経済学研究 53-3
北海道大学 2003.12

一般均衡と数理計画

田 中 嘉 浩

1．序

一般均衡理論は19世紀前半に既にCournot等の競争市場の数学的分析の胎動が有ったが，19世紀後半にEdgeworth，Marshall，Walras，特にフランスのLéon Walras（1834-1910）を泰斗として発展したとされるのが通説である。その後20世紀前半に同じローザンヌ学派のPareto等が付加的な定式化をしたものの，1930年代・1940年代にHicks，Samuelsonが学問的な経済学の伝統と数学に依る体系化が有り，von Neumannの数学的な最適成長理論の影響も有って，一般均衡理論の現代的な基礎付けが本格的に為された。20世紀後半はArrow，Debreu，McKenzie等の貢献で発展してきたが，1950年代・1960年代の完全予見可能性の仮定を置く古典理論と1970年代以降の拡張理論に分けられる。

一方，最適化は18世紀のLagrangeの等周問題の頃に端を発し，変分法等の発展に繋がったが，静学問題では制約付最適化問題に於けるる1951年のKarush-Kuhn-Tucker定理の発見や線形計画問題に対する1947年のDantigのシンプレックス法の提案に伴って数理計画（Mathematical Programming）という分野が生じ，それ以降，理論面・解法面の両方に飛躍的発展を遂げる事になった。

数理計画は最適化の静学的部分を扱うものであるが，消費者の効用最大化問題，生産者の費用最小化問題等ミクロ経済学の中心的問題は数理計画問題に定式化されるものであり，均衡問題に対する不動点の計算アルゴリズムや最近はポートフォリオ理論の定式化とその解法等，数理計画の理論・解法の発展に伴った経済理論の発展は大いに期待される所である[1)]。

ところで1980年代後半に，Zhao and Daformos［34］等は一般均衡理論の標準的な純粋交換のArrow-Debreuモデルに於いて，Walras法則を或る種の変分不等式（Variational Inequalities）に定式化している。変分不等式は密接に関連する相補性問題と共に多くの経済均衡モデルを定式化出来るものであり，他には米エネルギー省で作成された，燃料の価格と生産量を計算するのに使われるPIES（Project Independence Energy System）とNEMS（National Energy Modeling System）［14］等の定式化，税金・補助金問題の定式化，資本ストック問題の定式化が為されている。

既にKaramardian and Schaible［19］，Crouzeix and Ferland［6］等に包括的な研究が為されているが，最近John［17］は連続的微分可能な写像の擬単調性（pseudomonotonicity），準単調性（quasimonotonicity）は写像の零空間でのヤコビ行列の半負定値及び零点での仮定で特徴付けられる事を示し，その結果をWalras均衡問題（特に，tâtonnement[2)]過程）に応用している。

1）実際，国際数理計画シンポジウム（ISMP）にはArrow，Kantrovich，Koopmans等ノーベル経済学賞の受賞者が出席している。

2）tâtonnement（模索）はWalras自身が1870年代に命名したものだが，その後もSamuelsonが安定性の議論の為に定式化し，命名以来約百年に渡って多くの研究が為されてきた。

本稿では数理計画の最近の発展を踏まえて，数理計画の立場からの均衡問題の定式化を概観し，最近の話題や考察を加えていきたい。

2．準　備

先ず一般凹関数3) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$X \subset \mathbb{R}^n$の定義から述べる。

定義. 擬凹(*pseudoconcave*)(X 上):
一般微分可能且つ正則性を仮定する。
$f(y) > f(x) \Rightarrow \xi^T(y-x) > 0,\ \forall x,\ y \in X,$
$\xi \in \partial f(x).$

定義. 狭義擬凹(*strictly pseudoconcave*)(X 上):
$f(y) \geq f(x) \Rightarrow \xi^T(y-x) > 0,\ \forall x,\ y \in X,$
$x \neq y,\ \xi \in \partial f(x).$

定義. 強擬凹(*strongly pseudoconcave*)(X 上):
微分可能性を仮定する。f が X 上で狭義擬凹，且つ $\|d\| = 1$ 及び $\nabla f(x)^T d = 0$ を満たす d に対して正数 ε，α が存在して，$x \pm \varepsilon d \in X$ 及び

$$F(t) = f(x+td) \leq F(0) - \frac{1}{2}\alpha t^2,\ 0 \leq t < \varepsilon,$$

を満たす。

定義. 準凹(*quasiconcave*)(X 上):
$f(y) \geq f(x) \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)$
$\forall x,\ y \in X,\ 0 < \forall \lambda < 1.$

定義. 半狭義準凹(*semistrictly quasiconcave*)(X 上):
$f(y) > f(x) \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) > f(x)$
$\forall x,\ y \in X,\ 0 < \forall \lambda < 1.$

定義. 狭義準凹(強準凹)(*strictly quasiconcave*)(*strongly quasiconcave*)(X 上):
$f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \min\{f(x),\ f(y)\}$
$\forall x,\ y \in X,\ x \neq y,\ 0 < \forall \lambda < 1.$

3) 凸関数でも符号を変えて同様に定義できる。

凸集合や凸関数，凹関数に対する研究は19世紀末の Hölder，Minkowski や20世紀初頭の Carathéodory，Helly に遡るが本稿では詳細には立ち入らない。

準凹関数に関する研究は，レベル集合を用いる定義を用いた De Finetti［7］と Fenchel［13］が嚆矢とされる。

初期の段階で，Arrow and Enthoven［1］が C^2 級関数が準凹である必要十分条件を導出し，重要な経済モデルを準凹計画の数理計画問題として定式化できることを示している。

研究が活発になる1960年代に，Mangasarian［22］が擬凹（凸）関数の定義と特徴付けを行い，Martos［24］は半狭義準凹関数が局所最大解＝大域最大解である必要十分条件であることを示している。1970年代には Rockafellar に依る凸解析の集大成［30］が出て一段落したかに思えたが，Diewert 等に依る経済モデルへの応用や，分数計画への応用等，非線形計画全般の理論・解法の一時的な熟成期に伴った応用の発展が有った。

1980年代以降は，Diewert, Avriel, and Zang［9］は線分最小値特性を用いた半狭義準凹関数の特徴付けについて調べている。Tanaka［33］は準凸，擬凸，invex の間の見通しの良い相互関係について導出している。

最近は，Martínez-Legaz and Sach［23］は主に無制約問題での準凹関数の性質を追求する為に準劣微分（quasi-differentials）を提案している。

準凹関数に関する興味深い性質を述べる。

命題1［1］f を $\mathbb{R}^n_+$ 上で C^2 級とする。

$$|H_r^B(x)| \equiv \begin{vmatrix} 0 & f_1 & \cdots & f_r \\ f_1 & f_{11} & \cdots & f_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_r & f_{r1} & \cdots & f_{rr} \end{vmatrix}$$

と定義する。この時，f が準凹になる為の十分条件は，$|H_r^B(x)|$ の符号が $(-1)^r$ の符号と全

ての $x \in \mathbb{R}^n_+$ と全ての $r=1, \dots, n$ に対して同じことであること，f が準凹になる為の必要条件は，$(-1)^r|H^B_r(x)| \geq 0$ が全ての $x \in \mathbb{R}^n_+$ と全ての $r=1, \dots, n$ に対して成立することである。

命題２［24］ f を $\mathbb{R}^n$ 上で連続な準凹関数とする。この時，f が半狭義準凹である為の必要十分条件は，f の $x^* \in C$ 上のどの局所最大解も大域最大解になることである。

擬凹関数に関しては次の重要な特徴付けができる。

定理１　任意の x で $\nabla f(x) \neq 0$ を仮定する。その時，次の２条件は等価である。

(*SD2*) 任意の $x \in X$ に対して，$\nabla f(x)^T d \Rightarrow d^T \nabla^2 f(x) d \leq 0$ 。

(*P2*) f が擬凹である。

［証 明］［26］等に $\nabla f(x) \neq 0$ の条件下での (SD2) と f の準凹性の同値性が証明されているから，その条件下での擬凹＝準凹を証明すればよい。

擬凹 ⇒ 半狭義準凹 ⇒ 準凹はよく知られた結果であるから，$\nabla f(x) \neq 0$ で準凹 ⇒ 擬凹を証明する。

$f(y) > f(x)$ とすると，

$$\frac{f(x+(1-\lambda)(y-x))-f(x)}{1-\lambda} \to \nabla f(x)^T(y-x) \geq 0 \text{ as } \lambda \to 1$$

もし $\nabla f(x)^T(y-x)=0$ とすれば，$f(y) \leq f(x)$ となるから矛盾。依って $\nabla f(x)^T(y-x) > 0$ が成立する。 ∎

上定理は後の定理３からも言えるが，直接示した。

以上の準備の下で次の問題を考える。

変分不等式（Variational Inequality Problem）は，$X \subset \mathbb{R}^n$ を凸集合とし，$F: X \to \mathbb{R}^n$ として，

$$(VI) \qquad F(x)^T(y-x) \leq 0, \ \forall y \in X \tag{1}$$

を満たす $x \in X$ を求める問題である。

$X=\mathbb{R}^n_+$ の時には，(VI) は，非線形相補性問題（Nonlinear Complementary Problem）

$$(NCP) \qquad 0 \leq x \perp -F(x) \geq 0 \tag{2}$$

と等価であることもよく知られている。

解の存在性等の性質を考える為に一般単調写像 $F: X \to \mathbb{R}^n$ のクラスを定義する。

定義. 単調（*monotone*）（X 上）:

$$(F(y)-F(x))^T(y-x) \leq 0, \ \forall x, y \in X. \tag{3}$$

定義. 狭義単調（*strictly monotone*）（X 上）:

$$(F(y)-F(x))^T(y-x) < 0, \ \forall x, y \in X, x \neq y. \tag{4}$$

定義. 強単調（*strongly monotone*）（X 上）:

$$(F(y)-F(x))^T(y-x) \leq -c\|y-x\|^2, \ \forall x, y \in X, \exists c > 0. \tag{5}$$

定義. 擬単調（*pseudomonotone*）（X 上）:

$$F(x)^T(y-x) \leq 0 \Rightarrow F(y)^T(y-x) \leq 0, \ \forall x, y \in X. \tag{6}$$

定義. 狭義擬単調（*strictly pseudomonotone*）（X 上）:

$$F(x)^T(y-x) \leq 0 \Rightarrow F(y)^T(y-x) \leq 0, \ \forall x, y \in X, x \neq y. \tag{7}$$

定義. 準単調（*quasimonotone*）（X 上）:

$$F(x)^T(y-x) < 0 \Rightarrow F(y)^T(y-x) \leq 0, \ \forall x, y \in X. \tag{8}$$

定義. 狭義準単調（*strictly quasimonotone*）（X 上）:

$$F(z)^T(y-x) \neq 0 \Rightarrow \forall x, y \in X, x \neq y \tag{9}$$

となる z が線分 xy 上に在る。

$F(x)$ を実数値関数 $f(x)$ の導関数になる場

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{凹関数} & \Rightarrow & \text{擬凹関数} & \Rightarrow & \text{準凹関数} \\
 & & \Uparrow & & \Uparrow \\
 & & \text{狭義擬凹関数} & \Rightarrow & \text{狭義準凹関数}
\end{array}
$$

図１　一般凹関数の関係

合を考えると，F の単調，擬単調，準単調は各々 f の凹[4]，擬凹，準凹に対応している。

F が単調である必要十分条件はどの $x \in X$ でもヤコビ行列 $\partial F(x)$ が半負定値であることであることはよく知られている。

定理２［*12*］ $X \subseteq \mathbb{R}^n$を開凸定義域，$F: X \to \mathbb{R}^n$を連続とする。

(1) F が X 上で狭義単調ならば，（*VI*）は高々１つの解を持つ。

(2) F が X 上で強単調ならば，（*VI*）は解が存在して唯一である。 ∎

解の存在性を言うのには必ずしも単調性を仮定する必要は無い。X がコンパクト（有界閉）凸集合ならば F が連続でありさえすればよく，X が閉凸集合ならば F が連続且つ安定（stable）

$$F(x)^T(x^* - x) \geq 0, \quad \forall x \in X$$

な点 x^* の存在を仮定するか，F が強圧的（coercive）ならば言えることが知られている。強単調ならば強圧的である。

定理１に対応する次の関係が成立することが知られている。

定理３［*6*］ $X \subset \mathbb{R}^n$を開凸定義域，$F: X \to \mathbb{R}^n$を C^1 級とする。更に任意の x で $F(x) \neq 0$ を仮定する。その時，次の２条件は等価である。

（*SD1*）任意の $x \in X$ に対して,$F(x)^T d = 0 \Rightarrow d^T \partial F(x) d \leq 0$ 。

（*P1*）F が擬単調である。 ∎

応用上の問題，例えば一般均衡問題を考える際には，$F(x) \neq 0$ の仮定はきつく，上定理は適用できない。そこで，$F(x) = 0$ をも考慮する為に次の条件が考えられている。

（CF） $F(x) = 0$ を満たす各 $x \in X$ と $v^T \partial F(x) v = 0$ を満たす各 $v \in \mathbb{R}^n$に対して，$v^T F(x + \lambda v) > 0,\ \forall \lambda \in (0, \bar{\lambda}]$ を満たす $\bar{\lambda} > 0$ が存在しない。

John［17］は次の定理に到達した。

定理４［*17*］ $X \subset \mathbb{R}^n$を開凸定義域，$F: X \to \mathbb{R}^n$を C^1 級とする。更に F が正則，即ちどの $x \in X$ でも，

$$F(x) = 0 \Rightarrow \det \partial F(x) \neq 0. \tag{10}$$

その時，次の２条件は等価である。

（*SD1*）任意の $x \in X$ に対して，$F(x)^T d = 0 \Rightarrow d^T \partial F(x) d \leq 0$ 。

（*P1*）F が擬単調である。

［概　要］ 擬単調 ⇒(SD1）は，その対偶を直接示せる。

(SD1)⇒ 擬単調は F が（SD1）と（CF）を満たせば 擬単調であるので，（SD1）を仮定し

4) 凹関数でなく凸関数に対応する一般単調性の定義も有る。

$$\begin{array}{ccccc} \text{単調} & \Rightarrow & \text{擬単調} & \Rightarrow & \text{準単調} \\ & & \Uparrow & & \Uparrow \\ & & \text{狭義擬単調} & \Rightarrow & \text{狭義準単調} \end{array}$$

図２　一般単調性の関係

(CF) の否定を仮定した時に，F が擬単調になることは F の正則性の下で矛盾することが示せる。 ∎

３．一般均衡問題

３．１　純粋交換経済モデル

消費者 $i \in I$ の間の純粋交換経済の均衡を考える。

u_i ：　消費者 i の効用
x_i^0 ：　消費者 i の初期賦存量

予算集合を，

$$B_i(p) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid p^T x \leq p^T x_i^0\}$$

とすると，予算集合制約下での効用最大化問題を考えると，連続かつ狭義準凹の仮定の下で唯一解 $\bar{x} \in B_i(p)$ が存在する。

個人の需要関数 $D_i(p) = \bar{x}$ は次の性質を満たす。

(i) p に関して０次同次。
(ii) u_i の単調，即ち $x > y$ ならば $u_i(x) > u_i(y)$，の仮定の下で予算一致（局所非飽和性）$p^T D(p) = p^T x_i^0$, $\forall p$ が成立する。

個人の需要関数が顕示選好の弱公準（weak axiom of revealed preference; WARP）を満たす時には Slutsky 代替行列が半負定値[5] であることはよく知られているが，逆は必ずしも成立しない。実は，Hicks［15］に依って定式化された少し弱い弱公準が Slutsky 代替行列の半負定値性と同値であることが Kihlstrom, Mas-Colell, and Sonnenschein［20］に依って示されている。

超過需要関数 E: $\mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$ を

$$E(p) = D(p) - x^0$$

とすると，その零点が均衡価格 $\bar{p}$ になる。更に，D_i, $i \in I$ の (ii) の条件等から，

$$p^T E(p) = 0, \ \forall p \in \mathbb{R}^n_{++} \tag{11}$$

を満たすが，(11)を Walras 法則という。

変分不等式の解の唯一性の条件には通常は狭義の単調性が考えられているが，準単調性かつ正則（regular）という条件を利用することも考えられる。０次同次性や Walras 法則に依るランク落ちを考慮に入れて次の定理が導出された。

定理５　*［17］*　E: $\mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n$ を０次同次及び Walras 法則を満たす C^1 級写像とし，更に正則条件

$$E(p) = 0 \Rightarrow \operatorname{rank} \partial E(p) = n - 1$$

を仮定する。その時 E が準単調，即ち，

$$p^T E(q) \leq 0 \Rightarrow q^T E(p) \geq 0, \ \forall p, q \in \mathbb{R}^n_{++} \tag{12}$$

となる必要十分条件は，E が（*SD1*）を満たす

5）数学的には負の対角優位行列や負の M 行列が負定値になることは知られているが，Walras 法則でランク落ちするので半負定値性が問題になる。例えば，粗代替性の仮定は半負定値性を満たす。

ことである。 ∎

Wald の弱公準（Wald's weak axiom）とは，⑿を満たすことを言う。Hildenbrand and Jerison［16］は，

$$\text{Wald の弱公準} \Rightarrow \text{(SD1)}$$

を示しながら，rank $\partial E(p) = n-1$ の仮定下での，

$$\text{(SD1)} \Rightarrow \text{Wald の弱公準}$$

を未解決問題としているが，上定理はその解答を与えるものである。

3．2　一般均衡モデル

m を経済活動（操業）の数，n を財の数，l を消費者の数，とする。

c_i ：経済活動 i の操業コスト
b_j ：財 j の初期賦存量
　とし，
y_i ：経済活動 i のレベル
p_j ：財 j の価格
$z_j(p)$ ：財 j の総需要関数

とすると，各人の需要関数は各人 k の効用関数を用いて $z_j^k(p)$ は効用最大化問題から求めることができ，それらから求まる総需要関数 $z_j(p)$ は通常正0次同次である。

更に，

$A = (a_{ij})$ ：技術入出力行列 $(n \times m)$

とすると，Ay はこれらの技術に依る財ベクトル，$\bar{p}^T A$ は単位活動収益，を表す。

生産活動 (z, A) とは，

(i) 操業される経済活動は利益0であり，赤字になる経済活動は操業されない条件

$$0 \leq y \perp c - p^T A \geq 0.$$

(ii) 超供給の財は価格0であり，正価格ならば供給＝需要になる条件

$$0 \leq p \perp b + Ay - z(p) \geq 0$$

を満たすものが定義される。

そこで，

$$F(p, y) \equiv \begin{pmatrix} b + Ay - z(p) \\ c - p^T A \end{pmatrix}$$

と定義すると $F: \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ であり，一般均衡は非線形相補性問題 $NCP(F)$

$$0 \leq (p, y) \perp F(p, y) \geq 0 \tag{13}$$

で表すことができる。又，

$$G(p) \equiv z(p) - b$$
$$K \equiv \{p \in \mathbb{R}_+^n \mid c - p^T A \geq 0\}$$

と定義すると，⒀は変分不等式 $VI(G, K)$

$$G(\bar{p})^T (p - \bar{p}) \leq 0, \tag{14}$$

但し $Ay \geq z(p) - b$ に対する KKT 条件となっている。

特に $c = 0$, $b = 0$ の場合が重要であり，

$$K = \{p \in \mathbb{R}^n \mid p^T A \leq 0\}$$

となる。$z(p)$ の0次同次性等から，

$$S^n \equiv \{p \mid p_i \geq 0,\ \forall i = 1, \ldots, n, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

と定義すると，次の様に簡単化される。

定理6［34］ $(\bar{p}, \bar{y}) \in (Z \cap K) \times \mathbb{R}_+^m$ が生産経済 (z, A) の均衡点になる為の必要十分条件は，$\bar{p}$ が変分不等式 $VI(z) (= VI(z, S^n \cap K))$

$$z(\bar{p})^T (p - \bar{p}) \leq 0,\ \forall p \in S^n \cap K \tag{15}$$

の解であり，$\bar{y}$ が $A\bar{y} \geq z(\bar{p})$ を満たす時である。 ∎

［34］には $VI(z)$ の解 $\bar{p}$ に対して，$A\bar{y} \geq z(\bar{p})$ を満たす $\bar{y}$ が存在することが証明されている。

変分不等式 $VI(z)$ の解の存在性，唯一性については次の定理が成立することが示されている。

定理7［34］ 関数 $z(p): S^n \to \mathbb{R}^n$ が S^n 上で狭

義単調，即ち，

$$(z(p)-z(q))^T(p-q) < 0, \ \forall p, q \in S^n, \ p \neq q$$

とする。その時均衡価格 $\bar{p}$ は唯一である。 ▮

上定理の仮定を緩めて更に一般化できる。

定理８　関数 $z(p): S^n \to \mathbb{R}^n$ が S^n 上で準単調且つ正則とする。その時均衡価格 $\bar{p}$ は唯一である。

［略 証］ $z(p)$ の０次同次性や準単調性且つ正則性から解集合は同次方向に縮退した凸集合となるが，コンパクト集合 S^n 内で唯一である。 ▮

４．アルゴリズム

均衡計算には従来から不動点法(e.g.,［31］)が基本であるが，理論面は美しいが，そのままでは大規模問題に対する数値的問題が有る。

ここでは３．２節の一般均衡モデルに対する Dafermos の反復法に基づく Zhao and Dafermos［34］の方法を紹介する。

先ず，滑らかな関数

$$g(p, q): (S^n \cap K) \times (S^n \cap K) \to \mathbb{R}^n$$

で次の２つの性質を満たす関数を用意する。

(i) 任意の $p \in S^n \cap K$ に対して $g(p, p) = -z(p)$。

(ii) 全ての固定した $p, q \in S^n \cap K$ に対して $n \times n$ 行列 $g_p(p, q)$ が正定値。

Algorithm

Step１．或る $p^0 \in S^n \cap K$ から始める。

Step２．$k = 1, 2, \ldots$ に対して次の変分不等式の解 p^k を計算する。

$$g(p^k, p^{k-1})^T(p-p^k) \geq 0, \ \forall p \in S^n \cap K \quad (16)$$

ε を小さな正数として $\|p^k - p^{k-1}\| \leq \varepsilon$ ならば終了し，$\bar{p} = p^k$ を均衡価格とする。さもなければ，$k = k+1$ としてStep２へ。

Step３．均衡操業レベル $\bar{y}$ を次の線形不等式を解いて計算する。

$$z(\bar{p}) \leq A\bar{y}, \ \bar{y} \in \mathbb{R}^m_+ \quad (17)$$

［34］には収束条件が示されており，次の定理が証明されている。

定理９　*［34］*　関数 $-z(p): S^n \to \mathbb{R}^n$ が S^n 上で強単調，即ち，

$$(z(p)-z(q))^T(p-q) \leq -c|p-q|^2, \ \forall p, q \in S^n,$$

但し c は正定数とする。その時 *Algorithm* は収束する。 ▮

［34］には具体的な $g(p, q)$ の形を，

$$g(p, q) = -z(p) + \frac{1}{\rho}G(p-q)$$

但し ρ は正定数，G は正定値対称行列とすると，射影法になることが示されている。これは G の選び方に依っては何らかの高速算法を適用できる可能性を示している。

一般に変分不等式の数値解法には，

不動点法：1967 年に Scarf［31］に提案された方法を起点としているが後に純粋交換経済モデルを中心に発展されている。初期には線形相補性問題に対する Lemke［21］法と共に主流とされてきた。近年は大域的収束性の理論的側面から不動点ホモトピー法に関する研究が多くの研究者から為されている (cf.［11］)。しかしながら実際問題に対する数値的問題等の難点が有る。

射影法：閉凸集合 $X(S^n \cap K)$ への射影を反復していく解法で簡単に実行できるので大規模問題にも向いている。収束速度が遅い欠点は

他の解法との併用で補える。

Newton 法：逐次線形相補性問題（SLCP）法が Josephy［18］に依って Newton 法になることが判明して以来，Robinson［29］の一般化方程式（generalized equations）に依る枠組が与えられて，主流の方法となっている。Pang［27］の方法や，Ralph［28］のパス探索法を実用化した Dirkse and Ferris［10］6) の方法もこの範疇に入る。

メリット関数法：元は不等式制約非線形計画問題に対する KKT 条件の再定式化に使われた Fischer-Burmeister 関数を非線形相補性問題に対して応用した［8］ものであり，半滑（semismooth）Newton 法はその簡潔性からも収束性からも有望である。

内点法：線形相補性問題に対する内定法の拡張が考えられる。

等が考えられている。

［4］には，CES 効用関数と線形生産技術を仮定する一般均衡モデルに対して，不動点ホモトピー法である Merrill and Eaves 法や前述の［34］の射影法，更に近似解法のシミュレーティド・アニーリング法の３種の方法に依る均衡計算の比較実験結果が示されている。それに依ると，Merrill and Eaves 法では財数が 20 位迄は良く計算出来るが，35～40 では概算値も求められず Todd の方法ですら価格が０になる財が一つでも有ると旨く行かないことや，［34］の射影法は予想に反して財数が数百迄は旨く計算出来ること，シミュレーティッド・アニーリング法は財数 100 以上の時に実時間で近似値（精度２%，５%）を求めるのに適していること等が示されている。

6) 両者は 1997 年の Beale-Orchard-Hays 賞を受賞している。

５．今後の展望

一般均衡問題は，Walras を源流とする tâtonnement 過程に於いては，変分不等式に依る定式化ができて，解の存在性や唯一性について見通しの良い議論ができ，効率の良い解法を考え得る。本稿では解の唯一性に擬単調写像に依る変分不等式の解が凸集合になることと正則性を利用する［17］の結果を主に参照しながら，一般均衡の解の性質について考察し，解法を概観した。

本稿では超過需要関数 $E(p)$ の C^1 級を仮定したが，局所リプシッツ連続等への一般化を考えることが将来の課題として考えれる。又，tâtonnement 過程だけでなく，non-tâtonnement7) 過程への一般化も考えられる方向性の一つである。

偏微分方程式の解の存在性を論じたり，近似解を計算する時に，変分問題を利用できる時があり，変分問題の解は変分不等式を用いて議論できることが分っているので，一般均衡に関らずより広範な領域への応用も 期待される方法論である。

7) 均衡の前に取引が行われる過程はより現実的であり，Edgeworth 過程等［32］が考えられている。

参考文献

[1] K.J. Arrow and A.C. Enthoven, "Quasi-concave programming", *Econometrica* 29 (1961), 779-800.

[2] D. Aussel, "Subdifferential properties of quasiconvex and pseudoconvex functions: Unified approach", *Journal of Optimization Theory and Applications* 97 (1998), 29-45.

[3] M. Avriel, W.E. Diewert, S. Schaible, I. Zang, *Generalized Concavity*, Plenum Press, New York (1988).

[4] A. Bachem, W. Hochstättler, B. Steckmetz, and A. Volmer, "Computational experience with general equilibrium problems", *Computational Optimization and Applications* 6 (1996), 213-225.

[5] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York (1983).

[6] J.-P. Crouzeix and J.A. Ferland, "Criteria for differentiable generalized monotone maps", *Mathematical Programming* 75 (1996), 399-406.

[7] B. De Finetti, "Sulle stratificazioni convesse", *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 30 (1949), 173-183.

[8] T. De Luca, F. Facchinei, and C. Kanzow, "A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems", *Mathematical Programming* **75** (1996), 407-439.

[9] W.E. Diewert, M. Avriel, and I. Zang, "Nine kinds of quasiconcavity and concavity", *Journal of Economic Theory* 25 (1981), 397-420.

[10] S.P. Dirkse and M.C. Ferris, "The PATH solver : A non-monotone stabilization scheme for mixed complementary problems", *Optimization Methods and Software* 5 (1995), 123-156.

[11] B.C. Eaves, F.J. Gould, H.O. Peitgen, and M.J. Todd eds., *Homotopy Methods and Global Convergence*, Plenum, New York, 1983.

[12] F. Facchinei and J.-S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complentarity Problems, Vol. 1*, Springer, New York, 2003.

[13] W. Fenchel, *Convex cones, sets and functions*, Mimeographed lecture notes, Princeton Univ., Princeton, 1951.

[14] S.A. Gabriel, A.S. Kydes, and P. Whitman, "The National Energy Modeling System: A large-scale energy-economic equilibrium model", *Operations Research* 49 (2001), 14-25.

[15] J.R. Hicks, *A revision of demand theory*, Clarendon Press, Oxford, 1956.

[16] W. Hildenbrand and M. Jerison, "The demand theory of the weak axioms of revealed preference", *Economics Letters* 29 (1989), 209-213.

[17] R. John, "A first order characterization of generalized monotonicity", *Mathematical Programming* 88 (2000), 147-155.

[18] N.H. Josephy, "Newton's method for generalized equations", Technical Summary Report 1965, Mathematics Research Center, University of Wisconsin, Madison, 1979.

[19] S. Karamardian and S. Schaible, "Seven kinds of monotone maps", *Journal of Optimization Theory and Applications* 66 (1990), 37-46.

[20] R. Kihlstrom, A. Mas-Colell, and J. Sonnenschein, "The demand theory of the weak axiom of revealed preference", *Econometrica* 44 (1976), 971-978.

[21] C.E. Lemke, "Bimatrix equilibrium points and mathematical programming", *Management Science* 11 (1965), 681-689.

[22] O.L. Mangasarian, "Pseudo-convex functions", *Journal of SIAM Control Ser. A* 3 (1965), 281-290.

[23] J.E. Martínez-Legaz and P.H. Sach, "A new subdifferential in quasiconvex analysis",

Journal of Convex Analysis 6 (1999), 1-11.

[24] B. Martos, "Subdefinite matrices and quadratic forms", *SIAM Journal on Applied Mathematics* 17 (1969), 1215-1223.

[25] L.W. McKenzie, *Classical General Equilibrium Theory*, MIT Press, Cambridge, 2002.

[26] K. Otani, "A characterization of quasi-concave functions", *Journal of Economic Theory* 31 (1983), 194-196.

[27] J.-S. Pang, "Newton's method for B-differentiable equations", *Mathematics of Operations Research* 15 (1990), 311-341.

[28] D. Ralph, "Global convergence of damped Newton's method for nonsmooth equations, via the path search", *Mathematics of Operations Research* 19 (1994), 352-389.

[29] S.M. Robinson, "Generalized equations and their solutions - I. Basic theory", *Mathematical Programming Study* 10 (1979), 128-141.

[30] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[31] H.E. Scarf, "The approximation of fixed points of a continuous mapping", *SIAM Journal on Applied Mathematics* 15 (1967), 1328-1343.

[32] A. Takayama, *Mathematical Economics 2nd ed.*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.

[33] Y. Tanaka, "Note on generalized convex functions", *Journal of Optimization Theory and Applications* 66 (1990), 345-349.

[34] L. Zhao and S. Dafermos, "General economic equilibrium and variational inequalities", *Operations Research Letters* 10 (1991), 369-376.