を比較することによって行なわれ, この方法を Test(CS) と呼んでいる.

4.2.1.1. Test(D) ([20]). $\mathcal{X} = (\mathcal{X}(n); 0 \leq n \leq N)$ を 1次元のデータとし定常性を満たすとする. また $\mathcal{X}_{+1} = (\mathcal{X}_{+1}(n); 0 \leq n \leq N-1)$ を $\mathcal{X}_{+1}(n) = \mathcal{X}(n+1)$ ($0 \leq n \leq N-1$) で定義する. さらに \mathcal{X} の時間域を 0 から $N-1$ までに制限したものを $\mathcal{X}^{(0, N-1)}$ とする.

[20] における決定性の判定には, 4.2.1 節において \mathcal{Y} を $\mathcal{X}^{(0, N-1)}$, \mathcal{X} を \mathcal{X}_{+1} とし得られた見本因果値がどの程度信頼できるかを調べるために, ブートストラップ法による見本因果値の分布と, 4.2.1 節で得られた 1000 個の乱数から \mathcal{X}_{+1} への因果値の分布の重なり具合を調べて, 因果性があるかどうかを判定する.

具体的にはまず, 4.2.1 節で得られた 1000 個の乱数から \mathcal{X}_{+1} への因果値の分布で, 下から数えて 90% 点を与える因果値を \mathcal{R}_{90} とする.

一方, ブートストラップ法による見本因果値を 1000 個計算し得られた分布で上から数えて 90% 点を与える因果値を \mathcal{B}_{90} とする.

このとき, \mathcal{X} に決定性があるとは $\mathcal{R}_{90} < \mathcal{B}_{90}$ のときを言う.

4.2.1.2. Test(CS)-2. 4.2.1 節での Test(CS) と Test(D) においては, \mathcal{X} に対して原因とはならないと考えられる多くの乱数との因果関係を調べるので, \mathcal{Y} から \mathcal{X} に対しては因果が無いとは言えないという消極的な主張しかできない.

また 4.2.1 節での 1000 個の乱数から \mathcal{X} への因果値の分布や 4.2.1.1 節での信頼区間を計算するためには相当の時間を必要とする.

より少ない計算時間で積極的な主張をするために、因果関係を判断する新しい基準を導入する。この方法には \mathcal{X} を時間シフトしたデータが \mathcal{X} に対して常に原因として働くという事実を利用する。

各 i ($1 \leq i \leq N$) に対して、データ $\mathcal{X}^{(0,N-i)} = (\mathcal{X}^{(0,N-i)}(n); 0 \leq n \leq N-i)$ と $\mathcal{X}_{+i} = (\mathcal{X}_{+i}(n); 0 \leq n \leq N-i)$ を次で定義する:

$$(4.2.6) \quad \mathcal{X}^{(0,N-i)}(n) \equiv \mathcal{X}(n) \quad (0 \leq n \leq N-i)$$

$$(4.2.7) \quad \mathcal{X}_{+i}(n) \equiv \mathcal{X}(n+i) \quad (0 \leq n \leq N-i).$$

各 i ($1 \leq i \leq N$) に対して、 \mathcal{X}_{+i} から $\mathcal{X}^{(0,N-i)}$ へ線形の因果性があるのは $i \leq M(i)$ の時であることがわかる。ただし $M(i) \equiv 3\sqrt{N-i+1/2} - 1$ 。この $i \leq M(i)$ を満たす i の最大値である sh_c は次で与えられる¹:

$$(4.2.8) \quad sh_c \equiv [-17 + 3\sqrt{16N + 41}/8].$$

Test(CS)-2 の定義:

まず i を 1 から sh_c まで動かすことによって、 \mathcal{X}_{+i} から $\mathcal{X}^{(0,N-i)}$ へ見本因果値 $C_{M(i)}(\mathcal{X}^{(0,N-i)}|\mathcal{X}_{+i})$ ($1 \leq i \leq sh_c$) の分布を得る。 \mathcal{Y} から \mathcal{X} へ見本因果値がこの分布の上位 90% 以内に入っている時に、 \mathcal{Y} から \mathcal{X} へ線形な因果があると判断する。

4.2.1.3. Test(D)-2. この節ではデータ \mathcal{X} は定常性のテスト Test(S) を通過しているものとする。

2つのデータ $\mathcal{X}^{(0,N-1)} = (\mathcal{X}^{(0,N-1)}(n); 0 \leq n \leq N-1)$ と $\mathcal{X}_{+1} = (\mathcal{X}_{+1}(n); 0 \leq n \leq N-1)$ を次で定義する:

$$(4.2.9) \quad \mathcal{X}^{(0,N-1)}(n) \equiv \mathcal{X}(n) \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

$$(4.2.10) \quad \mathcal{X}_{+1}(n) \equiv \mathcal{X}(n+1) \quad (0 \leq n \leq N-1).$$

3.5.1.1 節に対応して、4.1.2 節の結果を $\mathcal{X}^{(0,N-1)}$ に適用することにより、任意の自然数 q, D ($D \leq d_q$) に対して、階数 q の非線形変換のクラス $\mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{X}}^{(0,N-1)})$ を定義する:

$$(4.2.11) \quad \mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{X}}^{(0,N-1)}) \equiv \{(\tilde{\mathcal{X}}^{(0,N-1)})_J; J \in \mathbf{J}^{(q,D)}\}.$$

さらに、その部分集合である $ST^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{X}}^{(0,N-1)})$ を

$$(4.2.12) \quad ST^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{X}}) \equiv \{(\tilde{\mathcal{X}}^{(0,N-1)})_J \in \mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{X}}^{(0,N-1)}); \\ \text{データ } (\tilde{\mathcal{X}}^{(0,N-1)})_J \text{ と } {}^t(\mathcal{X}, {}^t(\tilde{\mathcal{X}}^{(0,N-1)})_J) \text{ は定常性をもつ}\}$$

で定義する。

Test(CS)-2 を $ST^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{X}}^{(0,N-1)})$ の各元 $(\tilde{\mathcal{X}}^{(0,N-1)})_J$ と \mathcal{X}_{+1} に適用して

$$(4.2.13) \quad (\tilde{\mathcal{X}}^{(0,N-1)})_J \xrightarrow{(LC)} \mathcal{X}_{+1}$$

を満たすかどうかチェックできる。

この時 \mathcal{X} が階数 (q, D) の非線形決定性を持つとは、ある $ST^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{X}}^{(0,N-1)})$ の元 $(\tilde{\mathcal{X}}^{(0,N-1)})_J$ に対して (4.2.13) が成立する時を言う。

4.3. データ間の非線形因果性

4.3.1. データ間の強因果性

$\mathcal{X} = (\mathcal{X}(n); 0 \leq n \leq N)$ を 1次元のデータ、 $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}(n); 0 \leq n \leq N)$ を d 次元のデータとする。さらに \mathcal{X} は Test(S) を通過すると仮定する。

¹東京大学工学科研究科計数工学専攻博士課程 2年 松浦 真也氏の計算による

3.5.1.2 節に対応して, 4.1.2 節の結果を \mathcal{Y} に適用することによって, 任意の自然数 $q, D (D \leq d_q)$ に対して, 階数 (q, D) の非線形変換のクラス $\mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Y}})$ を定義する:

$$(4.3.1) \quad \mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Y}}) \equiv \{\tilde{\mathcal{Y}}_J; J \in \mathbf{J}^{(q,D)}\}.$$

さらに $\mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Y}})$ の部分集合 $ST^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Y}})$ を

$$(4.3.2) \quad ST^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Y}}) \equiv \{\tilde{\mathcal{Y}}_J \in \mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Y}}); \text{データ } \tilde{\mathcal{Y}}_J \text{ と } {}^t(\mathcal{X}, {}^t\tilde{\mathcal{Y}}_J) \text{ の両方が定常性を満たす}\}$$

で定義する.

Test(CS)-2 を $ST^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Y}})$ の各元 $\tilde{\mathcal{Y}}_J$ に適用することにより, $\tilde{\mathcal{Y}}_J$ から \mathcal{X} に対する線形の因果性を調べることができる. この場合, この関係は

$$(4.3.3) \quad \tilde{\mathcal{Y}}_J \xrightarrow{(LC)} \mathcal{X}$$

と書かれる. ここで, \mathcal{Y} から \mathcal{X} に対して, 階数 (q, D) の強因果性があるとは, $ST^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Y}})$ のある要素 $\tilde{\mathcal{Y}}_J$ に対して (4.3.3) が成立するときを言う.

4.3.2. データ間の弱因果性

4.3.1 節と同様の条件の下で, データ $\mathcal{Y}_{+1} = (\mathcal{Y}_{+1}(n); 0 \leq n \leq N-1)$ と $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}(n); 0 \leq n \leq N-1)$ について考える:

$$(4.3.4) \quad \mathcal{Y}_{+1}(n) \equiv \mathcal{Y}(n+1) \quad (0 \leq n \leq N-1)$$

$$(4.3.5) \quad \mathcal{Z}(n) \equiv {}^t(\mathcal{X}(n), {}^t\mathcal{Y}_{+1}(n)) = {}^t(\mathcal{X}(n), {}^t\mathcal{Y}(n+1)) \quad (0 \leq n \leq N-1).$$

3.5.1.3 節に対応して, 4.1.2 節の結果を \mathcal{Z} に適用することによって, 任意の自然数 $q, D (D \leq (d+1)_q)$ に対して, 階数 (q, D) の非線形変換のクラス $\mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Z}})$ を定義する:

$$(4.3.6) \quad \mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Z}}) \equiv \{\tilde{\mathcal{Z}}_J; J \in \mathbf{J}^{(q,D)}\}.$$

さらに, $\mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Z}})$ の部分集合 $ST^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Z}})$ を

$$(4.3.7) \quad ST^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Z}}) \equiv \{\tilde{\mathcal{Z}}_J \in \mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Z}}); \text{データ } \tilde{\mathcal{Z}}_J \text{ と } {}^t(\mathcal{X}, {}^t\tilde{\mathcal{Z}}_J) \text{ の両方が定常性を満たす}\}$$

で定義する. $ST^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Z}})$ の各要素 $\tilde{\mathcal{Z}}_J$ に対して, Test(CS)-2 を適用することにより, $\tilde{\mathcal{Z}}_J$ から \mathcal{X} に対して線形の因果性があるかどうかを判定することができる. 線形の因果性があるとき

$$(4.3.8) \quad \tilde{\mathcal{Z}}_J \xrightarrow{(LC)} \mathcal{X}$$

と書く. データ \mathcal{Y} から \mathcal{X} に対して階数 (q, D) の弱因果性があるとは, ある $ST^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Z}})$ の元 $\tilde{\mathcal{Z}}_J$ があって, (4.3.8) の関係を満たす時を言う.

4.3.3. データ間の非瞬時的弱因果性

4.3.1 節と同じ条件の下で, $d+1$ 次元のデータ $\mathcal{W} = (\mathcal{W}(n); 0 \leq n \leq N-1)$ を

$$(4.3.9) \quad \mathcal{W}(n) \equiv {}^t(\mathcal{X}(n), {}^t\mathcal{Y}(n))$$

で定義する.

3.5.1.4 節に対応して, 4.1.2 節の結果をデータ \mathcal{W} に適用することによって任意の自然数 $q, D (D \leq (d+1)_q)$ に対して, 階数 (q, D) の非線形変換のクラス $\mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{W}})$ を

$$(4.3.10) \quad \mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{W}}) \equiv \{\tilde{\mathcal{W}}_J; J \in \mathbf{J}^{(q,D)}\}$$

で定義する. さらに, $\mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{W})$ の部分集合 $ST^{(q,D)}(\tilde{W})$ を

$$(4.3.11) \quad ST^{(q,D)}(\tilde{W}) \equiv \{ \tilde{W}_J \in \mathcal{T}^{(q,D)}(\tilde{W}); \text{ データ } \tilde{W}_J \text{ と } {}^t(\mathcal{X}, {}^t\tilde{W}_J) \\ \text{の両方が定常性を満たす} \}$$

で定義する. Test(CS)-2 を $ST^{(q,D)}(\tilde{W})$ の各元 \tilde{W}_J に適用することにより, \tilde{W}_J から \mathcal{X} へ線形の因果性があるかを判断することができる. この時, この関係は

$$(4.3.12) \quad \tilde{W}_J \xrightarrow{(LC)} \mathcal{X}$$

で表わされる.

データ \mathcal{Y} から \mathcal{X} へ階数 (q, D) の非瞬時的弱因果性があるとは, ある $ST^{(q,D)}(\tilde{W})$ の要素 \tilde{W}_J が存在して, (4.3.12) を満たす時を言う.

4.4. 見本因果値とモデル選択

この節では 4.3.1 節と同じ条件の下で, 4.2.1.3, 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3 の各節で説明した方法に従って, 最大見本因果値を用いたモデル選択の方法を提案する.

以下では, 自然数 q をとり固定する.

4.4.1. 有限階数の決定性によるモデル選択

4.2.1.3 節と同様の条件で, $M \equiv 3\sqrt{N+1}/(D+1) - 1 \geq 10$ を満たすような自然数 D ($1 \leq D \leq d_q$) をとる. $ST^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{X}})$ の各要素 $\tilde{\mathcal{X}}_J$ から $\tilde{\mathcal{X}}_{+1}$ への見本因果値を求め, それらの見本因果値の中で最大の値を与えるような $\tilde{\mathcal{X}}_J$ を選択する. 定理 3.5.5 に対応して, J の要素 j_1 が 0 であるかそうでないかで D 次元のデータ $\tilde{\mathcal{X}}_J$ かあるいは $(D+1)$ 次元のデータ ${}^t(\tilde{\mathcal{X}}, {}^t\tilde{\mathcal{X}}_J)$ に対する KM_2O -ランジュヴァン方程式をあてはめることにより, モデルが選択できる.

4.4.2. 有限階数の強因果性によるモデル選択

4.3.1 節と同様の条件で, $M \equiv 3\sqrt{N+1}/(D+1) - 1 \geq 10$ を満たすような自然数 D ($1 \leq D \leq d_q$) をとる. $ST^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Y}})$ の各要素 $\tilde{\mathcal{Y}}_J$ から $\tilde{\mathcal{X}}$ への見本因果値を求め, それらの見本因果値の中で最大の値を与えるような $\tilde{\mathcal{Y}}_J$ を選択する. 定理 3.5.6 に対応して, $(D+1)$ 次元のデータ ${}^t(\tilde{\mathcal{X}}, {}^t\tilde{\mathcal{Y}}_J)$ に対する KM_2O -ランジュヴァン方程式をあてはめることにより, モデルが選択できる.

4.4.3. 有限階数の弱因果性によるモデル選択

4.3.2 節と同様の条件で, $M \equiv 3\sqrt{N+1}/(D+1) - 1 \geq 10$ を満たすような自然数 D ($1 \leq D \leq (d+1)_q$) をとる. $ST^{(q,D)}(\tilde{\mathcal{Z}})$ の各要素 $\tilde{\mathcal{Z}}_J$ から $\tilde{\mathcal{X}}$ への見本因果値を求め, それらの見本因果値の中で最大の値を与えるような $\tilde{\mathcal{Z}}_J$ を選択する. 定理 3.5.7 に対応して, J の要素 j_1 が 0 であるかそうでないかで D 次元のデータ $\tilde{\mathcal{Z}}_J$ かあるいは $(D+1)$ 次元のデータ ${}^t(\tilde{\mathcal{X}}, {}^t\tilde{\mathcal{Z}}_J)$ に対する KM_2O -ランジュヴァン方程式をあてはめることにより, モデルが選択できる.

4.4.4. 有限階数の非瞬時的弱因果性によるモデル選択

4.3.3 節と同様の条件で, $M \equiv 3\sqrt{N+1}/(D+1) - 1 \geq 10$ を満たすような自然数 D ($1 \leq D \leq (d+1)_q$) をとる. $ST^{(q,D)}(\tilde{W})$ の各要素 \tilde{W}_J から \tilde{X} への見本因果値を求め, それらの見本因果値の中で最大の値を与えるような \tilde{W}_J を選択する. 定理 3.5.8 に対応して, J の要素 j_1 が 0 かそうでないかで D 次元のデータ \tilde{W}_J かあるいは $(D+1)$ 次元のデータ ${}^t(\tilde{X}, {}^t\tilde{W}_J)$ に対する KM_2O -レンジュヴァン方程式をあてはめることにより, モデルが選択できる.

4.4.5. モデル選択

4.4.1, 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4 の各節で選ばれたモデルの中で見本因果値が最大のものを選び, そのモデルに合わせた KM_2O -レンジュヴァン方程式をあてはめる事によって, 元のデータ X の非線形モデルが選択できる.

4.5. 予測公式

この節では 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4 の各節に示した 4 つのモデル選択の方法のそれぞれに対応した予測公式について考える.

4.5.1. 一般の場合の多次元の線形予測公式

$Z = (Z(n); 0 \leq n \leq N)$ を d 次元のデータで Test(S) を通過するものとする. この時, 確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) 上で定義された d 次元の弱定常性を満たす確率過程 $Z = (Z(n); 0 \leq n \leq M)$ が存在して, その実現値が $\tilde{Z}_{N-M} = (\tilde{Z}(N-M+n); 0 \leq n \leq M)$ に等しいものが存在する.

[18] において, データ \tilde{Z} に対する 1 期先の予測公式 $\vec{Z}_M^{(L;1)}(N+1)$ が与えられている. ただし Z は 1 期先の未来においても定常性を保って時間発展すると仮定する. [18] における予測公式 (7.1) をデータ Z_{N-M} に適用することによって次を得る:

$$(4.5.1) \quad \vec{Z}_M^{(L;1)}(N+1) = H_M^{(L;1)}(Z(N), Z(N-1), \dots, Z(N-M+1)).$$

ただし, 行列関数 $H_M^{(L;1)} = H_M^{(L;1)}(z_N, z_{N-1}, \dots, z_{N-M+1})$ は

$$(4.5.2) \quad \begin{aligned} & H_M^{(L;1)}(z_n, z_{N-1}, \dots, z_{N-M+1}) \\ & \equiv \mu^Z - \sum_{k=0}^{M-1} \begin{pmatrix} \sqrt{R_{11}^Z(0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{R_{dd}^Z(0)} \end{pmatrix} \gamma_+(\tilde{Z})(M, k) \cdot \\ & \quad \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{R_{11}^Z(0)^{-1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{R_{dd}^Z(0)^{-1}} \end{pmatrix} (z_{N-M+k+1} - \mu^Z) \end{aligned}$$

で定義する. さらに, 任意の自然数 p に対して, データ Z の p 期先の線形予測子 $\vec{Z}_M^{(L;1)}(N+p)$ は

$$(4.5.3) \quad \vec{Z}_M^{(L;1)}(N+p) \equiv H_M^{(L;1)}(\vec{Z}_M^{(L;1)}(N+p-1), \dots, \vec{Z}_M^{(L;1)}(N+p-M))$$

で与えられる. ただし, 任意の自然数 k ($p \leq k \leq N+p$) に対し

$$(4.5.4) \quad \vec{Z}_M^{(L;1)}(N+p-k) \equiv Z(N+p-k).$$

4.5.2. 実際の予測公式の求め方

4.4.1, 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4 の各節それぞれの方法によって選択されたモデルに対して, 予測公式 (4.5.3) を用いて p 期先の予測子を求める. その第1成分をとる事によって, それぞれのモデルの場合の元のデータ \mathcal{X} の p 期先の予測公式が得られる.

4.5.3. 重相関係数と FPE

この節では, モデル選択の良さと予測子の良さを判断するための既存の基準について述べる.

1次元のデータ $\mathcal{X} = (\mathcal{X}(n); 0 \leq n \leq N+L)$ と d 次元のデータ $\mathcal{Y} = (\mathcal{Y}(n); 0 \leq n \leq N+L)$ が与えられているとする. ここで, その一部 $\mathcal{X}^{(0,N)}$ と $\mathcal{Y}^{(0,N)}$ に対して 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4 の各節の方法を適用して得られた d' 次元のモデルを $\mathcal{Z} = (\mathcal{Z}(n); 0 \leq n \leq M)$ とし, \mathcal{Z} から得られる \mathcal{X} の L 期先予測子を $\hat{\mathcal{X}} = (\hat{\mathcal{X}}(n); 1 \leq n \leq L)$ とする.

データ $\mathcal{X}^{(N+1, N+L)}$ と 予測子 $\hat{\mathcal{X}}$ の重相関係数 R は

$$(4.5.5) \quad R \equiv \frac{\sum_{n=1}^L (\mathcal{X}(n+N) - \mu^{\mathcal{X}})(\hat{\mathcal{X}}(n) - \mu^{\hat{\mathcal{X}}})}{\sqrt{\sum_{n=1}^L (\mathcal{X}(n+N) - \mu^{\mathcal{X}})^2 \sum_{n=1}^L (\hat{\mathcal{X}}(n) - \mu^{\hat{\mathcal{X}}})^2}}$$

で与えられる. この時, 予測子が有意であるとは

$$(4.5.6) \quad R^2 \geq \frac{dF(d, L-d-1; 0.05)}{L-d-1 + dF(d, L-d-1; 0.05)}$$

を満たす時を言う. ただし, $F(*, *; \alpha)$ は F 分布の α パーセント点を与える数である. (4.5.6) の右辺の量を $LB(R^2)$ と書く.

また (3.4.5) により, モデル \mathcal{Z} に付随する見本 KM_2O -ランジュヴァン方程式を立てることができる:

$$(4.5.7) \quad \begin{cases} \tilde{\mathcal{Z}}(0) \equiv \nu(0) \\ \tilde{\mathcal{Z}}(n) = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(n, k) \tilde{\mathcal{Z}}(k) + \nu(n) \quad (1 \leq n \leq M). \end{cases}$$

[2] に従って, d' 次元のデータ $(\mathcal{Z}(n); 0 \leq n \leq N)$ に対する FPE(Final Prediction Error) と呼ばれる量は次で定義される:

$$(4.5.8) \quad FPE \equiv \left(1 + \frac{Md' + 1}{N + 1}\right)^{d'} \left(1 - \frac{Md' + 1}{N + 1}\right)^{-d'} \det|V_+(\mathcal{Z})(M)|.$$

4.6. データ解析

この節では, 4.1 節から 4.5 までで論じた内容を実際のデータ解析に応用する事を試みる. 使用するのは 3つのデータ - 赤道西経 110 度の海水面温度, 南米リマの Callao 空港の気温, 同地点の気圧 - である. 以下ではこれら 3つのデータをそれぞれ SST², LIT, LIP³と呼ぶ. なお, これらのデータは全て月平均のデータで 1985年5月から 1986年2月までの, 長さ 130 となっている.

²ftp.pmel.noaa.gov から anonymous ftp で入手可能

³日本気象協会から, データの格納された CDROM を入手可能

4.6.1. データ解析の目的

SST は、該当地点の海域にブイを浮べてその中に搭載された装置で観測されている。このデータは、エルニーニョ現象に深く関わっていることが知られている。エルニーニョはペルー沖の海面水温が何らかの影響により通常よりも高い状態となる現象のことを言う。以前は、エルニーニョは異常気象の元凶と考えられていたが、現在では全地球上の気象現象に影響を与えている通常の気象現象の一部と捉えられている。重要なのは、エルニーニョ現象が遠く離れた他の地点の気象現象に影響を与えることである。また LIT, LIP が観測されているリマはエルニーニョ 1 区および 2 区と呼ばれる海域に近くエルニーニョとの直接的な関連性がある可能性がある。

そこで、データ解析の目的として以下のようなことを考える：

- (i) SST は LIT や LIP に対して、何かしらの影響を与えているか？
- (ii) LIT と LIP は 互いに影響を与えあっているか？
- (iii) 因果解析によって、因果があると判定されるデータを使うことは予測をする場合に効果があるか？

今、SST, LIT, LIP をそれぞれ $\mathcal{X}_1 = (\mathcal{X}_1(n); 0 \leq n \leq 129)$, $\mathcal{X}_2 = (\mathcal{X}_2(n); 0 \leq n \leq 129)$, $\mathcal{X}_3 = (\mathcal{X}_3(n); 0 \leq n \leq 129)$ と書くことにする。目的のために、因果解析や決定解析を前半の 120 のデータ $\mathcal{X}_j^{(0,119)}$ ($1 \leq j \leq 3$) に対して行ない、最後の 10 期を予測して、元のデータ $\mathcal{X}_j^{(120,129)}$ ($1 \leq j \leq 3$) と比べることによって結果の検討を行なう。

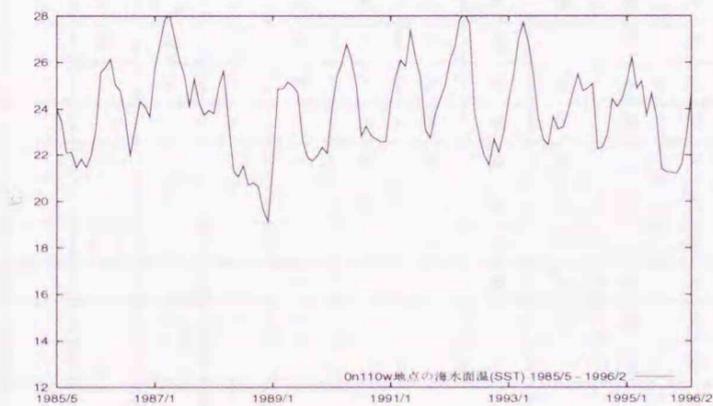


図 4.6.1: SST のグラフ

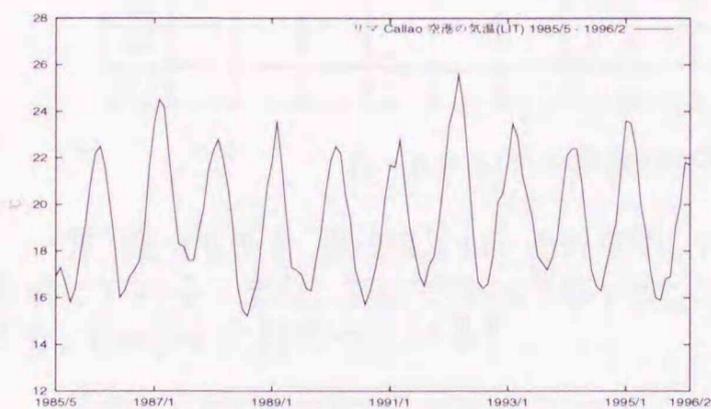


図 4.6.2: LIT のグラフ

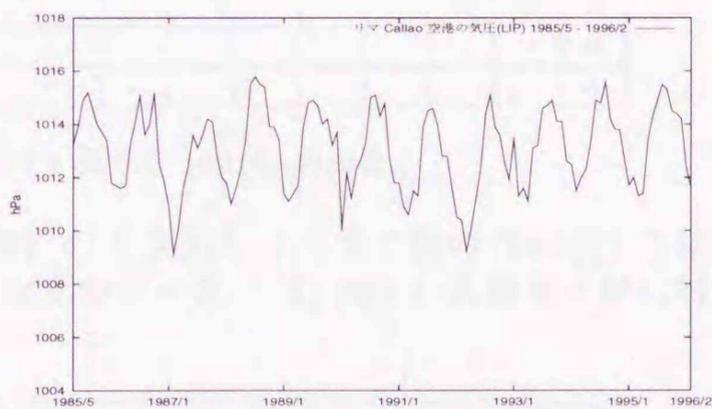


図 4.6.3: LIP のグラフ

4.6.2. SST を伴った LIT の解析

この節では、SST から LIT へ因果性があるかどうかを中心に解析を行なう。以下では、各データに対して以下のように変換を行なう：

- (4.6.1) 規格化 → 非線形変換 → 規格化。

規格化と非線形変換については 4.1 節に記述してある。また以下では、階数 6 の非線形変換について実験を行なうものとする。1次元と 2次元の場合の非線形変換はそれぞれ付録の表 A.2, A.3 に示してある。

4.6.2.1. Test(S) の結果。まず始めに、LIT の定常性について見る。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
○	○	○	○	×	×	○	×	×	○	×	○	×	×	×	×	○	○	○

表 4.6.1: LIT の非線形変換の 1次元の Test(S) の結果

表 4.6.1 は、LIT に対する 1次元の場合の非線形変換の Test(S) の結果を示している。表の読みかたは、非線形変換 $\phi_j(\tilde{\mathcal{X}}_2)$ が $j = 0, 1, 2, 3, 6, 9, 11, 16, 17, 18$ の時は通過していて $j = 4, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15$ の時は通過していない事を示している。

また表 4.6.2 は、2次元の場合の非線形変換の Test(S) の結果を示している。読みかたは、組 ${}^t(\phi_j(\tilde{\mathcal{X}}_2), \phi_k(\tilde{\mathcal{X}}_2))$ が例えば、 $(j, k) = (0, 1), (0, 3), (0, 5), (0, 6), (0, 18)$ の時は通過していて、 $(j, k) = (0, 2), (0, 4), (0, 7)$ から $(0, 17)$ の時は通過していないことを示している。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	○	×	○	×	○	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	○
1		○	○	×	○	○	×	×	○	○	×	×	×	×	×	×	×	○
2			○	○	×	○	×	○	×	×	×	×	×	○	×	×	×	×
3				×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
4					×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
5						×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
6							×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
7								×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
8									×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
9										×	×	×	×	×	×	×	×	×
10											×	×	×	×	×	○	×	×
11												×	×	×	×	×	×	×
12													×	×	×	×	×	×
13														×	×	×	×	×
14															×	×	×	×
15																×	×	×
16																	×	×
17																		×

表 4.6.2: LIT の非線形変換の 2次元の Test(S) の結果

一方、表 4.6.3 と表 4.6.4 は、それぞれ、SST の 1次元と 2次元の時の Test(S) の結果を示している。また、ここでは示さないが、2次元のデータ ${}^t(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ の非線形変換に対しても、Test(S) を行なっている⁴。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
○	○	○	○	○	○	○	×	○	○	○	○	×	×	○	○	○	○	○

表 4.6.3: SST の非線形変換の 1次元の Test(S) の結果

⁴2次元の場合、A.3 に示す通り非線形変換の種類は 110 種類あるので、1次元の Test(S) の結果は 110 通り、2次元の Test(S) の結果は 5995 通りある。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	○	○	○	○	○	○	○	×	○	○	○	×	○	×	×	○	○	○
1		○	○	×	○	○	×	×	×	○	○	×	×	○	×	×	×	○
2			○	○	○	×	×	○	○	×	×	○	○	×	×	○	×	×
3				×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
4					×	×	○	○	×	×	×	○	×	×	×	×	×	×
5						×	×	×	○	×	×	×	×	×	×	×	×	×
6							×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
7								×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
8									×	×	×	×	×	○	×	×	×	×
9										○	×	×	×	×	×	×	×	×
10											×	×	×	×	×	×	×	×
11												×	×	×	×	×	×	×
12													×	×	×	×	×	×
13														×	×	×	×	×
14															×	×	×	×
15																×	×	×
16																	×	×
17																		×

表 4.6.4: SST の非線形変換の 2次元の Test(S) の結果

4.6.2.2. 因果解析の結果. この節では SST から LIT に対して何かしらの因果関係があるかを調べる. 表 4.6.5 は SST から LIT への強因果性の結果を示している. LIT に対する Test(CS)-2 の結果 (表 4.6.8) を考慮すると SST から LIT へ因果があるとは言えない. ここで, 使用しているデータは 120 なので, sh_c はこの場合 14 となる. 以下の他のデータに対する Test(CS)-2 についても同様である.

また, 表 4.6.6 は, SST から LIT に対して, 弱因果性があることを示している. しかしながら最大の因果値を与える非線形変換の組 (0, 8) は LIT の非線形性にのみ依っている.

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.890167
2	(0,6)	0.895275

表 4.6.5: SST から LIT への強因果性の結果

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.962792
2	(0,8)	0.969292

表 4.6.6: SST から LIT への弱因果性の結果

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.962792
2	(0,8)	0.969292

表 4.6.7: SST から LIT への非瞬時的弱因果性の結果

1	0.995746	8	0.946087
2	0.987807	9	0.935442
3	0.972834	10	0.931748
4	0.954467	11	0.938913
5	0.949964	12	0.946281
6	0.951560	13	0.943704
7	0.950596	14	0.926623

表 4.6.8: LIT に対する Test(CS)-2 の結果

1	0.998740	8	0.952032
2	0.997524	9	0.945965
3	0.988394	10	0.938858
4	0.982555	11	0.937387
5	0.975245	12	0.933308
6	0.969588	13	0.931515
7	0.959673	14	0.929517

表 4.6.9: SST に対する Test(CS)-2 の結果

ところで, SST から LIT への弱因果性のテストにおいて Test(CS)-2 を通過した他の組を見ても (表 4.6.10), 組 (0, 8) の次に高い因果値を与えるのは組 (0, 20) であり, この組は SST の非線形性も用いている. よって, 因果関係の観点から言うと SST から LIT に対して, 弱因果性があると言える.

0.969292	(0,8)	0.966595	(0,22)
0.968371	(0,20)	0.966410	(0,49)
0.968357	(0,24)	0.966003	(0,7)
0.968317	(0,80)	0.965918	(0,3)
0.968125	(0,54)	0.965728	(0,12)
0.968007	(0,11)	0.964023	(0,4)
0.967913	(0,2)	0.959035	(0,56)
0.967727	(0,1)	0.955788	(0,92)
0.967579	(0,99)	0.953737	(0,93)
0.967415	(0,27)		

表 4.6.10: Test(CS)-2 を通過した非線形変換の組

4.6.2.3. 決定解析の結果. 表 4.6.8 と表 4.6.11 からは, LIT が決定性を持つことが読み取れるが, 一方, 表 4.6.9 と表 4.6.12 からは SST が決定性を持つとは言えないことがわかる.

dimension	transformation	sample causal value
1	(0)	0.962792
2	(0,3)	0.969292

表 4.6.11: LIT に対する決定性の結果

dimension	transformation	sample causal value
1	(0)	0.897979
2	(0,11)	0.906990

表 4.6.12: SST に対する決定性の結果

4.6.2.4. 予測の結果. まず SST の予測結果について 図 4.6.4 に示す.

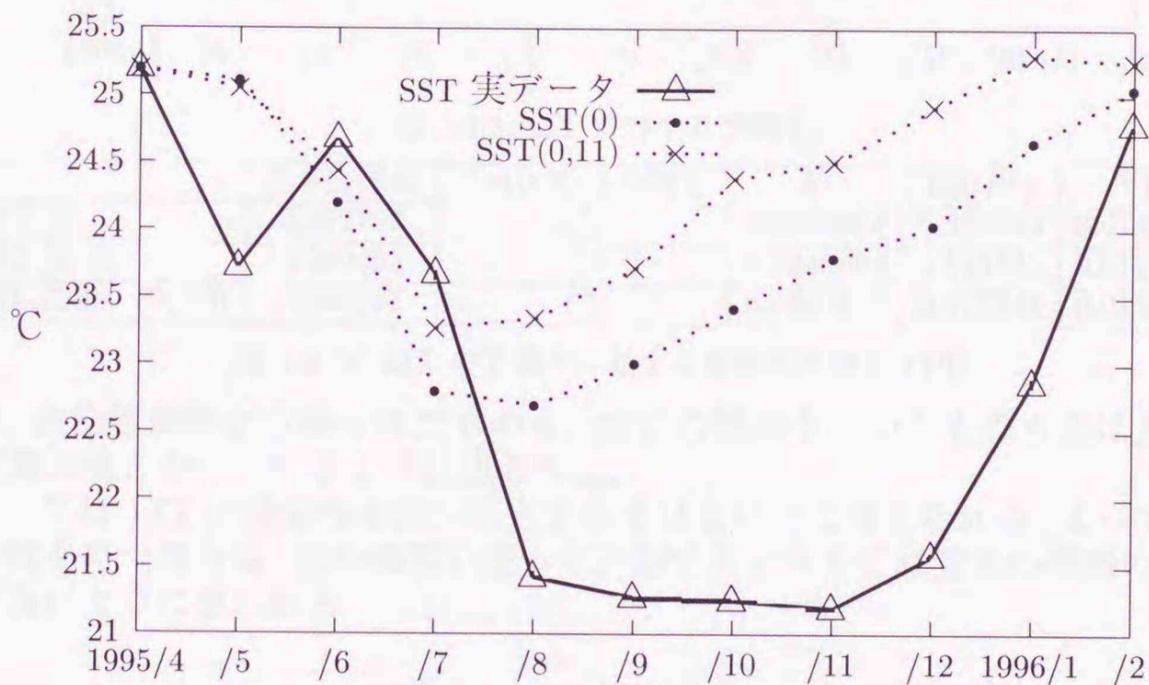


図 4.6.4: SST に対する予測のグラフ

SST の予測子に対する重相関係数 R と対応するモデル (0), (0, 11) に対する FPE を表 4.6.13 に示す.

図 4.6.4 に示された予測子は両方とも有意であるが, あまり元データと合っているとは言えない. 理由としては, SST が決定性を持たないためではないかと考えられる. 見本因果値はモデル (0, 11) に対する方がモデル (0) よりも大きく, また FPE はモデル (0, 11) に対する方がモデル (0) よりも小さくなっている.

	見本因果値	Test(CS)-2 の判定	R^2	LB(R^2)	FPE
SST (0)	0.897979	×	0.6595423	0.399399	0.181017
SST (0, 11)	0.906990	×	0.8062431	0.575242	0.048086

表 4.6.13: SST の予測子に対する重相関係数と FPE

次に 図 4.6.5 に, LIT 単独の情報を使った場合の予測と, LIT と SST の両方の情報を使った場合の予測について示す.

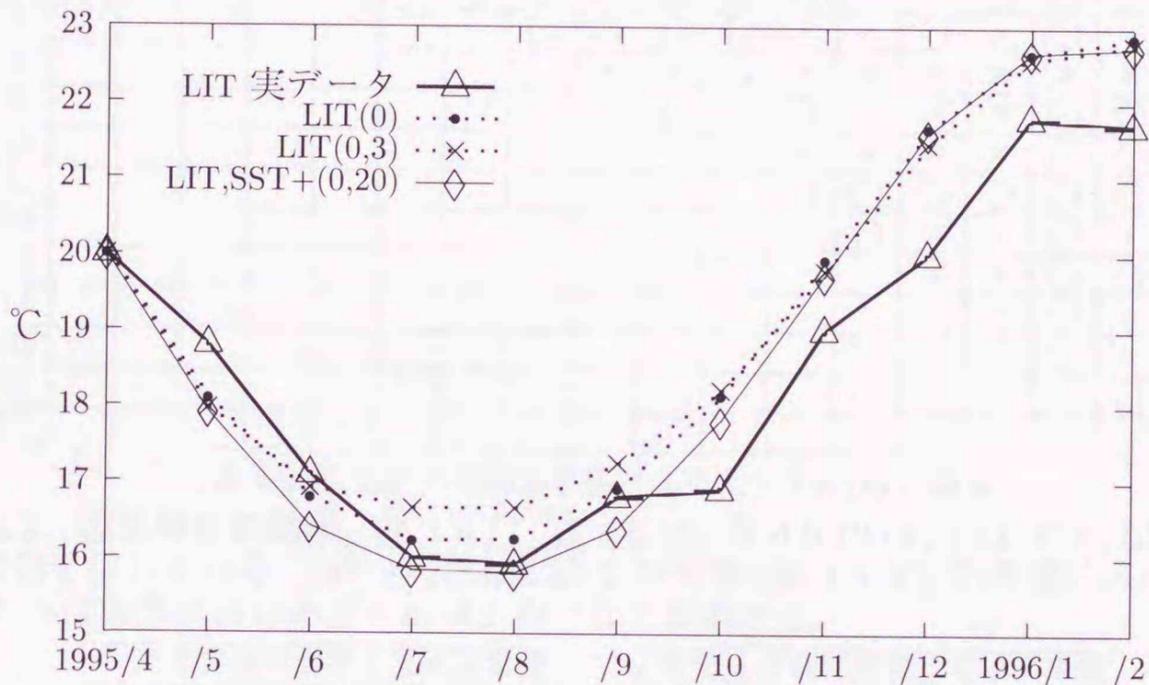


図 4.6.5: LIT に対する予測子

	見本因果値	Test(CS)-2 の判定	R^2	LB(R^2)	FPE
LIT (0)	0.962792	○	0.9362284	0.399399	0.07359075
LIT (0, 3)	0.969292	○	0.9242081	0.575242	0.01142466
LIT,SST+ (0, 20)	0.968371	○	0.9407695	0.575243	0.01521758

表 4.6.14: LIT の予測子に対する重相関係数と FPE

予測子は, 決定性解析から得られたものも, SST の情報を用いたものも差は見られず, いずれも実際の値と合っているように思われる.

理由としては LIT が決定性を持つことからではないかと考えられる. よって, LIT のように決定性を持つ場合は, 他の情報を使って予測するよりもそれ自身の情報のみで予測をする方が良いように思われる.

4.6.3. SST を伴った LIP の解析

この節では, LIP と SST に対して, 前節と同様の観点から解析を行なう.

4.6.3.1. Test(S) の結果. LIP に対する Test(S) の結果を表 4.6.15 と表 4.6.16 に示す. LIT や SST と比較して, Test(S) を通過する非線形変換が多いことがわかる. また, ここには示さないが SST と LIP を組にしたデータに対する Test(S) も行なっている.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
○	○	○	○	×	○	○	×	×	○	○	○	×	×	×	○	○	○	○

表 4.6.15: LIP の非線形変換の 1 次元の Test(S) の結果

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	○	×	○	○	○	○	×	○	○	○	○	×	×	○	○	○	○	○
1		○	○	×	×	○	○	×	○	×	○	×	×	×	×	○	○	○
2			○	○	×	○	×	○	×	○	○	○	×	○	×	○	×	○
3				○	○	○	○	○	○	○	○	○	×	○	○	○	○	○
4					×	○	×	×	○	○	○	×	○	×	×	×	○	○
5						○	×	×	○	○	○	×	○	×	×	○	○	○
6							○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
7								○	○	○	○	×	×	○	×	○	×	○
8									×	×	○	×	×	×	×	×	×	○
9										○	○	○	○	×	×	○	○	○
10											○	×	×	×	×	○	○	×
11												○	○	○	○	○	○	○
12													○	×	×	○	×	○
13														×	×	○	○	×
14															×	○	×	×
15																○	×	×
16																	○	○
17																		○

表 4.6.16: LIP の非線形変換の 2 次元の Test(S) の結果

4.6.3.2. 因果解析の結果. 表 4.6.17, 表 4.6.18, 表 4.6.19 は, SST から LIP への因果関係の結果を示している. LIP の Test(CS)-2 の結果 (表 4.6.20) を考慮に入れると, SST から LIP へは因果関係はあるとは言えないことがわかる.

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.865109
2	(0,16)	0.869533

表 4.6.17: SST から LIP への強因果性の結果

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.882594
2	(0,1)	0.901056

表 4.6.18: SST から LIP への弱因果性の結果

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.882594
2	(0,8)	0.894097

表 4.6.19: SST から LIP への非瞬時的弱因果性の結果

1	0.996510	8	0.948005
2	0.990698	9	0.942140
3	0.985276	10	0.938962
4	0.982224	11	0.937870
5	0.971999	12	0.933526
6	0.955616	13	0.904458
7	0.951329	14	0.892086

表 4.6.20: LIP の Test(CS)-2 の結果

4.6.3.3. 決定解析の結果. 表 4.6.21 に, LIP に対する決定性の結果を示す. LIP に対する Test(CS)-2 の結果 (表 4.6.20) と合わせて, LIP は決定性を持つとは言えないことがわかる.

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.882594
2	(0,3)	0.894097

表 4.6.21: LIP に対する決定性の結果

4.6.3.4. 予測の結果. 図 4.6.6 に, LIP の単独の情報を用いた場合と, LIP と SST の両方の情報を用いた場合の予測子を示す. 表 4.6.22 より, 重相関係数からはいずれの予測子も有意であることがわかる. しかし, 予測子は実際の値に合っているようには見えない.

理由としては、LIP には決定性があるとは言えず、また SST から LIP へも因果関係があるとは言えないからであるように思われる。

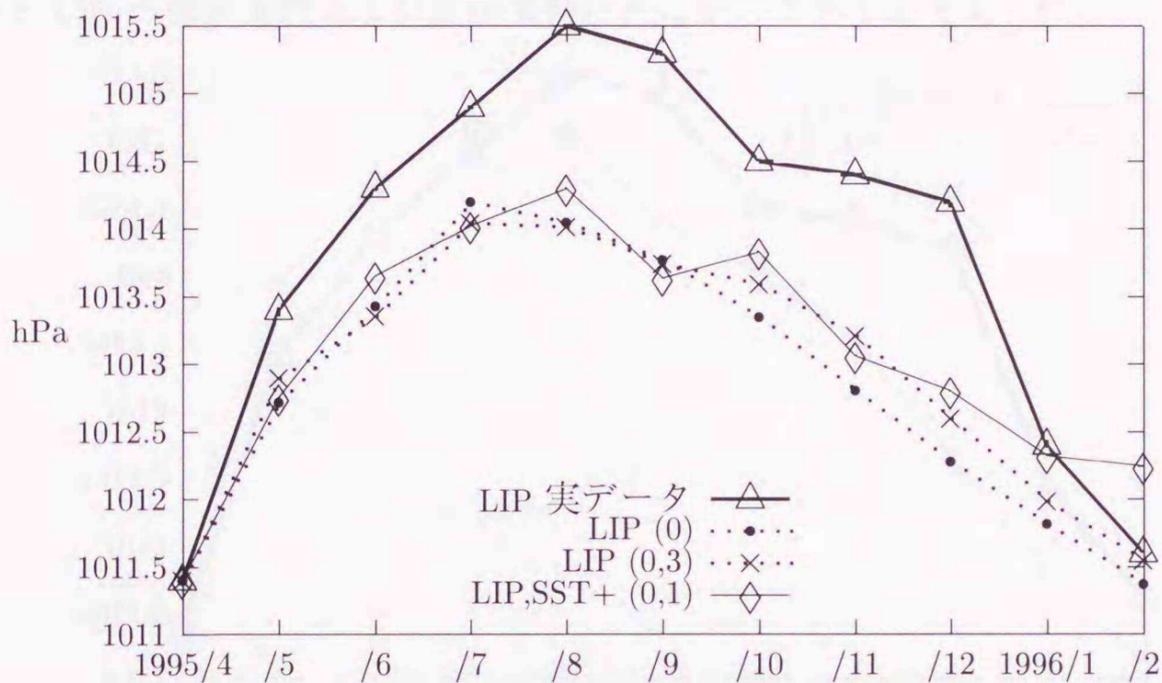


図 4.6.6: LIP に対する予測子

	見本因果値	Test(CS)-2 の判定	R^2	LB(R^2)	FPE
LIP (0)	0.882594	×	0.833442	0.399399	0.205055
LIP (0, 3)	0.894097	×	0.897190	0.575242	0.068677

表 4.6.22: LIP の予測子に対する重相関係数と FPE

4.6.4. LIT を伴った LIP の解析

この節では、LIT から LIP へ因果性があるかどうかを中心に解析を行ない、その情報をもとに LIP の予測を行なう。

4.6.4.1. Test(S) の結果. それぞれの単独の Test(S) の結果については表 4.6.1, 表 4.6.2, 表 4.6.15, 表 4.6.16 で示してある。また、ここには示さないが LIT と LIP を組にしたデータに対する Test(S) も行なっている。

4.6.4.2. 因果解析の結果. 表 4.6.23, 表 4.6.24, 表 4.6.25 は LIT から LIP への因果関係の解析結果である。LIP に対する Test(CS)-2 の結果 (表 4.6.20) と合わせて考えると、LIT から LIP への強因果性と弱因果性があるが、非瞬時的弱因果性は無いことがわかる。

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.929463
2	(0,3)	0.935441

表 4.6.23: LIT から LIP への強因果性の結果

次元	非線形変換	見本因果値
1	(1)	0.929542
2	(1,36)	0.936778

表 4.6.24: LIT から LIP への弱因果性の結果

次元	非線形変換	見本因果値
1	(1)	0.920850
2	(1,36)	0.928766

表 4.6.25: LIT から LIP への非瞬時的弱因果性の結果

4.6.4.3. 決定解析の結果. LIT と LIP の決定性の結果については表 4.6.11 と表 4.6.21 に示してある。

4.6.4.4. 予測の結果. 図 4.6.7 に、LIP と LIT の両方の情報を用いた場合の予測子を示す。表 4.6.26 より、重相関係数からはこの予測子は有意であることがわかり、またこの予測子は実際のデータに合っているように見える。一方、表 4.6.22 から、LIP 単独の情報を使った場合の予測子もまた有意であったが、LIP 自身は決定性を持っておらず、予測子も実際のデータに合っているようには見えなかった。

これらのことを考え合わせると、LIP を予測するには LIP 自身の単独の情報だけではなく、LIT の情報も一緒に用いることが有効であるように思われる。その理由としては LIT から LIP へ強因果性および弱因果性があるからであると考えられる。

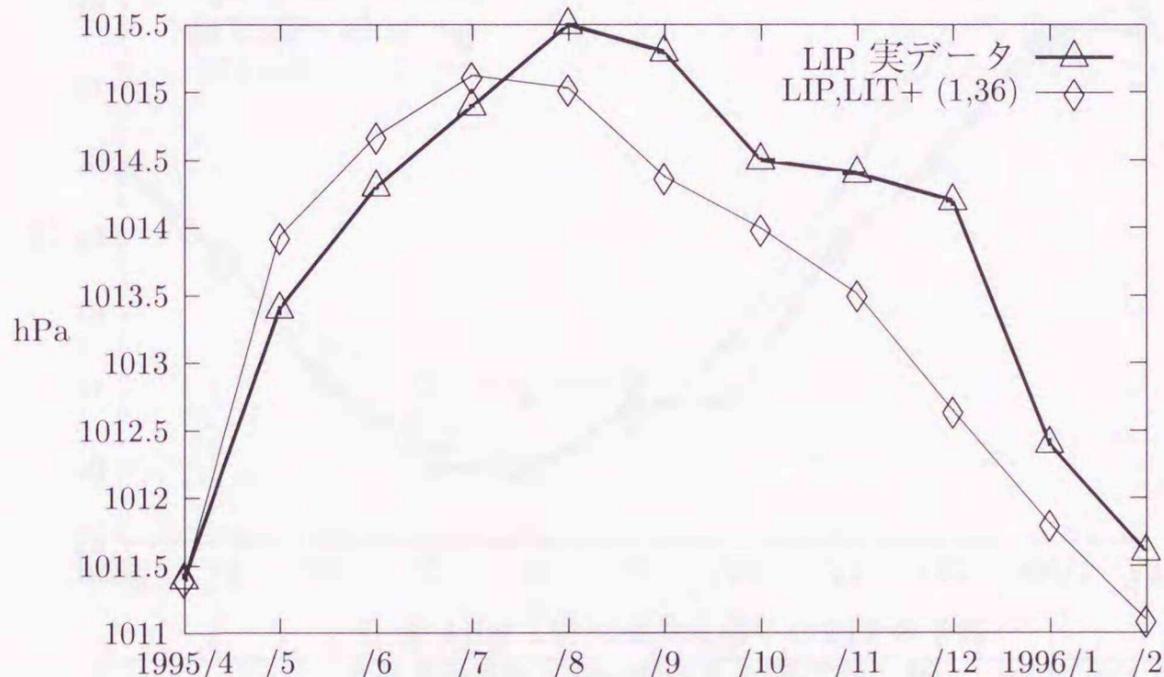


図 4.6.7: LIT の情報も用いた LIP の予測値

	見本因果値	Test(CS)-2 の判定	R^2	LB(R^2)	FPE
LIP, LIT+ (1,36)	0.936778	○	0.776213	0.704142	0.002329

表 4.6.26: LIP の予測値に対する重相関係数と FPE

4.6.5. LIP を伴った LIT の解析

この節では、LIT から LIP へ因果性があるかどうかを中心に解析を行ない、その情報をもとに、LIT の予測を行なう。

4.6.5.1. Test(S) の結果. それぞれの単独の Test(S) の結果については、表 4.6.1, 表 4.6.2, 表 4.6.15, 表 4.6.16 に示してある。また、ここには示さないが LIT と LIP を組にしたデータに対する Test(S) も行なっている。

4.6.5.2. Test(CS) の結果. 表 4.6.27, 表 4.6.28, 表 4.6.29 は LIP から LIT への因果関係の解析結果である。LIT に対する Test(CS)-2 の結果 (表 4.6.8) と合わせて考えると、LIP から LIT へは強因果性、弱因果性、非瞬時的弱因果性があることがわかる。

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.953450
2	(0,6)	0.962297

表 4.6.27: LIP から LIT への強因果性の結果

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.962792
2	(0,1)	0.973069

表 4.6.28: LIP から LIT への弱因果性の結果

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.962792
2	(0,52)	0.969401

表 4.6.29: LIP から LIT への非瞬時的弱因果性の結果

4.6.5.3. 決定解析の結果. それぞれの決定性の結果は表 4.6.11 と表 4.6.21 に示してある。結果としては、LIT は決定性があり、LIP は決定性があるとは言えない。

4.6.5.4. 予測の結果. 図 4.6.8 に LIP の情報も用いた場合の LIT の予測の結果を示す.

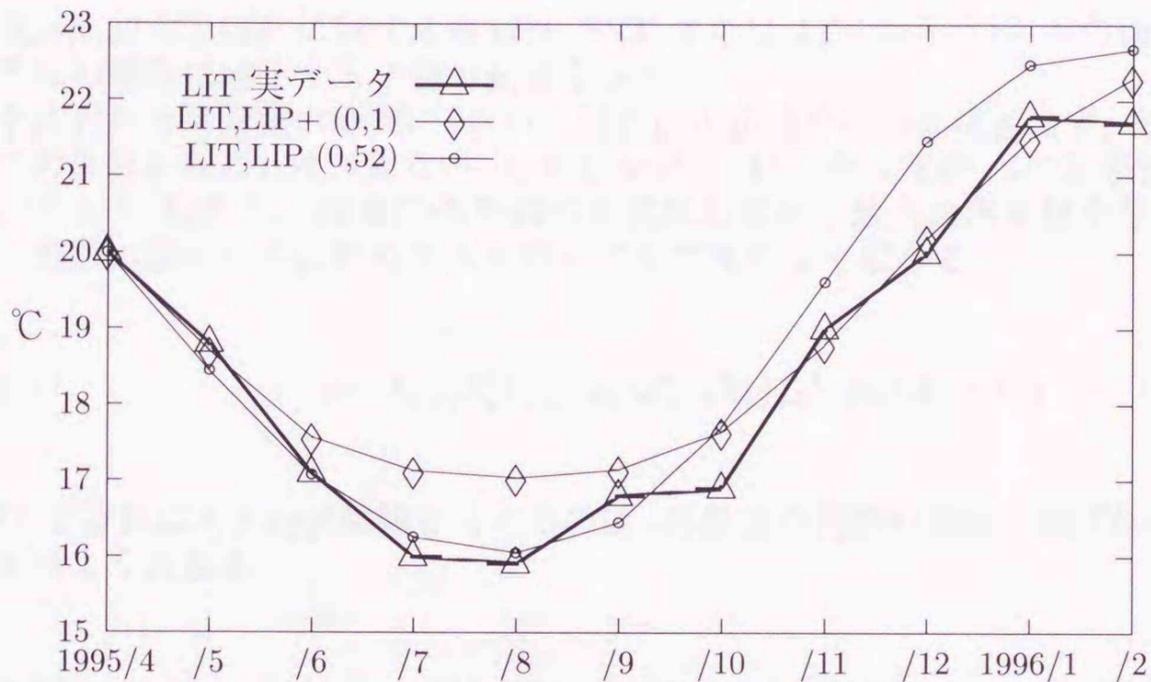


図 4.6.8: LIP の情報を用いた LIT の予測子

	見本因果値	Test(CS)-2 の判定	R^2	LB(R^2)	FPE
LIT, LIP+ (0,1)	0.973069	○	0.958742	0.575242	0.007635
LIT, LIP (0,52)	0.969401	○	0.963443	0.575242	0.021997

表 4.6.30: LIT の予測子に対する重相関係数と FPE

予測子は実際のデータと合っているように見えるが, 4.6.2.4 節で述べたように LIT に決定性があるためであると考えられる.

4.6.6. LIT または LIP の情報を伴った SST の解析

この節では, LIT または LIP から SST への解析結果について見る.

表 4.6.31, 表 4.6.32, 表 4.6.33 が LIT から SST への, 表 4.6.34, 表 4.6.35, 表 4.6.36 が LIP から SST への因果関係の解析結果である. これら結果から LIT から SST, LIP から SST ともいかなる因果関係もあると言えない.

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.897979
2	(0,11)	0.865614

表 4.6.31: LIT から SST への強因果性の結果

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.897979
2	(0,97)	0.916923

表 4.6.32: LIT から SST への弱因果性の結果

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.897979
2	(0,1)	0.916766

表 4.6.33: LIT から SST への非瞬時的弱因果性の結果

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.849893
2	(0,3)	0.871012

表 4.6.34: LIP から SST への強因果性の結果

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.897979
2	(0,1)	0.918709

表 4.6.35: LIP から SST への弱因果性の結果

次元	非線形変換	見本因果値
1	(0)	0.897979
2	(0,22)	0.913024

表 4.6.36: LIP から SST への非瞬時的弱因果性の結果

4.6.7. 解析結果のまとめ

表 4.6.37 に, LIP に対する決定性, SST または LIT から LIP への因果性の結果と, それぞれの場合に対応する予測の結果を示す.

それぞれ有限階数の範囲において, LIP は決定性を持つとは言えず, また SST から LIP への因果性もあるとは言えない. しかしながら, LIT から LIP への因果性はあると言える.

LIT から LIP への因果関係を調べる実験結果から最大の因果値を与えるのは, 弱因果性の実験結果から選ばれた 3次元のモデルで次のようになる:

$$(4.6.2) \quad {}^t(\phi_0(\mathcal{X}_3, (\mathcal{X}_2)_{+1}), \phi_1(\mathcal{X}_3, (\mathcal{X}_2)_{+1}), \phi_{36}(\mathcal{X}_3, (\mathcal{X}_2)_{+1})).$$

また, 2番目に大きい因果値を与えるのは, 因果性の実験結果から選ばれた 3次元のモデルで次のようになる:

$$(4.6.3) \quad {}^t(\phi_0(\mathcal{X}_3), \phi_0((\mathcal{X}_2)_{+1}), \phi_3((\mathcal{X}_2)_{+1})).$$

最大の因果値を与えるモデルの予測子は 図 4.6.7 に示した. この予測子は有意である. またモデル (4.6.2) の FPE よりも, モデル (4.6.3) のそれの方が大きいがこの差に意味があるかどうかはわからない. ただし, 全体的には, LIP 単独の解析結果や, LIP と SST を組にした解析結果よりも, LIP と LIT を組にした解析結果の方が FPE の値は小さいという傾向がある.

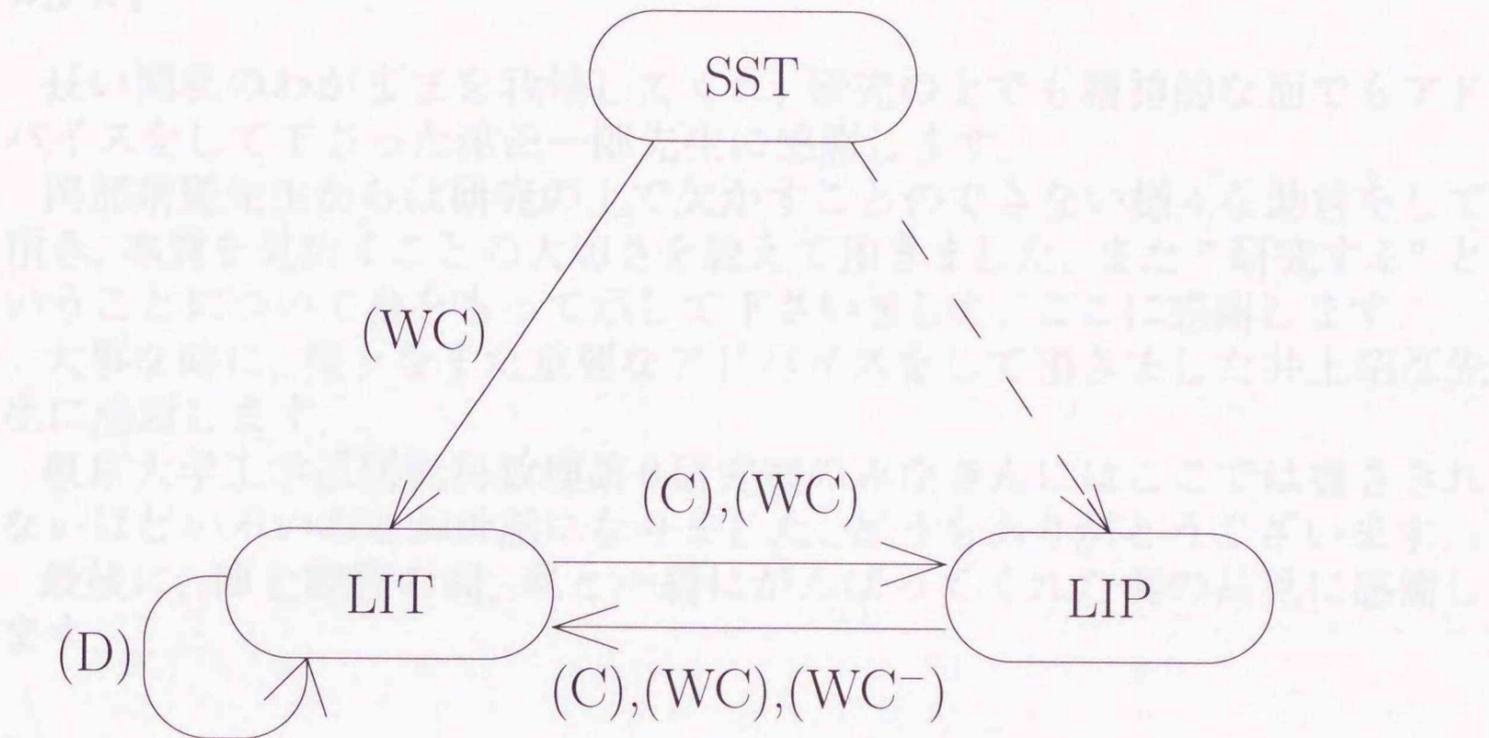
	見本因果値	Test(CS)-2 の判定	R^2	LB(R^2)	FPE
LIP (0)	0.882594	×	0.833442	0.399399	0.205055
LIP (0,3)	0.894097	×	0.897190	0.575242	0.068677
SST(0)	0.865109	×	0.890475	0.575242	0.024980
SST(0,16)	0.869533	×	0.536594	0.704142	0.007271
LIP,SST+ (0)	0.882594	×	0.833442	0.399399	0.205055
LIP,SST(0,1)	0.865109	×	0.890475	0.575242	0.024980
LIP,SST (0)	0.882594	×	0.833442	0.399399	0.205055
LIP,SST (0,8)	0.894097	×	0.897190	0.575242	0.068677
LIT (0)	0.929542	×	0.757093	0.575242	0.007471
LIT (0,3)	0.935441	○	0.753903	0.704142	0.001367
LIP,LIT+ (1)	0.929542	×	0.757093	0.575242	0.007471
LIP,LIT+ (1,36)	0.936778	○	0.776213	0.704142	0.002329
LIP,LIT (1)	0.920850	×	0.775106	0.575242	0.007692
LIP,LIT (1,36)	0.928766	×	0.780537	0.704142	0.001765

表 4.6.37: LIP に対する結果のまとめ (見本因果値, 重相関係数, FPE)

4.6.2 で得られた LIP の予測子 (図 4.6.7) と LIP の決定解析で得られた LIP の予測子 (図 4.6.6) を比べると, 予測解析に対して因果解析における結果を用いることの有効性がわかる.

また SST, LIT, LIP それぞれの間の因果関係の実験結果のまとめを模式的にあらわしたのが 図 4.6.9 である.

SST がわずかながら LIT に影響を与えていること, LIT は決定性をもつこと, LIT と LIP が相互に影響しあっていること等を示している.



謝辞

長い間私のわがままを我慢してくれ、研究の上でも精神的な面でもアドバイスを下さった津田一郎先生に感謝します。

岡部靖憲先生からは研究の上で欠かすことのできない様々な助言をして頂き、本質を見抜くことの大切さを教えて頂きました。また”研究する”ということについて身をもって示して下さいました。ここに感謝します。

大事な時に、様々なまた重要なアドバイスを頂きました井上昭彦先生に感謝します。

東京大学工学系研究科数理第6研究室のみなさんにはここでは書ききれないほどいろいろとお世話になりました。どうもありがとうございます。

最後に、博士課程の間、私と一緒にがんばってくれた妻の昌見に感謝します。

参考文献

- [1] Y. Okabe and A. Kaneko, *On a non-linear prediction analysis for multi-dimensional stochastic processes with its applications to data analysis*, to appear in Hokkaido Math. J.
- [2] 赤池 引次・中川 東一郎, *ダイナミックシステムの統計的解析と制御*, サイエンス社, 1972.
- [3] R. L. Dobrushin and R. A. Minlos, *Polynomials in linear random variables*, Russian Math. Surveys, **32:2**(1977), 71-127.
- [4] J.L. Doob, *Stochastic Processes*, John Wiley, 1953.
- [5] H. Dym and H.P. McKean, *Gaussian Processes, Function Theory, and the Inverse Spectral Problem*, Academic Press, New York, 1976.
- [6] 金子 明人, *KM₂O-ランジュヴァン方程式の理論を応用した多次元の時系列に対する非線形の予測解析*, 北海道大学理学研究科数学専攻修士論文, 1995
- [7] 川嶋 引尚・酒井 英昭, *現代スペクトル解析*, 森北出版, 1989.
- [8] M.G. Krein, *On a fundamental approximation problem in the theory of extrapolation and filtration of stationary random sequences*, Dokl. Akad. Nauk SSR. 94(1954), 13-16.
- [9] N. Levinson, *The Wiener RMS error criterion in filter design and prediction*, J. Math. Phys., 25(1947), 261-278.
- [10] P. Masani and N. Wiener, *Non-linear prediction*, Probability and Statistics, The Harald Cramér, (V.Grenander, ed.), John Wiley, 1959, pp. 190-212.
- [11] M. Matsuura and Y. Okabe, *On a non-linear prediction problem for one-dimensional stochastic processes*, to be submitted in J. Math. Soc. Japan.
- [12] Y. Okabe, *On a stochastic difference equation for the multi-dimensional weakly stationary process with discrete time*, Prospect of Algebraic Analysis (edited by M.Kashiwara and T.Kawai), Academic Press, Tokyo, 1988, 601-645.
- [13] Y. Okabe, *On the theory of KM₂O-Langevin equations for stationary flows (1): characterization theorem*, J. Math. Soc. Japan, 51(1999), 817-841.
- [14] Y. Okabe, *On the theory of KM₂O-Langevin equations for stationary flows (2): construction theorem*, to appear in the special volume in honor of the 70th birthday of Professor Takeyuki Hida, 1999.
- [15] 岡部 靖憲, *揺動散逸定理に基づく非線形時系列解析 — 実証科学としての数学をめざして —*, 出版予定, 日本評論社.
- [16] Y. Okabe and A. Inoue, *The theory of KM₂O-Langevin equations and its applications to data analysis (II): causal analysis (1)*, Nagoya Math. J., **47**(1994), 1-28.
- [17] Y. Okabe and M. Matsuura, *On the theory of KM₂O-Langevin equations for stationary flows (3): extension theorem*, to appear in Hokkaido Math. J., 1999.
- [18] Y. Okabe and Y. Nakano, *The theory of KM₂O-Langevin equations and its applications to data analysis (I): Stationary analysis*, Hokkaido Math. J., 20(1991), 45-90.
- [19] Y. Okabe and T. Ootsuka, *Applications of the theory of KM₂O-Langevin equations to the nonlinear prediction problem for the one dimensional strictly stationary time series*, J. Math. Soc. Japan., **47**(1995), 349-367.
- [20] Y. Okabe and T. Yamane, *The theory of KM₂O-Langevin equations and its applications to data analysis (III): deterministic analysis*, Nagoya Math. J., **152**(1998), 175-201.

付録

A. 非線形変換の具体例

A.1. d 次元の場合の階数 q の非線形変換の例

$$(A.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{d_{q-1}+1}(\mathbf{Z}) = (Z_1(n)^q; l \leq n \leq r) \\ \varphi_{d_{q-1}+2}(\mathbf{Z}) = (Z_1(n)^{q-1} Z_2(n); l \leq n \leq r) \\ \varphi_{d_{q-1}+3}(\mathbf{Z}) = (Z_1(n)^{q-1} Z_3(n); l \leq n \leq r) \\ \vdots \\ \varphi_{d_{q-1}+d}(\mathbf{Z}) = (Z_1(n)^{q-1} Z_d(n); l \leq n \leq r) \\ \varphi_{d_{q-1}+d+1}(\mathbf{Z}) = (Z_1(n)^{q-2} Z_1(n)^2; l \leq n \leq r) \\ \varphi_{d_{q-1}+d+2}(\mathbf{Z}) = (Z_1(n)^{q-2} Z_1(n) Z_2(n); l \leq n \leq r) \\ \varphi_{d_{q-1}+d+3}(\mathbf{Z}) = (Z_1(n)^{q-2} Z_1(n) Z_3(n); l \leq n \leq r) \\ \varphi_{d_{q-1}+d+4}(\mathbf{Z}) = (Z_1(n)^{q-2} Z_1(n) Z_4(n); l \leq n \leq r) \\ \vdots \\ \varphi_{d_q-2}(\mathbf{Z}) = (Z_d(n) Z_{d-2}(n-q+2); l+q-2 \leq n \leq r) \\ \varphi_{d_q-1}(\mathbf{Z}) = (Z_d(n) Z_{d-1}(n-q+2); l+q-2 \leq n \leq r) \\ \varphi_{d_q}(\mathbf{Z}) = (Z_d(n) Z_d(n-q+2); l+q-2 \leq n \leq r) \end{array} \right.$$

A.2. 1次元および2次元の場合の階数6までの非線形変換

0	$Z_1(n)$	10	$Z_1(n)Z_1(n-1)^2$
1	$Z_1(n)^2$	11	$Z_1(n)Z_1(n-3)$
2	$Z_1(n)^3$	12	$Z_1(n)^6$
3	$Z_1(n)Z_1(n-1)$	13	$Z_1(n)^4 Z_1(n-1)$
4	$Z_1(n)^4$	14	$Z_1(n)^3 Z_1(n-2)$
5	$Z_1(n)^2 Z_1(n-1)$	15	$Z_1(n)^2 Z_1(n-1)^2$
6	$Z_1(n)Z_1(n-2)$	16	$Z_1(n)^2 Z_1(n-3)$
7	$Z_1(n)^5$	17	$Z_1(n)Z_1(n-1)Z_1(n-2)$
8	$Z_1(n)^3 Z_1(n-1)$	18	$Z_1(n)Z_1(n-4)$
9	$Z_1(n)^2 Z_1(n-2)$		

表 A.2: 1次元の非線形変換

0	$Z_1(n)$	37	$Z_1(n)^2 Z_2(n-2)$	74	$Z_1(n)^2 Z_1(n-1) Z_2(n-1)$
1	$Z_2(n)$	38	$Z_1(n) Z_2(n)^4$	75	$Z_1(n)^2 Z_2(n-1)^2$
2	$Z_1(n)^2$	39	$Z_1(n) Z_2(n)^2 Z_1(n-1)$	76	$Z_1(n)^2 Z_1(n-3)$
3	$Z_1(n) Z_2(n)$	40	$Z_1(n) Z_2(n)^2 Z_2(n-1)$	77	$Z_1(n)^2 Z_2(n-3)$
4	$Z_2(n)^2$	41	$Z_1(n) Z_2(n) Z_1(n-2)$	78	$Z_1(n) Z_2(n)^5$
5	$Z_1(n)^3$	42	$Z_1(n) Z_2(n) Z_2(n-2)$	79	$Z_1(n) Z_2(n)^3 Z_1(n-1)$
6	$Z_1(n)^2 Z_2(n)$	43	$Z_1(n) Z_1(n-1)^2$	80	$Z_1(n) Z_2(n)^3 Z_2(n-1)$
7	$Z_1(n) Z_2(n)^2$	44	$Z_1(n) Z_1(n-1) Z_2(n-1)$	81	$Z_1(n) Z_2(n)^2 Z_1(n-2)$
8	$Z_1(n) Z_1(n-1)$	45	$Z_1(n) Z_2(n-1)^2$	82	$Z_1(n) Z_2(n)^2 Z_2(n-2)$
9	$Z_1(n) Z_2(n-1)$	46	$Z_1(n) Z_1(n-3)$	83	$Z_1(n) Z_2(n) Z_1(n-1)^2$
10	$Z_2(n)^3$	47	$Z_1(n) Z_2(n-3)$	84	$Z_1(n) Z_2(n) Z_1(n-1) Z_2(n-1)$
11	$Z_2(n) Z_1(n-1)$	48	$Z_2(n)^5$	85	$Z_1(n) Z_2(n) Z_2(n-1)^2$
12	$Z_2(n) Z_2(n-1)$	49	$Z_2(n)^3 Z_1(n-1)$	86	$Z_1(n) Z_2(n) Z_1(n-3)$
13	$Z_1(n)^4$	50	$Z_2(n)^3 Z_2(n-1)$	87	$Z_1(n) Z_2(n) Z_2(n-3)$
14	$Z_1(n)^3 Z_2(n)$	51	$Z_2(n)^2 Z_1(n-2)$	88	$Z_1(n) Z_1(n-1) Z_1(n-2)$
15	$Z_1(n)^2 Z_2(n)^2$	52	$Z_2(n)^2 Z_2(n-2)$	89	$Z_1(n) Z_1(n-1) Z_2(n-2)$
16	$Z_1(n)^2 Z_1(n-1)$	53	$Z_2(n) Z_1(n-1)^2$	90	$Z_1(n) Z_2(n-1) Z_1(n-2)$
17	$Z_1(n)^2 Z_2(n-1)$	54	$Z_2(n) Z_1(n-1) Z_2(n-1)$	91	$Z_1(n) Z_2(n-1) Z_2(n-2)$
18	$Z_1(n) Z_2(n)^3$	55	$Z_2(n) Z_2(n-1)^2$	92	$Z_1(n) Z_1(n-4)$
19	$Z_1(n) Z_2(n) Z_1(n-1)$	56	$Z_2(n) Z_1(n-3)$	93	$Z_1(n) Z_2(n-4)$
20	$Z_1(n) Z_2(n) Z_2(n-1)$	57	$Z_2(n) Z_2(n-3)$	94	$Z_2(n)^6$
21	$Z_1(n) Z_1(n-2)$	58	$Z_1(n)^6$	95	$Z_2(n)^4 Z_1(n-1)$
22	$Z_1(n) Z_2(n-2)$	59	$Z_1(n)^5 Z_2(n)$	96	$Z_2(n)^4 Z_2(n-1)$
23	$Z_2(n)^4$	60	$Z_1(n)^4 Z_2(n)^2$	97	$Z_2(n)^3 Z_1(n-2)$
24	$Z_2(n)^2 Z_1(n-1)$	61	$Z_1(n)^4 Z_1(n-1)$	98	$Z_2(n)^3 Z_2(n-2)$
25	$Z_2(n)^2 Z_2(n-1)$	62	$Z_1(n)^4 Z_2(n-1)$	99	$Z_2(n)^2 Z_1(n-1)^2$
26	$Z_2(n) Z_1(n-2)$	63	$Z_1(n)^3 Z_2(n)^3$	100	$Z_2(n)^2 Z_1(n-1) Z_2(n-1)$
27	$Z_2(n) Z_2(n-2)$	64	$Z_1(n)^3 Z_2(n) Z_1(n-1)$	101	$Z_2(n)^2 Z_2(n-1)^2$
28	$Z_1(n)^5$	65	$Z_1(n)^3 Z_2(n) Z_2(n-1)$	102	$Z_2(n)^2 Z_1(n-3)$
29	$Z_1(n)^4 Z_2(n)$	66	$Z_1(n)^3 Z_1(n-2)$	103	$Z_2(n)^2 Z_2(n-3)$
30	$Z_1(n)^3 Z_2(n)^2$	67	$Z_1(n)^3 Z_2(n-2)$	104	$Z_2(n) Z_1(n-1) Z_1(n-2)$
31	$Z_1(n)^3 Z_1(n-1)$	68	$Z_1(n)^2 Z_2(n)^4$	105	$Z_2(n) Z_1(n-1) Z_2(n-2)$
32	$Z_1(n)^3 Z_2(n-1)$	69	$Z_1(n)^2 Z_2(n)^2 Z_1(n-1)$	106	$Z_2(n) Z_2(n-1) Z_1(n-2)$
33	$Z_1(n)^2 Z_2(n)^3$	70	$Z_1(n)^2 Z_2(n)^2 Z_2(n-1)$	107	$Z_2(n) Z_2(n-1) Z_2(n-2)$
34	$Z_1(n)^2 Z_2(n) Z_1(n-1)$	71	$Z_1(n)^2 Z_2(n) Z_1(n-2)$	108	$Z_2(n) Z_1(n-4)$
35	$Z_1(n)^2 Z_2(n) Z_2(n-1)$	72	$Z_1(n)^2 Z_2(n) Z_2(n-2)$	109	$Z_2(n) Z_2(n-4)$
36	$Z_1(n)^2 Z_1(n-2)$	73	$Z_1(n)^2 Z_1(n-1)^2$		

表 A.3: 2次元の非線形変換

B. 定常性テスト: Test(S)

本節では、与えられた時系列の定常性をテストする方法について述べる。この方法は、[18]で始めて論じられた。また [21]において定常性を判定基準を再検討するための大規模な数値実験が行われ、一部基準が改良された。ここで述べる方法は [21]での得られた結果も含む方法である。なお、時系列解析との関連やデータ解析などの実例は [15]に詳しく述べられている。

この節では任意の $N+1$ 個のデータ $Z(n) (\in \mathbb{R}^d)$ からなる d 次元時系列 $Z = (Z(n); 0 \leq n \leq N)$ が与えられたとする:

$$(B.1) \quad Z(n) = {}^t(Z_1(n), Z_2(n), \dots, Z_d(n)).$$

B.1. 一般の場合と Test(S) の関係

Z が定常性を満たすための必要十分条件は、任意の $j, k (1 \leq j, k \leq d)$ に対して、データ $Z_{jk} = {}^t(Z_j, Z_k)$ が定常性を満たすことである。すなわち、1次元または2次元の場合に定常性があるかどうか調べられると、一般の場合にもこれを適用できる。よって以下では、 d が 1 または 2 の場合について述べる。

B.2. データに対する定常性の定義

Z を規格化した時系列を \tilde{Z} , その見本共分散行列関数を $R^{\tilde{Z}} = R^{\tilde{Z}}(n) (|n| \leq N)$ とする。データ \tilde{Z} が定常性を満たすとは

$$(S-\tilde{Z}) \quad \begin{cases} \text{時系列 } \tilde{Z} \text{ が } R^{\tilde{Z}} \text{ を共分散行列関数とする} \\ d \text{ 次元弱定常過程 } \mathbf{X} = (X(n); 0 \leq n \leq N) \text{ の実現値である} \end{cases}$$

と定義する。

B.3. Test(S) の方法

[第1段] 4.1節で説明したように、 \tilde{Z} の見本共分散行列関数 $R^{\tilde{Z}} = R^{\tilde{Z}}(n) (0 \leq n \leq M)$ の定義域は 0 から M までである。 M は式 (4.1.4) で定まっている。それに伴って、信頼できる見本 KM_2O -ランジュヴァン行列 $LM(\tilde{Z})$ は (B.2) である:

$$(B.2) \quad LM(\tilde{Z}) = \{\gamma_{\pm}(\tilde{Z})(n, k), \delta_{\pm}(\tilde{Z})(n), V_{\pm}(\tilde{Z})(l); \\ 1 \leq n \leq M, 0 \leq k \leq n-1, 0 \leq l \leq M\}.$$

時系列 $\tilde{Z} = (\tilde{Z}(n); 0 \leq n \leq N)$ の出発点の時刻を $i (0 \leq i \leq N-M)$ にずらすことによって、データ $\tilde{Z}(i+n) (0 \leq n \leq M)$ から $M+1$ 個の時系列 $\tilde{Z}_i = (\tilde{Z}_i(n); 0 \leq n \leq M)$ を構成する:

$$(B.3) \quad \tilde{Z}_i(n) \equiv \tilde{Z}(i+n) \quad (0 \leq n \leq M).$$

目的は「時系列 \tilde{Z} の定常性」を示すことであつた。もし、この時系列が定常性をもつならば、 \tilde{Z}_i も同じ構造をもっている筈である。すなわち時系列 \tilde{Z}_i は時系列 \tilde{Z} の「コピー」と見なせる筈である。この考え方に従って、同一の見本共分散関数をこれらの $M+1$ 個のそれぞれのデータに適用して、 $M+1$ 回のテストを実行する

以下、第2段から第4段において、任意の $i \in \{0, 1, \dots, N-M\}$ を固定する。

[第2段] 見本 KM_2O -ランジュヴァン行列 $\mathcal{LM}(\tilde{\mathcal{Z}})$ を用いて, 時系列 $\tilde{\mathcal{Z}}_i$ から見本前向き KM_2O -ランジュヴァン揺動流 $\nu_+(\tilde{\mathcal{Z}}_i) = (\nu_+(\tilde{\mathcal{Z}}_i)(n); 0 \leq n \leq M)$ を抜き出す:

$$(B.4) \quad \nu_+(\tilde{\mathcal{Z}}_i)(n) \equiv \tilde{\mathcal{Z}}_i(n) + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_+(\tilde{\mathcal{Z}})(n, k) \tilde{\mathcal{Z}}_i(k) \quad (0 \leq n \leq M).$$

[第3段] 各 n ($0 \leq n \leq M$) に対して, $d \times d$ 下三角行列 $W_+(n)$ で

$$(B.5) \quad V_+(\tilde{\mathcal{Z}})(n) = W_+(n) {}^t W_+(n)$$

を満たすものをとる. $d=1$ のとき, $W_+(n)$ は

$$(B.6) \quad W_+(n) \equiv \sqrt{V_+(\tilde{\mathcal{Z}})(n)}$$

と求まり, $d=2$ のときは, 行列 $V_+(\tilde{\mathcal{Z}})(n)$ の成分を

$$(B.7) \quad V_+(\tilde{\mathcal{Z}})(n) = \begin{pmatrix} V_{+11}(\tilde{\mathcal{Z}})(n) & V_{+12}(\tilde{\mathcal{Z}})(n) \\ V_{+21}(\tilde{\mathcal{Z}})(n) & V_{+22}(\tilde{\mathcal{Z}})(n) \end{pmatrix}$$

とするとき, 行列 $W_+(n)$:

$$(B.8) \quad W_+(n) = \begin{pmatrix} W_{+11}(n) & W_{+12}(n) \\ W_{+21}(n) & W_{+22}(n) \end{pmatrix}$$

は次のように求まる:

$$(B.9) \quad \begin{cases} W_{+11}(n) \equiv \sqrt{V_{+11}(\tilde{\mathcal{Z}})(n)} \\ W_{+12}(n) \equiv 0 \\ W_{+21}(n) \equiv \frac{V_{+12}(\tilde{\mathcal{Z}})(n)}{\sqrt{V_{+11}(\tilde{\mathcal{Z}})(n)}} \\ W_{+22}(n) \equiv \frac{\sqrt{V_{+11}(\tilde{\mathcal{Z}})(n)V_{+22}(\tilde{\mathcal{Z}})(n) - V_{+12}(\tilde{\mathcal{Z}})(n)^2}}{\sqrt{V_{+11}(\tilde{\mathcal{Z}})(n)}}. \end{cases}$$

[第4段] (B.5) の行列 $W_+(n)$ を用いて, d 次元時系列 $\xi_{+i} = (\xi_{+i}(n); 0 \leq n \leq M)$ を

$$(B.10) \quad \xi_{+i}(n) \equiv W_+(n)^{-1} \nu_+(\tilde{\mathcal{Z}}_i)(n)$$

で定め, そのベクトル表示を

$$(B.11) \quad \xi_{+i}(n) = {}^t(\xi_{+i1}(n), \xi_{+i2}(n), \dots, \xi_{+id}(n))$$

とする. これらの $d(M+1)$ 個のデータ $\xi_{+ij}(n)$ を次のように1列に並べて, 1次元時系列 $\xi_i = (\xi_i(n); 0 \leq n \leq d(M+1) - 1)$ を構成する:

$$(B.12) \quad \xi_i \equiv (\xi_{+i1}(0), \dots, \xi_{+id}(0), \xi_{+i1}(1), \dots, \xi_{+id}(1), \dots, \xi_{+i1}(M), \dots, \xi_{+id}(M)).$$

[第5段] 2章の定理 2.1.5 により次のこと

(S- ξ_i) 1次元時系列 ξ_i は弱い意味でのホワイトノイズ ν_i の実現値である

が成り立つ i ($0 \leq i \leq N - M$) の割合が大きいと, 時系列 $\tilde{\mathcal{Z}}$ の定常性 (S- $\tilde{\mathcal{Z}}$) は成り立っていると考えられる.

[第6段] 各 i ($0 \leq i \leq N - M$) を固定したとき, (S- ξ_i) の検定のために, 1次元時系列 ξ_i の見本平均 μ^{ξ_i} , 見本擬似分散 v^{ξ_i} , 見本擬似共分散関数の系 $R^{\xi_i}(n; m)$ ($0 \leq n \leq L, 0 \leq$

$m \leq L - n$) を定義する:

$$(B.13) \quad \mu^{\xi_i} \equiv \frac{1}{d(M+1)} \sum_{k=0}^{d(M+1)-1} \xi_i(k)$$

$$(B.14) \quad v^{\xi_i} \equiv \frac{1}{d(M+1)} \sum_{k=0}^{d(M+1)-1} \xi_i(k)^2$$

$$(B.15) \quad R^{\xi_i}(n; m) \equiv \frac{1}{d(M+1)} \sum_{k=m}^{d(M+1)-1-n} \xi_i(k) \xi_i(n+k).$$

$m = 0$ のときの関数 $R^{\xi_i}(n; 0)$ が 1 次元時系列 $\xi_i = (\xi_i(n); 0 \leq n \leq d(M+1) - 1)$ の見本擬似共分散関数である. L は

$$(B.16) \quad L \equiv [2\sqrt{d(M+1)}] - 1$$

で定まる見本擬似共分散関数 $R^{\xi_i}(n; 0)$ の信頼できる n の最小の数である.

問題は, $(S-\xi_i)$ が成り立っているとき

$$(B.17) \quad \begin{cases} \mu^{\xi_i}, v^{\xi_i} - 1, R^{\xi_i}(n; m) \quad (1 \leq n \leq L, 0 \leq m \leq L - n) \text{ が} \\ 0 \text{ に近い割合を定める規準} \end{cases}$$

を与えることである. 以下において, 時系列 ξ_i を実現値にもつホワイトノイズ ν_i の直交性を独立性に置き換えて, 規準 (B.17) を定めることにする.

以下, μ^{ξ_i} に関して基準 $(\mathbf{M})_i$, $v^{\xi_i} - 1$ に関して基準 $(\mathbf{V})_i$, $R^{\xi_i}(n; m)$ に関して基準 $(\mathbf{V})_i$ を定める.

[第 6.1 段] 規準 $(\mathbf{M})_i$ を満たすとは, 不等式

$$(B.18) \quad \sqrt{d(M+1)} |\mu^{\xi_i}| < 1.96$$

が成立する時を言う.

[第 6.2 段] 規準 $(\mathbf{V})_i$ を満たすとは, 不等式

$$(B.19) \quad |(v^{\xi_i} - 1)^\sim| < 2.2414$$

が成立する時を言う.

[第 6.3 段] 規準 $(\mathbf{O})_i$ を満たすとは, 不等式

$$(B.20) \quad d(M+1) (\sqrt{L_{n,m}^{(1)}} + \sqrt{L_{n,m}^{(2)}})^{-1} |R^{\xi_i}(n; m)| < 1.96$$

が成立する時を言う. ただし $d(M+1) - 1, m$ を共に $2n$ で割り, 商をそれぞれ q, s , 余りをそれぞれ r, t とし, $L_{n,m}^{(1)}, L_{n,m}^{(2)}$ は r が $0 \leq r \leq n - 1$ を満たすときは

$$(B.21) \quad \begin{cases} L_{n,m}^{(1)} = \begin{cases} n(q+s) - m & (0 \leq t \leq n-1) \\ n(q-s-1) & (n \leq t \leq 2n-1) \end{cases} \\ L_{n,m}^{(2)} = \begin{cases} n(q-s-1) + r + 1 & (0 \leq t \leq n-1) \\ n(q+s) + r + 1 - m & (n \leq t \leq 2n-1) \end{cases} \end{cases}$$

で与えられ, r が $n+1 \leq r \leq 2n-1$ を満たすときは

$$(B.22) \quad \begin{cases} L_{n,m}^{(1)} = \begin{cases} n(q+s-1) + r + 1 - m & (0 \leq t \leq n-1) \\ n(q-s-2) + r + 1 & (n \leq t \leq 2n-1) \end{cases} \\ L_{n,m}^{(2)} = \begin{cases} n(q-s) & (0 \leq t \leq n-1) \\ n(q+s+1) - m & (n \leq t \leq 2n-1). \end{cases} \end{cases}$$

で与えられる.

まとめると, 規準 $(S-\xi_i)$ の検定は次の三つの規準 $(M)_i, (V)_i, (O)_i$ によってチェックされる.

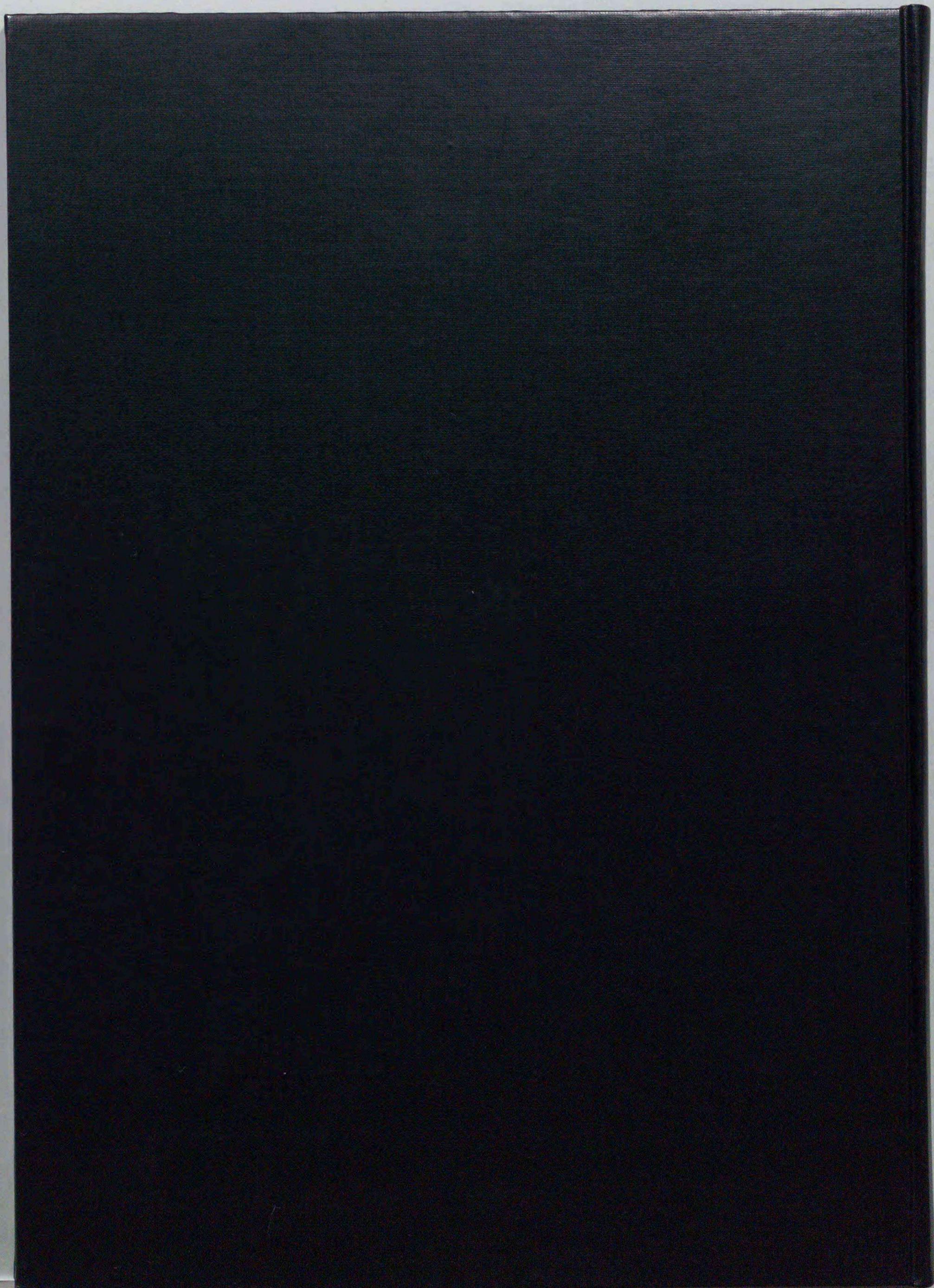
$$(B.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{規準 } (M)_i: \text{ 不等式 (B.18) が成立する} \\ \text{規準 } (V)_i: \text{ 不等式 (B.19) が成立する} \\ \text{規準 } (O)_i: \text{ 不等式 (B.20) が成立する割合} \\ \qquad \qquad \qquad (1 \leq n \leq L, 0 \leq m \leq L-n) \text{ が 9 割以上.} \end{array} \right.$$

規準 $(O)_i$ は, [18] では, 全ての n, m について成立することを要請していたが, [21] における大規模な数値実験により 9 割以上が成立とするのがより良い規準であることがわかった. 各規準の導出に関しては [15] に詳しく述べられている.

[第7段] 最後に, 時系列 $Z = (Z(n); 0 \leq n \leq N)$ に対する定常性のテスト-Test(S)-とは

$$\text{Test(S)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{規準 } (M)_i \text{ が通過する割合 } (0 \leq i \leq N-M) \text{ が 8 割以上} \\ \text{規準 } (V)_i \text{ が通過する割合 } (0 \leq i \leq N-M) \text{ が 7 割以上} \\ \text{規準 } (O)_i \text{ が通過する割合 } (0 \leq i \leq N-M) \text{ が 8 割以上} \end{array} \right.$$

のことを言う. Test(S) を通過するとき, 時系列 Z は定常性をもつと言う.

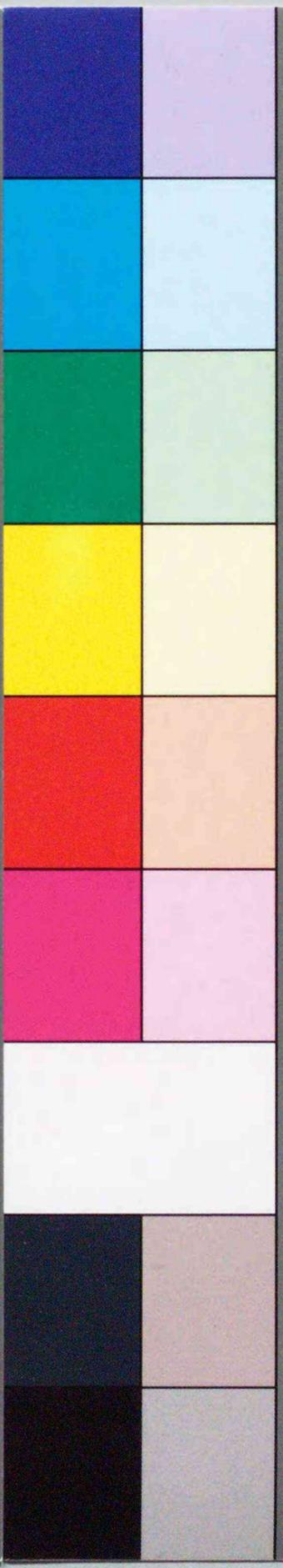


Inches 1 2 3 4 5 6 7 8
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM: Kodak

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black



Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

