経済学研究　*62－2*
北海道大学　**2013.1**

2集団マッチングについて

――メカニズム・デザイン――

田　中　嘉　浩

1．はじめに

選挙，市場，オークション，政策等，異なる選好を持つ人々の間で集団としての選好を決めなければならないことが多い。

古くは1785年にフランスのCondorcetにより，多数決投票に関する矛盾が提起されていたが，それに関連してArrowは満場一致性，無関係な他者からの独立性，非独裁性を持つ社会厚生関数は存在しないという不可能性定理（impossibility theorem, 1950）を確立した。より一般的には，耐戦略性を持つ，上への社会選択関数は独裁的であるというGibbard-Satterthwaiteの定理が示されており，公平な社会選択関数の構成は不可能にも思われてきた。

そこで，選好を各自の価値が数量化され金銭の支払いを伴うオークションの様に特殊化すること等により，耐戦略性を持つメカニズム（第2価格オークション）が考案されてきた[18]。他には選好の領域を小さくすることによって耐戦略性を持たす方向性があり，家の割り当て問題やマッチング問題はその範疇に入るとみなすことができる。メカニズム・デザインの理論構築に関して多くの研究が為されているが，中でもHurwicz, Maskin, Myersonが2007年ノーベル経済学賞を受賞したことは記憶に新しい。

本稿では，2集団マッチング，中でも安定結婚問題として知られる1対1マッチングについてその代表アルゴリズムであるDAアルゴリズムを述べ，その性質や問題点について明らかにしていきたい。

2．準　備

個人の集合をN，但し$|N|=n\geq 2$，選択の集合をA，但し$|A|\geq 3$とする。Aの順列集合をΣとし，個人iの選好を$\succsim_i\in\Sigma$，全員の選好を纏めた選好プロファイルを$p=\succsim=(\succsim_1,\ldots,\succsim_n)$とする。

社会選択関数（social choice function）$f:\Sigma^n\to A$は，選挙の様に選好プロファイルから選択を選ぶ関数である。次の2つの仮定が置かれる。

満場一致性（unanimity）：プロファイルpのどの個人も$a\in A$を第1選好にするならば，$f(p)=a$である。

単調性（monotonicity）：$f(\succsim_1,\ldots,\succsim_n)=a$と仮定する。どの個人も$x\succsim_i' a$ならば$x\succsim_i a$となるならば，$f(\succsim_1',\ldots,\succsim_n')=a$が成立する。

ところで，社会選択関数は，個人iの第1選好がaならば必ず$f(p)=a$となる個人iが存在する時に独裁性がある（dictatorial）という。

今，$\succsim_{-i}=(\succsim_1,\ldots,\succsim_{i-1},\succsim_{i+1},\ldots\succsim_n)$と記す。社会選択関数は，任意の個人$i$だけが選好$\succsim_i$を選好$\succsim_i'$に変えた時に，どんな$\succsim_i'$に対しても$f(\succsim_i,\succsim_{-i})\succsim_i f(\succsim_i',\succsim_{-i})$が成立するならば，耐戦略性がある（strategy-proof）という。任意の耐戦略性を持つ上への社会選択関数$f:\Sigma^n\to A$

は満場一致性と単調性の両方を満たすことと同値である。耐戦略性を持たないと個人 i が選好を虚偽申告する動機ができてしまい，好ましくない。

しかしながら，以下の様な否定的結果が知られている。

定理1（*Gibbard [7] -Satterthwaite [12]* の定理）任意の耐戦略性を持つ上への社会選択関数 $f:\Sigma^n \to A$ は独裁性を満たす。 ■

社会厚生関数に関する同等の内容が Arrow の不可能性定理であるが，本稿ではマッチングを与える関数を主に考えるので，Gibbard-Satterthwaite の定理を挙げた。

本稿では1対1マッチングを主に扱う。

男性の集合 M，女性の集合 W に対して，男性 $m \in 1,...,|M|$，女性 $w \in |M|+1,...,|M|+|W|$ のその他方の集合に対する選好 $\gtrsim_{mi}$，$i=1,...,|M|$, $\gtrsim_{wi}$, $i=1,...,|W|$ を，

$\gtrsim_{mi}$: $W \cup \{\phi\}$ の順列の要素，$i=1,...,|M|$,

$\gtrsim_{wi}$: $M \cup \{\phi\}$ の順列の要素，$i=1,...,|W|$

但し $\{\phi\}$ は独身とするとし，男女の選好を纏めて，

$$\gtrsim\;=(\gtrsim_{m1},...,\gtrsim_{m|M|},\gtrsim_{w1},...,\gtrsim_{w|W|})$$

とする。男性・女性の双方に高々1人しか割り当てない時にマッチングといい，$|M|=|W|=n$ と仮定できる。例えば全員の $\{\phi\}$ 要素を $n'(n' \leq n)$ 番目に固定することで $n'-1$ 番目迄の選好しか分らない不完全情報の場合を扱うこともできることに注意しよう。

マッチングは，男性 m, m'，女性 w, w' の間に，(m, w)，(m', w') というマッチングがある時に，

$$w' >_m w \quad かつ \quad m >_{w'} m' \tag{1}$$

ならば，安定でないという。この時に (m, w') は現在のマッチングを破棄してペアになる公算が高く，ブロッキング・ペア（blocking pair）と呼ばれる。安定マッチング（stable matching）はブロッキング・ペアがないマッチングであり，任意の選好に対して安定マッチングが存在するかがまず問題である。

3．DA アルゴリズム

1960年代初めに，Gale and Shapley [6] は，多対1マッチングになる，大学毎に定員がある大学入試の問題の本質を抽象化して，1対1マッチングである安定結婚問題とそれを解く DA（Deferred Acceptance）アルゴリズム（受入保留アルゴリズム；または Gale-Shapley アルゴリズム）を与えている。本稿では許容な相手への制限や独身の場合を含む拡張された設定でのアルゴリズムを与える。

DA アルゴリズムに関する本節において，個人の選好は狭義の選好（strict preference）$>_i$ と仮定する。マッチング M に関して，点（人）i がマッチングを構成する辺の端点に含まれる時に i は飽和であるという。

図1 に DA アルゴリズムを示した。その中で現在の相手*c は0もあり得る。0は独身 ϕ を選ぶことに対応する。

安定結婚問題では，男性からプロポーズする場合は $S=M$，$T=W$，初期の E を完全2部グラフの辺として（即ち，$Q(i):=W\cup\{0\}$），上のアルゴリズムを適用すればいい。

DA アルゴリズムから高々 $O(n^3)$ の計算量で安定マッチングが必ず出力されることが分るが，存在の構成的証明になっている。

マッチングを μ で表すと男性 m のマッチングの相手は $\mu(m)$，女性 w のマッチングの相手は $\mu(w)$ と表せる。マッチング μ は，全ての $m \in M$ に対して $\nu(m) \gtrsim_m \mu(m)$ であって，少なくとも1人の $j \in M$ に対して $\nu(j) >_j \mu(j)$ となることがない時に，男性最適（male-optimal）という。

入力: 無向ネットワーク $N=(S+T;E;>)$
出力: 安定マッチング M_S

$M:=\phi$;
for $(i\in S)$ {
　$Q(i):=\{j\in T|j>_i 0$ である$\}\cup\{0\}$;
}
while $(\exists i\in S\,|\,i$ は M で不飽和かつ $Q(i)\neq\phi)$ {
　for $(i\in S\,|\,i$ は M で不飽和かつ $Q(i)\neq\phi)$ {
　　$Q(i)$ の最良の１人にプロポーズする；
　　最良の１人＝0 ならば $M:=M\cup(i,0)$ とし，i は M で飽和とする；
　}
　for $(j\in T)$ {
　　プロポーズした者と現在の相手*c の内，最良の１人 t を選び；
　　$t\neq c$ ならば $M:=(M\backslash(c,j))\cup(t,j)$ if $c\neq 0$，$M:=M\cup(t,j)$ if $c=0$ として
　　　t 以外のプロポーズを断り；
　　$t=c$ ならばプロポーズした者を断る；
　　j へのプロポーズを断られた $i\in S$ について $Q(i)$ から j を除く；
　}
　プロポーズを断られていないペア全体を M とする；
}
M を安定マッチング M_S として出力する。

図1　DA アルゴリズム

定理2　安定結婚問題に於いて男性からプロポーズする DA アルゴリズムで求めた安定マッチングは男性最適である。　■

安定マッチング自体は必ずしも男性最適ではない。例えば，同じ問題で女性からプロポーズする DA アルゴリズムは女性最適な安定マッチングになるが，男性最適とは限らない。

　一方，マッチング μ は，全ての $i\in M+W$ に対して $\nu(i)\succsim_i\mu(i)$ であって，少なくとも１人の $j\in M+W$ に対して $\nu(j)\succ_j\mu(j)$ となることがない時に，(パレート) 効率的 (efficient) という。安定マッチングの定義から次の性質を導ける。

定理3　安定マッチングは必ず効率的である。　■

上述の性質は男性側，女性側の両方に成立することに意味がある。安定マッチングは他の如何なるマッチングにも支配されない意味でマッチングのコア (core) になっている。

　個人の選好を個人間で非公開と仮定する。任意の男性 $m\in M$ だけが選好 $\succsim_m$ を選好 $\succsim'_m$ に変えた時に，どんな $\succsim'_m$ に対しても $\mu(m)\succsim_m\mu'(m)$ が成立するならば，男性側耐戦略性があるという。

定理4　安定結婚問題に於いて男性からプロポーズする DA アルゴリズムで求めた安定マッチングは男性側耐戦略性がある。　■

よって，男性からプロポーズする場合は，男性は個人が戦略的に選好を虚偽申告してもそれに依って得をすることがないので正直な申告をする。しかしながら，女性は虚偽申告に依って得

をする場合があり，その誘因はある。

例. 表1 の男性3人，女性3人の選好プロファイル例（P_i は狭義の選好 $>_i$ を表す）に対して DA アルゴリズムを適用する。

男性からプロポーズする場合は，$S=M$, $T=W$ と考えて適用すると，$(m_1,w_1),(m_2,w_2)$, (m_3,w_3) というマッチングになる。女性からプロポーズする場合は，$S=W$, $T=M$ と考えて適用すると，(m_1,w_1)，(m_2,w_3)，(m_3,w_2) というマッチングになり，男性からプロポーズする場合と異なる結果になる。この場合全ての女性からは同等以上の相手になっていることに注意しよう。

一方，女性 w_2 が真の選好

$$>_{w2}\colon\ m_1\, m_3\, m_2\, \phi$$

を偽って，

$$>'_{w2}\colon\ m_3\, \phi\, m_2\, m_1$$

と虚偽申告をしたとする。この時に男性からプロポーズする DA アルゴリズムを適用すると，(m_1,w_1)，(m_2,w_3)，(m_3,w_2) というマッチングになり，女性 w_2 は虚偽申告することによって，より得をする結果になる。

DA アルゴリズムは耐戦略性はプロポーズする側だけ（つまり部分的）に満たすだけだが，全体の耐戦略性を緩和することによって安定マッチングという公平な社会選択関数を与えるメカニズムになっているとも見なすことができる。

4．安定マッチングの存在の別証明

安定マッチングの集合は男性（女性）の選好に関して束（lattice）になることが，Knuth［10］等によって知られていた。

この節では Adachi［2］や Schummer and Vohra［13］に依って与えられた，束上での不動点定理である Tarski の定理を使った証明を示す。

高々1人の女性とペアになる（女性側は数人も有り得る）割り当てを男性側半マッチング（male semimatching）といい，その逆を女性側半マッチング（female semimatching）という。通常のマッチングは男性側半マッチング且つ女性側半マッチングになっている。

半マッチングに於いて，m の相手を $\mu(m)$，独身を選ぶ場合は $\mu(m)=m$ とし，$\mu(w)$ も同様に定義する。

半順序 $\geq$ を，

$$\mu(m) >_m \nu(m) \quad \text{or} \quad \mu(m)=\nu(m),\ \forall m \in M$$
$$\mu(w) <_w \nu(w) \quad \text{or} \quad \mu(w)=\nu(w),\ \forall w \in W$$

が成立する時に，$\mu \geq \nu$ と定義する。

結びを $\lambda=\mu\vee\nu$，但し，

$$\begin{aligned} \mu(m) >_m \nu(m) \text{ ならば } &\quad \lambda(m)=\mu(m),\\ \text{さもなければ } &\quad \lambda(m)=\nu(m),\\ \mu(w) <_w \nu(w) \text{ ならば } &\quad \lambda(w)=\mu(w),\\ \text{さもなければ } &\quad \lambda(w)=\nu(w), \end{aligned}$$

交わりを $\lambda'=\mu\wedge\nu$，但し，

$$\begin{aligned} \mu(m) <_m \nu(m) \text{ ならば } &\quad \lambda'(m)=\mu(m),\\ \text{さもなければ } &\quad \lambda'(m)=\nu(m),\\ \mu(w) >_w \nu(w) \text{ ならば } &\quad \lambda'(w)=\mu(w),\\ \text{さもなければ } &\quad \lambda'(w)=\nu(w), \end{aligned}$$

表1　男性3人，女性3人の選好プロファイル例

P_{m1}	P_{m2}	P_{m3}	P_{w1}	P_{w2}	P_{w3}
w_1	w_1	w_3	m_1	m_1	m_1
w_2	w_2	w_2	m_2	m_3	m_2
ϕ	w_3	w_1	ϕ	m_2	m_3
w_3	ϕ	ϕ	m_3	ϕ	ϕ

と定義する。

単調な写像 f を次の様に定義する。

$$
\begin{aligned}
&f(\mu)(m) = m \text{ の最も好みの女性} \in P_m := \{w \mid \\
&\quad m >_w \mu(w),\ m = \mu(w)\}, \\
&\text{さもなければ } f(\mu)(m) = m, \\
&f(\mu)(w) = w \text{ の最も好みの男性} \in P_w := \{m \mid \\
&\quad w >_m \mu(m),\ w = \mu(m)\}, \\
&\text{さもなければ } f(\mu)(w) = w.
\end{aligned}
$$

Tarski の不動点定理を用いて次の結果が証明される。

定理 5　半マッチング μ で $f(\mu) = \mu$ 且つ μ が安定マッチングであるものが存在する。 ■

5．線形計画としての表現

簡単の為に男性，女性共に独身はなく，$|M| = |W| = N$ とする。男性 $m \in M$，女性 $w \in W$ の間にマッチングがある時に，$x_{mw} = 1$ そうでない時に $x_{mw} = 0$ とする。各安定マッチングは，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{w \in W} x_{mw} = 1 && \forall m \in M \\
&\sum_{m \in M} x_{mw} = 1 && \forall w \in W \\
&\sum_{j <_m w} x_{mj} + \sum_{i <_w m} x_{iw} + x_{mw} \leq 1 && \forall m \in M, \forall w \in W \quad (2) \\
&x_{mw} \geq 1 && \forall m \in M, \forall w \in W
\end{aligned}
$$

という線形不等式系の凸多面体の頂点として表現できる。ブロッキング・ペアが存在しない条件が（2）である。

特定の変数方向が 1 で他を 0 とする係数ベクトルを持つ線形目的関数と制約が上述の線形不等式系からなる最大化の線形計画問題を考えれば，特定のペアがある安定マッチングが存在するかどうかを調べることができる。

6．最近の動向

2 集団の対象間のマッチングではなく，片方の集団の選好プロファイルだけで残りの集団に割り当てる問題，例えば住居割り当て［14］等の問題に対しては，Shapley and Scarf［15］に解析された，Gale 作とされるサイクル毎に割り当てていく TTC（Top-Trading Cycles）アルゴリズムが，耐戦略性を持ち強コア配分になる割り当てを与えることが分っているが，本稿では割愛する。

腎臓交換の様なドナーが患者に適合しない時に，TTC アルゴリズムでは個人的拒否等でサイクルが崩れる虞があるので，同時性を重視し，相互に適合する様にドナー交換するペア数を増やすことを考えるアプローチを Roth, Sönmez and Ünver［11］は提案している。

2 集団の対象間でないマッチングに関しては，例えば N（N は偶数）人の各自以外の全員に対する選好プロファイルのある場合に，$N/2$ 組のペアを見つけるルームメイト問題と呼ばれる問題がある。ルームメイト問題においては必ずしも安定マッチングが存在しない例があるが，存在する時に $O(|N|^2)$ の時間でそれを与えるアルゴリズムが知られている。

2 集団マッチングに関しては，第 2 節 DA アルゴリズムで，選好を「狭義の」選好と仮定したことは，DA アルゴリズムで得るマッチングの男性最適性や耐戦略性を保証するのに必要である。実際に無差別な選好対象が存在する時に，そのタイブレークをくじ等でするとしても男性最適を満たさなくなる例がある。その場合，マッチング後に男性同士で最初の選好に従いながら交換する権利を与えると男性最適性は保たれる。但し，今度は交換する権利を前提に選好を虚偽申告することに依って男性側の耐戦略性が満たされなくなる例が生じる。

Ergin［5］は非巡回的（acyclical）の概念を導入することによって，集団耐戦略性を満たす（group strategyproof）必要十分条件を得て

いるが，その結果は注目に値する。

Ehlers［4］は von Neumann and Morgenstern［19］が協力ゲームに対して導入した安定集合の概念を２集合マッチングの代表的な１対１マッチングに適用して，マッチング集合 V が，$\mu \not> \mu'$，$\forall\mu$，$\mu' \in V$（内部安定性）；全ての $\forall\mu' \in M \backslash V$ に対して $\exists\mu \in V$，$\mu > \mu'$（外部安定性）を満たす時に vNM 安定と定義した。マッチング集合 V が vNM 安定ならば，

（ｉ） V にコアが含まれる。

（ii） V が分配束

（iii） 非飽和の点集合が V の全てのマッチングに対して同じである。

を満たす最大集合になることと，（ｉ），（ii），（iii）を満たす最大集合が唯一である時に vNM 安定であることを示している。

２集団マッチングの実際問題への応用は，受入側に q_i 人の割当て（quota）がある場合に，本稿で述べた DA アルゴリズムを多対１アルゴリズムに容易に拡張できることから幅広く応用されている。実際，２集団マッチングにおいて安定マッチングを求めるアルゴリズムは，1951 年（DA アルゴリズムの発表される前）にイリノイ州エバンストンで研修医を病院に配属する方法として，後の DA アルゴリズムと同等な（しかし病院主体の）方法が使われていたことが分っている。研修医配属問題だけではなく，21 世紀に入ってからニューヨーク市立高校への学校選択等に使われ，DA アルゴリズムの Roth 等による改良版が使われている［1］。

Hatfield and Milgram［8］は，上述の研修医の病院配属問題，学校選択問題，競り上げ式オークション，労働市場の Kelso-Crawford モデル［9］を共通の契約付マッチングという枠組で扱い，契約が代替財で，受入側が総需要の法則を満たす条件の下で申請者側の耐戦略性を満たす結果を得ていることは興味深い。

Vickrey［17］は競り上げ式オークションにおいて，選好を擬順序でなく，価値関数 $v_i: A \to \mathbb{R}$ を用いて，

$$u_i = v_i(a) + b_i$$

という，準線形（quasilinear）の量として表すことで定式化し，第２価格オークションの妥当性を示している。２集団マッチングにおいても選好を定量化して考え，優モジュラ性等の構造を導入していく方向は今後の課題であろう。

参考文献

［1］ Abdulkadiroǧlu, A., Pathak, P, and Roth, A.E., “The New York City high school match, *American Economic Review* 95, 364-367 (2005).

［2］ Adachi, H., “On a characterization of stable machings,” *Economics Letters* 68, 43-49 (2000).

［3］ Arrow, K., *Social Choice and Individual Values*（*2nd Ed.*）, Wiley, 1963.

［4］ Ehlers, L., “Von Neumann-Morgenstern stable sets in matching problems,” *Journal of Economic Theory* 134, 537-547 (2007).

［5］ Ergin, H.I., “Efficient resource allocation on the basis of priorities,” *Econometrica* 70, 2489-2497 (2002).

［6］ Gale, D., Shapley, L.S., “College admissions and the stability of marriage”, *American Mathematical Monthly* 69, 9-15 (1962).

［7］ Gibbard, A., “Manipulation of voting schemes: A general result,” *Econometrica* 41, 587-602 (1973).

［8］ Hatfield, J.W., Milgram, P.R., “Matching with contracts,” *American Economic Review* 95, 913-935 (2005).

［9］ Kelso, A. and Crawfood, V.P., “Job matching, coalition formation, and gross substitutes,” *Econometrica* 50, 1483-1504 (1982).

［10］ Knuth, D.E., *Marriages Stables, Montreal* Univ. Press, Montreal, 1976.

［11］ Roth, A.E., Sönmez, T. and Ünver, M.U., “Kidney exchange,” *Quarterly Journal of Economics* 119, 457-488 (2008).

［12］ Satterthwaite, M.A., “Strategy-proofness and

Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions", *Journal of Economic Theory* 10, 187-217 (1975).

[13] Schummer, J. and Vohra, R.V., "Mechanism design without money," in: *Algorithmic Game Theory* (Nison, N. et al. Eds.), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.

[14] Sethuraman, J., "Mechanism design for house allocation problems: a short introduction," *Optima* 82, 2-8 (2010).

[15] Shapley, L. and Scarf, H., "On cores and indivisibility," *Journal of Mathematical Economics* 1, 23-28 (1974).

[16] Vante Vate, J.H., "Linear programming brings marital bliss," *Operations Research Letters* 8, 147-153 (1989).

[17] Vickrey, W., "Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders," *Journal of Finance* 16, 8-37 (1961).

[18] Vickrey, W., "Auctions, and bidding games," in : *Recent Advances in Game Theory* (Morgenstern, O. et al. Eds.), Princeton Univ. Press, 1962.

[19] von Neumann, J. and Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behavior - 3rd Ed.,* Princeton Univ. Press, Princeton, 1953.

後書き

本原稿の入稿後の10月15日（月）に2012年のノーベル経済学賞がA. E. Roth氏とL. S. Shapley氏の2氏に共同授賞で授与されたというニュースが流れた。

素朴な基礎研究が一躍脚光を浴びたのは大いに喜ばしいことである。