Title	数理解析セミナー・アブストラクト集(1987)
Author(s)	儀我, 美一
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 5, 1
Issue Date	1988-01-01
DOI	10.14943/5124
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/5439; http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/1266/
Type	bulletin (article)
Note	(Abstracts of Mathematical Analysis seminar 1987)
File Information	05.pdf

数理解析セミナー・アブストラクト集（1987）

(Abstracts of Mathematical Analysis seminar 1987)

代表者　儀我　美一

（ed. Y. Giga）

Series #5. February 1988

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#	Author	Title

1. **T. Morimoto,** Equivalence Problems of the Geometric Structures admitting Differential Filtrations
2. **J. L. Heitsch,** The Lefschetz Theorem for Foliated Manifolds
3. Twelfth Sapporo Symposium on Partial Differential Equations in 1987, Edited by K. Kubota
4. **J. Tilouine,** Kummer's criterion over Λ and Hida's Congruence Module

Abstracts of Mathematical Analysis Seminar 1987

On Dimensional Reduction of Functional Measures*

Asao Arai

Department of Mathematics, Hokkaido University

Sapporo, 060 Japan

Abstract

A notion of dimensional reduction for functional measures W_{Λ_ν} indexed by bounded rectangles $\Lambda_\nu = (-L_1/2, L_1/2) \times (-L_2/2, L_2/2) \cdots\cdots \times (-L_\nu/2, L_\nu/2)$ in the ν-dimensional Euclidean space R^ν, $\nu = 1,2,3,\ldots,$ is introduced. Roughly speaking, it measures a "dimensional continuity" of W_{Λ_ν} as $L_\nu \to 0$ ($\Lambda_\nu \to \Lambda_{\nu-1}$). For a general class of functional measures absolutely continuous with respect to a Gaussian functional measure, a sufficient condition for the dimensional reducibility is given. It is shown that functional measures associated with the $P(\phi)_\nu$-models or the Albeverio-Høegh-Krohn model in Euclidean quantum field theory are dimensionally reducible. As an application, a limit theorem for quanutm partition functions of the models in the two dimensional space-time, which is in some sense related to the semi-classical limit of the models, is proved.

* to be published in Journal of Functional Analysis (in the press)

Mori's Memory Kernel Equation for the Hamiltonian with RWA-Oscillator

Masao Hirokawa
Department of Mathematics Hokkaido University
Sapporo 060, JAPAN

We consider Mori's memory kernel equation *1) for the Hamiltonian with RWA-oscillator which is given the following:

$$H=\hbar\omega_0 a^+ a+\sum_{k=1}^{\infty}\hbar\omega_k b_k^+ b_k+\sum_{k=1}^{\infty}(\Gamma_k a^+ b_k+\Gamma_k^* b_k^+ a)$$

where a, b_k are Boson annihilatin operators , a^+ , b_k^+ are Boson creation operators, and Γ_k 's are complex numbers.

First, we construct a Hilbert space $\mathfrak{A}$ that consists of annihilation and creation operators. Then we use $e^{-\beta H}/\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})$ as a distribution of the initial state. In the Hilbert space $\mathfrak{A}$ of operator-clas, we expect that the following Liouville's equation:

$$d(e^{itH/\hbar} a e^{-itH/\hbar})/dt=iLe^{-itL}a$$

where L is Liouville operator, i.e., $La=[H,\ a]/\hbar$ ($[A,B]=AB-BA$)

By Mori's theory for Hilbert space $\mathfrak{A}$ and self-adjoint operator L, we can gain Mori's memory kernel equation for Hamiltonian H.

Thus, we can see Mori's fluctuation and dissipation, they are called Mori's noise and Mori's memory kernel function respectively. So, we can investigate F.D.T. in this case and the behavior of the F.D.T. as $\hbar\to 0$. Moreover, we study the behavior of the correlation function $R(t)$ of "a" as $t\to\infty$. That is our purpose.

*1) Formally, the form of Mori's memory kernel equation is given the following:

$$da(t)/dt=i\omega_a a(t)-\int_0^t\phi_M(t-s)a(s)ds+I_M(t)$$

where $\omega_a=\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}a^+(La))/\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}a^+a)$ denotes a frequency,
$I_M(t)=e^{-itL_1}(1-P_0)(iL)a$, $P_0A:=\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}a^+A)a/\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}a^+a)$
$L_1:=(1-P_0)L$. $I_M(t)$ is Mori's noise. $\phi_M(t)=\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}I_M^*(0)I_M(t))/\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}a^+a)$ is Mori's memory kernel function.

F.D.T.: $\Delta_{IM}(d\omega)=\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}a^+a)\mu(d\omega)/\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})$

where $\Delta_{IM}(d\omega)$ and $\mu(d\omega)$ are Borel measures of $\mathrm{Tr}(e^{-\beta H}I_M^*(0)I_M(t))/\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})$ and $\phi_M(t)$, respectively.

Rank one property of Hessian measures*

Yoshikazu Giga
Department of Mathematics
Hokkaido University
Sapporo 060, JAPAN

We consider a function $u(x)$ on an open set Ω in $\mathbb{R}^N$ whose second derivatives $u_{ij} = D_i D_j u$ are Radon measures, where $D_i = \partial/\partial x_i$. We prove that u_{ij} has rank one on a major portion of the place where u_{ij} is not absolutely continuous with respect to the Lebesque measure. Such a set may have fractional Hansdorff dimension larger than $N - 1$. As an application we show that $|\Delta u| = (\sum_{1 \leqq i, j \leqq N} u_{ij}^2)^{1/2}$ on such a set.

* joint work with Patricio Aviles, Singularities and rank one properties of Hessian measures, in preparation.

May 20, 1987

Langevin's Equation on the Generalized Functinal Space

Itaru Mitoma

Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo 060, Japan

We will discuss the following Langevin's equation on the dual of a nuclear space of functions with infinitely many variables connected with the central limit theorem for interacting lattice diffusion processes. Namely

$$dX(t) = dW(t) + L^*X(t)dt,$$

where $W(t)$ is a Brownian motion on the generalized functional space and L^* is the adjoint operator of L which has a formal expression :

$$LF(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i(X)^2 D_i^2 F(X) + \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i(X) D_i F(X), \quad X = (X_i)$$

$$D_i = \frac{d}{dX_i}.$$

An Analytical Iterative Method for Solving Concentration-Dependent Diffusion Problems

Zbigniew J. Grzywna
Dept. of Physical Chemistry Fundamentals
Silesian Technical University
44-100 Gliwice, POLAND

The quasilinear parabolic PDE of second order i.e.

$$u_t = \mathrm{div}\{D(u)\mathrm{grad}\ u\} \qquad (1)$$

with appropriate IBV_s is called a concentration-dependent diffusion problem. There is a great need for theoretical investigations in this area, stimulated by the experiments in Physics, Biology, and Engineering. The mathematical modelling of the concentration-dependent mass, and temperature dependent heat, transport is based on the aforementioned equation.

In this talk we will demonstrate some iterative analytical method of solution of one dimensional concentration-dependent diffusion equation.

We have choosen an exponential function for D(u) i.e. $D(u) = \exp[au]$, and simple but not compatible initial and boundary data.

So, finally our problem can be formulated as follows: (in a dimensionless variables)

$$u_t = \{D(u)u_x\}_x \ , \quad x \in (0,1), \quad t \in (0,\infty)$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ u(0,t) &= 1 \qquad (2) \\ u(1,t) &= 0 \end{aligned}$$

generating a mathematical description of so called "permeation" through memberane.

In order to make our problem effectivelly tractable, we split the whole time domain into two subdomains.

ETZ with $t \in [0,t_j)$ and LTZ in which $t \in [t_j,\infty]$, where t_j is the value of the "joint" time for these two cases.

ETZ(early time zone)

For a sufficiently small times $t \in (0,t_j]$, and the above zero initial data, an open interval $x \in (0,1)$ can be treated as a semiinfinite one (the phenomenon does not "see" the end of the region) $x \in (0,\infty)$. Applying Boltzmann transformation ($\eta = \frac{x}{2\sqrt{t}}$) to problem (2) we obtain

$$-2\eta \frac{du}{d\eta} = \frac{d}{d\eta}\left(D(u)\frac{du}{d\eta}\right)$$
$$u(0) = 1 \qquad (3)$$
$$u(\infty) = 0$$

After applying the Kirchhoff transformation

$$\tilde{u} = \int_0^u D(z)dz \qquad (4)$$

we get

$$-2\eta \frac{d\tilde{u}}{d\eta} = D(u)\,\frac{d^2\tilde{u}}{d\eta^2}$$
$$\tilde{u}(0) = \int_0^1 D(u)du = M \qquad (5)$$
$$\tilde{u}(\infty) = \int_0^1 D(u)du = 0$$

which is a quasilinear problem for O.D.E.

The final, itarative scheme we can get taking into account the D(u) = Doexp[au] relationship i.e.

$$-2\eta \frac{d\tilde{u}^{(i)}}{d\eta} = \frac{d^2\tilde{u}^{(i)}}{d\eta^2} + \underbrace{a\tilde{u}^{(i-1)}\frac{d^2\tilde{u}^{(i-1)}}{d\eta^2}}_{F^{(i-1)}(\eta)} + IBV_S \qquad (6)$$

To start the above procedure it is enough to notice that

$$F^{(0)}(\eta) = 0 \quad \text{implies} \quad \tilde{u}^{(1)}(\eta) = M \operatorname{erfc} \eta \qquad (7)$$

Substituting $\tilde{u}^{(1)}(\eta)$ into $F^{(1)}(\eta)$ we can calculate the second approximation, and so on.

For example

$$u^{(2)}(\eta) = \frac{1}{a}\ \ln \{1 + aM\ [aM(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}) - 1]\ \text{erf}\ \eta - aM^2[\frac{1}{2}\text{erf}\ \eta + - \frac{}{\sqrt{\pi}}\ \eta e^{-\eta^2}\text{erfc}\ \eta + \frac{1}{\pi}\ e^{-2\eta^2}] + aM(1 + \frac{M}{\pi})\} \tag{8}$$

As may be easily seen from the form of eq.(8) further calculus aimed at obtaining $u^{(3)}(\eta)$ become very laborious and tedious, but are possible to be carried out.

LTZ(Late-time zone)

In this case we apply Kirchhoff's transformation to problem (2) getting (for assumed D(u) exponential form)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t &= \tilde{u}_{xx} + \underbrace{a\tilde{u}\tilde{u}_{xx}}_{F(x,t)} \\ \tilde{u}(0,t) &= M = \frac{1}{a}\ (e^a - 1) \\ \tilde{u}(1,t) &= 0 \\ \tilde{u}(x,0) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

The iterative scheme may now be written as:

$$\tilde{u}_t^{(i)} = \tilde{u}_{xx}^{(i)} + F^{(i-1)}(x,t) + IBV_S \tag{10}$$

where

$F^{(i-1)}(x,t) = a\tilde{u}^{(i-1)}\cdot\tilde{u}_{xx}^{(i-1)}$

Putting $F^{(0)} = 0$ we can get $\tilde{u}^{(1)}(x,t)$ in the form[2]

$$\tilde{u}^{(1)}(x,t) = M(1-x) - \frac{2M}{\pi}\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\pi x}{m}\cdot\exp\ [-m^2\pi^2 t] \tag{11}$$

The rate of convergence for eq.(11) increases with time remarkably, so for times, large enough, we can preserve only the first term of the above series.

Substituting $\tilde{u}^{(1)}$ into $F^{(1)}(x,t) = a\tilde{u}^{(1)}\tilde{u}_{xx}^{(1)}$ we obtain the source term $F^{(1)}$ in the form:

$$F^{(1)}(x,t) = 2\pi aM^2(1-x)\sin \pi x\cdot\exp(-\pi^2 t) - 4aM^2\sin^2\pi x\ \exp(-2\pi^2 t) \tag{12}$$

We have to solve the problem (10) with the source term (12), to get a "second approximation" for late times. It can be done either by Green's function representation or decomposition method and Duhamel's theorem.

We have used the former one to get

$$\tilde{u}^{(2)}(x,t) = M[1 - x - \frac{2}{\pi}\ \sin \pi x\ e^{-\pi^2 t}] +$$

$$+ aM^2 \Big[\frac{32}{105\pi^3}(e^{-2\pi^2 t} - e^{-9\pi^2 t})\sin 3\pi x +$$

$$+ \frac{32}{27\pi^3}(e^{-\pi^2 t} - e^{-4\pi^2 t})\sin 2\pi x +$$

$$+ \frac{32}{3\pi^3}(e^{-2\pi^2 t} - e^{-\pi^2 t})\sin \pi x +$$

$$+ \pi \cdot t \cdot e^{-\pi^2 t} \sin \pi x \Big] \qquad (13)$$

so, finally the second approximation for the LTZ is given by

$$u^{(2)}(x,t) = \frac{1}{a} \ln [1 + a\tilde{u}^{(2)}(x,t)] \qquad (14)$$

with $\tilde{u}^{(2)}(x,t)$ given by (13).

In conclusion we can say that the main idea of the above method consists of transformation the quasilinear equations to semilinear one, with taking advantage of asymptotic behavior of solution for $t \to 0$ and $t \to \infty$.

Note: The questions concerning convergence of the above iteration schems can be answered on the base of the maximum principle[3].

Acknowledgment

This work has been done in collaboration with Mr. Aleksander Simon.

References

1. J. Crank "The Mathematics of Diffusion", Clarendon Press, Oxford, 1975. sec.ed

2. J. R. Cannon "The One-dimensional Heat Equation" Cambridge Univ. Press, 1984

3. R. Sperb "Maximum Principles And Their Applications" Academic Press, NY, 1981

1987. 6. 24

「変分の方法を用いた非線形制御系の構造解析と設計」

北大工学部精密工学科

島　公脩

制御系の設計には，現在でも，1930年代の回路網理論の流れの上にある伝達関数 $G(s)$ を用いる方法が活用されている。そうして，一方では，1950年代後半に，制御系の設計に用い得る方法として，一斉に現われて来た，ポントリャーギンの最大原理，ベルマンの動的計画法，ラサールとレフシェッツにより制御理論　　に導入された常微分方程式の定性的理論とリャプノフ関数を用いた安定論は，いずれも，系の表現として，

$$\dot{x} = f(x, u), \quad y = h(x) \qquad \begin{array}{ll} x = col.(x^1, \cdots, x^n) & \text{系の状態ベクトル} \\ u = col.(u^1, \cdots, u^r) & \text{系への入力ベクトル} \\ y = col.(y^1, \cdots, y^m) & \text{系よりの出力ベクトル} \end{array} \qquad (1)$$

という形から出発する。そうして，制御理論　　に，もっとも深い影響を与えたのは Kalman による系の構造解析の理論であって，線形系

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx \quad ; \quad A, B, C \text{ は定数行列} \qquad (2)$$

において　$\mathrm{rank}(B, AB, \cdots, A^{n-1}B) = n$　のとき系は可制御

　　　　　$\mathrm{rank}(C', A'C', \cdots, A'^{n-1}C') = n$　〃　〃　可観測

であると定義され，系(2)の入出力関係を表わす伝達関数は

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \qquad \mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\,(A\text{の固有値})$$

となる。非線形制御系の理論は，1970年頃より，微分幾何学を用いて，Kalmanの流れに沿った理論が展開されていて，主として，linear-analyticな系

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^{r} g_j(x) u^j, \quad y = h(x) \qquad (3)$$

の設計法，つまりある目的を達するように，入力 u を状態 x の関数として定める方法が，かなり整備されてきている。

表記のテーマは，同等な設計法が，入力に対する変分 δu の出力（あるいは評価関数）への影響 Δy を

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\delta u\| dt < \varepsilon \ll 1, \quad \|\cdot\| \text{ は適当な } R^r \text{ のノルム} \qquad (4)$$

のもとで

$$\Delta J = \Delta y = \delta J + \delta^2 J + \cdots \qquad (5)$$

とεの中に展開し，第一変分 $\delta J = 0$ の条件より，最大原理，第二変分 $\delta^2 J$ が正定値である条件より Regulator Problem や Optimal Singular Control Problem の判定条件，など最適制御の理論が導かれること，さらに任意の δu に対し $\Delta J = 0$ となる条件 (Complete Invariance) と δu によって ΔJ を任意に操作することのできる条件 (Output Controllability) が得られて，微分幾何による設計法とほぼ同等な設計法が導かれ，それは数式処理言語を用いて直ちに実用に供することが可能であること，を内容とする。微分方程式に操作可能なパラメータ u を導入した，ただそれだけのことが，制御理論にさらには現代の技術に深刻な影響を与えたのであり，半導体技術・情報処理技術の進歩によって，理論が実際に用い得るようになった。

Navier-Stokes 方程式の粘性消散についての注意

北大・理　松井伸也

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 有界領域に対して

$$
\text{(N.S)}\quad
\begin{cases}
u^\nu_t - \nu \Delta u^\nu + (u^\nu \cdot \nabla) u^\nu + \nabla p^\nu = 0 \\
\operatorname{div} u^\nu = 0 \qquad\qquad \text{in } \Omega \times [0, T) \\
u^\nu|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u^\nu|_{t=0} = u^\nu_0
\end{cases}
$$

を考える。formalに 粘性 $\nu \to 0$ を zeroにすると、

$$
\text{(E.E)}\quad
\begin{cases}
\bar{u}_t + (\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla \bar{p} = 0 \\
\operatorname{div} \bar{u} = 0 \qquad\qquad \text{in } \Omega \times [0, T] \\
\bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0
\end{cases}
$$

ただし境界条件は $\bar{u} \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$ (nは$\partial\Omega$の単位法線ベクトル(外向き))。でなくてはならない。

では、$u^\nu \to \bar{u}$ が なんらかの意味で言うことが出来ないかということを考える。これについて次の結果を得た。

Th. $u^\nu_0 \to \bar{u}_0$ in $L^2(\Omega)$ as $\nu \to 0$ とする。このとき、

$$\| u^\nu(t) - \bar{u}(t) \|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{as } \nu \to 0 \quad 0 \le t \le T$$

if and only if

$$\overline{\lim_{\nu \to 0}} \int_0^t \int_{\partial\Omega} \nu \operatorname{rot} u \cdot \bar{u} \times n \, ds \, d\tau = 0 \qquad 0 \le t \le T.$$

KM$_2$O-Langevin 方程式と Kalman フィルター

岡部靖憲　北大理
井上昭彦

信号過程に、Markov 性や定常性を仮定しないフィルタリングを考える。信号過程 x_n は次の KM$_2$O-Langevin eq. で決まるとする：

$$x_0 = i_0, \quad x_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \gamma(n,k) x_k + i_n \quad (n=1,2,\cdots) 。$$

ここで i は、平均 0 の独立な Gauß 過程，x, i : e-次元、γ : e×e。観測過程 y_n は、次で与えられるとする

$$y_n = F_n \cdot x_n + w_n \quad (n=0,1,\cdots) 。$$

w は、平均 0 の独立な Gauß 過程で，$E(w(n)\cdot {}^t w(n)) = E$ (単位行列)とする。y, w ; d-次元，F ; d×e。$\{i_0, i_1, \cdots, w_0, w_1, \cdots\}$ は、独立とする。$R^i(n) \equiv E(i(n)\cdot {}^t i(n))$，$p(n,m) \equiv E(x_n \cdot {}^t i_m)$ $(n \geq m \geq 0)$，$R^x(n,m) \equiv E(x_n \cdot {}^t x_m)$，$R^x(n) \equiv R^x(n,n)$ とおく。

命題　$p(n,m)$, $R^x(n,m)$ は、次から帰納的に求まる。

(i) $$p(n,m) = \begin{cases} R^i(n) & (n=m) \\ -\sum_{k=m}^{n-1} \gamma(n,k) p(k,m) & (n>m) \end{cases}$$

(ii) $$R^x(n,m) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \gamma(n,k) R^x(k,l)\, {}^t\gamma(n,l) + R^i(n), & (n=m) \\ \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{m-1} \gamma(n,k) R^x(k,l)\, {}^t\gamma(m,l) - \sum_{k=m}^{n-1} \gamma(n,k) p(k,m) & (n>m) \end{cases}$$

$\mathcal{F}_n \equiv \sigma(y_0, \cdots, y_n)$ $(n \geq 0)$ とし、y の innovation $\mathfrak{j}$ を、次で定める

$\mathfrak{j}_0 \equiv y_0$, $\mathfrak{j}_n \equiv y_n - E(y_n | \mathcal{F}_{n-1})$ $(n \geq 1)$ 。

$$R^{\mathfrak{j}}(n) \equiv E(\mathfrak{j}(n) \cdot {}^t\mathfrak{j}(n)), \quad R^{J}(n) \equiv \begin{pmatrix} R^{\mathfrak{j}}(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R^{\mathfrak{j}}(n) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} R^{J}(n-1) & 0 \\ \hdashline 0 & R^{\mathfrak{j}}(n) \end{array}\right)$$

とおく。$R^{\mathfrak{j}}(n)$ は、正則であることがわかる。

$$E(x_k | \mathcal{F}_n) = a_{k0}\mathfrak{j}_0 + \cdots + a_{kn}\mathfrak{j}_n, \quad (0 \leq k \leq n) \qquad A^n \equiv \begin{pmatrix} a_{00} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とおく。a_{kl} : $e \times d$, A^n : $(n+1)e \times (n+1)d$ 。

$$E(i_k | \mathcal{F}_n) = C_{kk}\mathfrak{j}_k + \cdots + C_{kn}\mathfrak{j}_n, \quad (0 \leq k \leq n) \qquad C^n \equiv \begin{pmatrix} C_{00} & \cdots & C_{0n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & C_{nn} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} C^{n-1} & \begin{matrix} C_{0n} \\ C_{1n} \\ \vdots \end{matrix} \\ \hdashline 0 & C_{nn} \end{array}\right)$$

とおく。C_{kl} : $e \times d$, C^n : $(n+1)e \times (n+1)d$ 。

$$\Gamma^n \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \gamma(1,0) & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \gamma(n,0) & \cdots & \gamma(n,n-1) & 1 \end{pmatrix}$$ とする。

定理、A^n, C^n, $R^J(n)$ は、A^{n-1}, C^{n-1}, $R^J(n-1)$ から次のように求まる。

(i) $R^{\mathfrak{j}}(n) = F_n \cdot R^{x}(n) \cdot {}^tF(n) - F_n \left(\sum_{k,l,m=0}^{n-1} \gamma(n,k) a_{km} \cdot R^{\mathfrak{j}}(m) \cdot {}^t a_{lm} \cdot {}^t\gamma(n,l) \right)$

$\times\, {}^tF_n \quad + E$(単位行列)

(ii) $C_{kn} = \left\{ {}^tp(n,k) \cdot {}^tF_n + (1 - \delta_{nk}) \sum_{l=k}^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} C_{kl} R^{\mathfrak{j}}(l)\, {}^t a_{ml}\, {}^t\gamma(n,m) \cdot {}^tF_n \right\}$

$\times R^{\mathfrak{j}}(n)^{-1} \quad (0 \leq k \leq n)$

(iii) $A^n = (\Gamma^n)^{-1} \cdot C^n$

gliding point の近くにおけるパラメトリックスと特異性の伝播について

1987、10、29

久保田幸次

gliding point とは、例えば次のようなものである。

完全反射の球面上の一点から光が内部に向って出る状況を考える。光の方向が接線に近づくと、一定時間内に起る反射の回数が増す。極限状態を想定すると、光は球面に外部で接し、反射点の軌跡は球面上の曲線になると考えられる。この接点を球面の余接空間で考えたものが *gliding point* である。このような状況は、弾性体の方程式系等でも考えられるが、系の場合は叙述が複雑になるので、以下では単独2階方程式の場合を考える。又、局所的に考えるので、領域は半空間に移して考える。詳細については、H.M.J. Vol.15(1986) のpp.243−308及び Hokkaido univ. preprint series in Math. No.12 (1987) を参照されたい。

$P(x, D)$ を2階の強(*strict*)双曲型微分作用素とする。ここで、

$$x=(x_0, x_1, \cdots, x_n)=(x', x_n)\in R^{n+1} \quad (n>1),$$

$$D=(D_0, D_1, \cdots, D_n), \quad D_k=-i\,\partial/\partial x_k,$$

x_0 は"時間変数"である。次の境界値問題を考える。

$$(1)\quad \begin{cases} P(x, D)u=0 & , x_n\geq 0 \\ B(x', D)u=f(x') & , x_n=0 \\ u=0 & , x_n\geq 0,\ x_0<<0 . \end{cases}$$

ここで $f\in \mathcal{E}'(R^n)$ は given。

目的 ① gliding point の近くで (1) のパラメトリックス (mod C^∞ の解) を作る。
② $WF(u)$ と $WF(f)$ の関係を調べる。

(1) の解 u は、$x_n < 0$ まで拡張可能な distribution の範囲で考える。i.e.

$$u \in \bar{\mathcal{D}}'(X) \equiv \mathcal{D}'(R^{n+1})\big|_{X^\circ} \subset \mathcal{D}'(\mathring{X})$$

とする。ここで

$$X = \{ x = (x', x_n) \in R^{n+1} \mid x_n \geqq 0,\ x' \in X' = R^n \},$$

$$\mathring{X} = X \setminus \partial X.$$

P についての仮定　$P_2(x, \xi)$ を P の主表象とする。
$(x, \xi) \in T^*X \doteqdot X \times R^{n+1}$ (X の余接空間)

仮定1　∂X は P に関して非特性的 (i.e. D_n^2 の係数 $\neq 0$)。
一般性を失うことなしに

(2)　$P_2(x, \xi) = (\xi_n - \lambda(x, \xi'))^2 - \mu(x, \xi')$

の形としてよい。

仮定2　μ が零点をもつ (境界に接する ray がある) ために

(3)　$\partial^2 P_2 / \partial \xi_0^2 < 0$.

B についての仮定は、$B_1(x', \xi)$ を B の主表象として

(4)　$B_1(x', \xi) = \xi_n - \lambda(x', 0, \xi') + b_1(x', \xi')$

の形とする。ここで $b_1 \in S^1_{1,0}$. ($b_1 \equiv 0$ のとき $Bu = 0$ は Neumann 境界条件)。

今、$(\bar{x}', \bar{\xi}') \in T^*X' \setminus 0$ を a (fixed) gliding point とする。i.e. $\mu(\bar{x}', 0, \bar{\xi}') = 0$ かつ

(5) $\{P_2, \partial P_2/\partial \xi_n\}(\bar{x}, \bar{\xi}) < 0$

とする。ここで $\bar{x} = (\bar{x}', 0)$, $\bar{\xi} = (\bar{\xi}', \bar{\xi}_n)$, $\bar{\xi}_n = \lambda(\bar{x}, \bar{\xi}')$。

境界条件が

(6) $b_1(\bar{x}', \bar{\xi}') \neq 0$

をみたすときは、Dirichlet 条件の場合と同様に扱える。

(7) $b_1(\bar{x}', \bar{\xi}') = 0$

のときは、次の条件 (H) を仮定する。$(\bar{x}, \bar{\xi})$ で $P_2 = 0$ だから $\partial P_2/\partial \xi_0 \neq 0$ （∵強双曲型）

$$\underbrace{\partial P_2/\partial \xi_0}_{2(\xi_n-\lambda)(-\lambda_{\xi_0}) - \mu_{\xi_0}} = -\mu_{\xi_0}$$

今、

(8) $\partial \mu/\partial \xi_0 > 0$

と仮定すると、$\xi_n^+(x, \xi') \equiv \lambda - \sqrt{\mu}$ は $P_2(x, \xi', \xi_n) = 0$ の根の中、反射波に対応する。

$\mu_0(x', \xi') = \mu(x', 0, \xi')$,

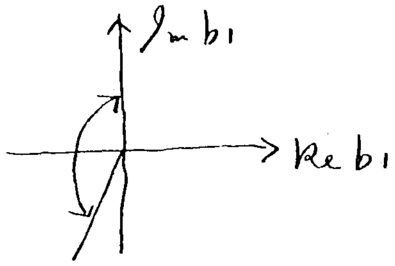
$N_0 = \{(x', \xi') \in T^*X' \setminus 0\ ;\ \mu_0 = 0\}$: glancing surface

$R(x', \xi') = B_1(x', \xi', \xi_n^+(x', 0, \xi'))$

$= -\sqrt{\mu_0} + b_1(x', \xi')$: ロパチンスキー行列式

とおくと、$(\bar{x}', \bar{\xi}')$ の近くで b_1 は次をみたすと仮定する。

条件 (H)　$b_1|_{N_0}$ の値域は、sector



に含まれる。

i.e. $\exists \delta_0 > 0$; $\frac{3}{2}\pi - \delta_0 \leqq \arg b_1|_{N_0} \leqq \frac{\pi}{2}$。

以上の仮定の下で、Eskin, Melrose, Taylor, Petkov によって、(6) 又は $b_1 \equiv 0$ の場合に得られたものと同様のパラメトリックスが作れる。特異性の伝播についても従来と同様の結果が成り立つ。