経 済 学 研 究　*63－1*
北 海 道 大 学　2013.6

確率模型とサヴェジ氏の態度

園　信太郎

1．確率模型の変更

サヴェジ氏は例えばSavage（1959）に見られる様に，（試行がもたらし得る諸結果から成る）諸事象の各に対して「確率」を配分する様式としての確率模型の「変更」に関して，ある態度を保持している。

例えば，「全く」歪んでいないコインを特定の装置で投げ上げて裏（T）か表（H）かを観察する実験を反復するとしてみる。この教科書的な例では，T及びHに対して各「確率」二分の一を対応させて，しかも一連の試行は「独立」であると想定されるのが普通である。従って，例えば百回投げ上げるとすれば，THTH…THとT及びHが交互に現れる「確率」は，二の百乗分の一であると（事前に）定められることとなる。

しかし，通常の頻度論的分析によれば，「現実に」このTH…THが現れた場合には，試行の独立性の仮定が通用していないと判断されて，想定されている教科書的模型が（事後的に）棄却され，他の模型への「変更」が求められるのが通常である。

このような「変更」は通常の頻度論的分析において（暗黙の内に）当然のこととされている。しかしサヴェジ氏は，日常的には微小ではあっても（事前に）正の「確率」が配分されている事象が通用することに基づいて，問題の模型を変更することは，論理的に「へん」だと判断している。実際，TH…THが通用する場合には「変更する」と（事前に）判断されているのならば，この列に対しては，事前に「確率」0を付加して，問題の模型の「必然的」変更を正当化するべきである。

サヴェジ氏は，TH…THに対して正の「確率」を配分するのならば，この想定される実験結果に基づく「合理的な」判断を，予め（つまり事前に）定めておくべきであるとの態度を，保持している。正の「確率」を配分する一方で，事後的な（しかも必然的な）変更を正当化しようと試みることには，どうも無理があるのだ。

2．有意性検定，任意停止，及び尤度原理

サヴェジ氏は有意性検定に対してかなり厳しい態度を示している。例えば，予め指定されている種及び性に属する小昆虫の眼の色は，赤（R）か白（W）かであり，この昆虫の現在の（日常的な尺度からすれば巨大な）集団における白の比率をpとする。このpは未知かつ固定されているとして，この母数に対する有意性検定を考える。

問題の母集団からの無作為抽出を何回か行い，各回で眼の色を観察し記録することとする。観察者Obは観察をするごとに「pに関る経験」を積むこととなる。例えば，「1回目はRで，2回目はRで，3回目はRで，4回目はWで，…，n回目はWである。」と言うように，「pに関る経験」がObにおいて堆積して行く。所で，「この」nで観察を停止するか否かはObの事情によるが，それは結局Obの「意図」の問題であり，この「意図」は（当然のことだが）問題の「経験」には組込まれるこ

とはない。例えば，「W の百分率が丁度 13% を超えたので，この n で終わりとしよう」とか，「これで大体充分だし，疲労もしているから，この n で止めておこう」とか，「どうもやる気がなくなったので，気力が回復するまで休止しよう」とか，とにかく色色である。

しかし実にまずいことに，そして広く知られているように，有意性検定（そして仮説検定）は，この「意図」に甚だしく依存し，肝腎の「経験」を的確に捉えてはいないのであり，誤用（本来は「曲用」か？）が極めて容易である。実際，p に関する帰無仮説を，Ob が棄却しようと「執拗に意図している」場合に，彼は自身が「これで充分だ」と判断する「その n」に行き着くまで，「執拗に」無作為抽出を繰り返せばよいのである。

頻度論的な検定を行おうとすると，終わりの n を指定する法則を予め（数学的に）明示しなければならない。純然たる「任意停止，optional stopping」によってもたらされる「p に関る経験」を，頻度論的検定は利用できないのである。

しかし，主観確率に基づく統計学では「任意停止」などは一向に問題と成らない。今，n 回までで，R 及び W が各 r 及び w 回得られたとすると，問題の「結果の列」がもたらされる「確率」は，事前には，$p^{w}(1-p)^{r}$ である。事後にはこれは正に p に関する尤度関数であり，（例えば Ob の）事前確率密度と結びついて，（例えば Ob にとっての）事後確率密度を誘導することとなる（Bayes' rule！）。つまり，「その個人」を指定しておけば，n に関る Ob の「意図」が何であれ，尤度関数が事後的に対等であれば同一の事後分布がもたらされるのであり，p に関する統計的推論は，少なくとも「その個人」にとっては一致するのである。つまり，主観確率に基づく統計学では，個人論的な意味での「尤度原理，likelihood principle」が成立するのである。

頻度論的分析では，各母数に対応する確率模型が，いわゆる統計的模型を構成するが，この事前の模型が，事後の分析においても影響力を行使するのである。事前の模型に観察者の「意図」を組み込み，尤度関数によって表現される「母数に関る観察者の経験」を，問題の「意図」に関る様式で処理しようとするのであり，これではまともな推論などできるわけがない。事前と事後，（確率模型の系としての）統計的模型と尤度関数の分別は明晰にしなければならない。

3．尤度関数の解釈

データを x とし母数を θ として，統計的模型を表現する密度関数の族を $f(x|\theta)$ とする。x が特定されることによって得られる θ の関数 $l(\theta\,|x)=f(x|\theta)$ は母数に関する尤度関数の一つである。

だが頻度論的理論の枠内で，この「尤度関数，likelihood function」への適正な解釈ができるのであろうか。「事後的に定められる x の値が，「仮に」事前に与えられているとして，任意の θ に対する，「この」x に対応する「その密度」」とでも「解釈」するのであろうか。特に密度関数が確率関数である場合には，「「この」x に対応する「その密度」」は「「この」x に対応する「その確率」」となり，頻度論的枠組みに忠実である限り，「その確率」の解釈は困難である。さらにまた特定されている x に対して，$l(\theta\,|x)=K(x)g(x|\theta)$，$K(x)$ は x に依存するかもしれない（θ には依存しない）正の比例定数で $g(x|\cdot)$ は θ の関数，とする場合，この g も尤度関数となるが，このような g の解釈はどうなるのであろうか。

主観確率に基づく統計学では，事前密度の事後密度への変換（Bayes' rule！）の際の基軸として尤度関数が利用される。即ち，

$$p(\theta\,|x) = \frac{p(\theta\,|x)g(x|\theta)}{\int p(\theta\,|x)\ g(x|\theta)\ \mu(d\theta)}$$

となる。但し$\int$は意味を持つθの全体にわたる。尤度関数とは「事前」を「事後」へと変換する際の基軸に他ならず,「個人」が特定されていれば,「その個人」にとって尤度原理は確かに成立する。実際，θに関る別のデータyに対して$h(y|\cdot)\propto g(x|\cdot)$とすると，$h$を基軸とする変換は$g$の場合と紛れもなく同一の事後密度をもたらす。即ち，$p(\cdot|y)=p(\cdot|x)$。

2012年10月29日(月)

参考文献

Savage, Leonard Jimmie, “Subjective probability and statistical practice,” in the summer of 1959, London. これは the Joint Statistics Seminar of Birkbeck and Imperial Colleges での（1959年7月27日の）サヴェジ氏の講義録である。この Seminar は Birkbeck College で，1959年7月27日及び28日に開かれていて，そのほぼ全容は，Savage, L. J. et al., *The Foundations of Statistical Inference—A Discussion—*, Wiley, New York, 1962, に収められており，この冊子の冒頭の Part Ⅰが上の講義録である。なお28日のサヴェジ氏の閉めの言葉は，同冊子の97頁から103頁に収録されており，こちらも味読するに値する。この好冊子は London では Methuen から出ている。