HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	レナード・ジミィ・サヴェジの論理
Author(s)	園, 信太郎
Citation	經濟學研究, 63(2), 197-206
Issue Date	2014-01-24
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/54585
Type	bulletin (article)
File Information	ES_63(2)_197.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

経済学研究 63−2
北海道大学 2014.1

レナード・ジミィ・サヴェジの論理

園　信太郎

1．はじめに

数学の基礎に関心のある読者を念頭に置いて，レナード・ジミィ・サヴェジ（Savage, Leonard Jimmie，愛称 Jimmie，1917.11.20—1971.11.1）の独特の論理について述べようと思う。それは，彼の「基礎論」(1954，1972）の冒頭の六つの章で展開されている。Statistics とあるが統計学の知識は必要でない。彼は確率の定義及び解釈の問題をできる限り数学的に取り扱おうとしているのである。「確率とは何か，それはどうあるべきか，それが「ある」とはいかなることか」という本質的問が彼の課題である。つまり，一見すると数学外の様に見えてしまう思想的課題に，数学的接近を図るのである。

その際彼は，論理と呼ばれてきた事柄の拡張を企図する。ここで言葉を準備する。純粋数学における論理（但し，何らかの流儀に基づいて定式化されてしまう前の，生粋の論理）を純論理と呼び，一方，「事事物物に即して展開される論理」を事物論理と呼ぶこととする。事物論理は，諸諸の事象（できごと），諸諸の不確定性（ふたしか），人，物品，貨幣などに関るのであり，実務家，実験家，フィールド・ワーカーなどの論理である。実はサヴェジは，この事物論理の部分的な定式化にほぼ成功しているのである。

彼は「その個人」を導入してこれを為そうとする。「その個人」とは理念物であり，純論理に関る諸計算を，正確に，瞬時に遂行してその結果を明示できる合理的存在である。この「個人」にとっては，（十進法で小数展開される）円周率の任意の指定されている桁の数字は自明であり，証明可能な命題は即座に証明される。だが，「その個人」は不確定性に直面する。例えば，眼前の「その卵」が食えるのか腐っているのかは，彼にとって不確定である。「その卵」の内実を演繹することなどできないのである。

しかしサヴェジは，経済学から選好（preference）の概念を借用してこの難局を乗り切ろうとする。彼は「その個人」に選好を課すのだ。

2．選好及び規範的公準観

選好とは「このみ」に関る選択だが，彼はこれを決定の問題とする。つまり，二つの選択肢 **f** 及び **g** に対して，個人が **f** よりも **g** を選ぶとは，単なる「このみ」の問題ではなく，個人の（思慮に基づく）決定でなければならないとする。つまり **f** よりも **g** の上に自身の決断を下すのである。この場合「**g** は **f** よりも選好される」と表現する。しかし論理上は，選択肢が無差別，つまり **f** と **g** とが対等ということも排除できないので，実際の作業は間接的な選好様式，つまり，「**f** は **g** よりも選好されるには非ず」という表現を用いる。これは選択肢間の二項関係であるので，例えば $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$ などと表記する。また，「$\mathbf{g} \leq \mathbf{f}$ には非ず」を $\mathbf{f} < \mathbf{g}$ と略記する。ここで注意すべきなのは，この $<$ は「には非ず」を用いて導入される二項関係であり，その定義からは，**f** よりも **g** を積極的に選ぶとい

ういわばpositive preferenceを特徴づける解釈は従わない。このことは，サヴェジの第六公準の前任者であるP 6′の内訳を評価する際の論点となる。なお，fとgとが無差別であるとは「f≦g かつ g≦f」となることと定義しておき，f＝･gと記すこととする。

彼が本来念頭に置いた選択肢は，「基礎論」の第5章第5節の83頁で述べられているように，life-long policy，つまり生涯にわたるポリシーであり，「その個人」は，自身の生涯にわたる決定をただ一度だけ下すのみなのである。このような決定を，彼は大きな決定（grand decision）と呼んでいる。つまり「その個人」は，以後の自身の人生をこの決定に従って生き抜くのである。ここで大きな決定がもたらすポリシーをfとすると，「その個人」は，不確定性に直面した場合にfを振り返る。するとfは進むべき方角を黙然と指し示すのであり，「その個人」は，fのこの「計算結果」に忠実に従って自身が進むべき道を選ぶのである。

大きな決定を下そうとする際に，「その個人」は幾つかの可能な（場合によっては想像上の）ポリシー，f, g, h，…，を思慮する。これらのポリシーを自身の選好≦の篩にかけて，一つを「えりぬく」のである。そこでサヴェジは，この選好が単純な順序（simple ordering）であることを要請する。これがサヴェジの第一公準P 1である。その内訳は，「「その個人」の選好は比較可能性及び推移性を満たす」と言うものである。

そこで問題なのはこの公準（postulate）の合理的根拠である。サヴェジは，「その個人」が二つの異なるポリシーに直面しているとして，二者択一を迫られる場合においては，「選ぶ」という行為（「ことば」ではない）によって自身の選好を明示できるはずだとする。つまり「選ぶ」ことから「逃げる」ことがなければ，二つの選択肢は行為によって比較可能であるとする。また二項関係＜が循環するのであれば，「その個人」は不決断の状況に陥るのであり，このような有様は不合理であるとする。つまり，「循環」は「過ち」であり，修正されなければならない。

なお，「循環」の排除の正当化は，極めて微小な（但し正の）額εを用いて，しかも＜を積極的な選好と見なして，「fよりもg」が本当ならば，「f及びε」よりもgであり，「gよりもh」が本当ならば，「g及びε」よりもhであり，「hよりもf」が本当ならば，「h及びε」よりもfとなり，結局手元にはfが戻ってきて，額3εが失われ，しかも「循環」を保持する限りこの支払はいつまでも続くのであり，これは不合理であるとして，為されることがある。しかし，貨幣的な価値尺度である「額」は数学外の物であり，それが「微小である」とはいかなることか自明ではない。従ってサヴェジは，このよくある正当化を持ち出さずに，「循環」は不合理であり「過ち」であると率直に述べるのである。

彼は公準を「その個人」が自身へと課すmaximであるとしている。つまり公準とは，個人が自身の行動様式を合理的に縛るために，自身へと課す規範であるとする。さらに彼は，自身が提示する公準を仮に誰かが侵犯しようとしているとすれば，その誰かは「自身が不合理な状況に陥ろうとしているのではないか」と内省し，侵犯しようとしている自身の姿に自身がどのような内的反応を示しているかを，冷静に観察してもらいたいと懇願している。彼が提示している公準系とは，「個」が自身に対して課す規範系に他ならない。

3．「この世界」の状態と「むくい」としての結果

自身の生涯にわたるポリシーが，そのポリシーの選択者としての「個」にもたらす窮極的な「むくい」が，結果（consequence）である。結果とは「個」の窮極的状態である。しかし「その個人」は不確定性に直面しているのであ

り，従って，いかなる結果を自身が荷うこととなるかについて「ふたしか」である。もし「この世界」の「真の状態」，＊，があるとすれば，この＊を知ることによって「ふたしか」は消去され，ポリシーの末路を覚知できることとなるが，それは「その個人」にとって不可能である。だが「その個人」は，＊の候補者たち，s，s′，s′′，…，の全体から成る（空でない）集合Sを，「この世界」に対する表現として措定できる。このSの元は状態（state）と呼ばれる。つまり「この世界」の状態である。ポリシー及び状態が定まると「むくい」もさだまる。窮極的な「むくい」としての結果とは，「個」における純粋経験である。

「個」における結果を「単離」して自在に用いるのがサヴェジの流儀である。例えば，「窮極的どしゃぶり体験」という記号列で示唆される，「個」における純粋経験をcとすると，想像上の実験として，「「快晴の日」にcを荷う」ことが遂行されたりもする。とにかくサヴェジは，「むくい」としての純粋経験を賞（prize）や収入（income）の様に自在に操作するのだ。

Sの部分集合は事象（event）と呼ばれる。特に空事象∅及び全事象Sがある。＊を指し示す状態が属する事象は「この世界」で現に通用する。

サヴェジは可能な結果の全体を集合として捉えているが，ここではそれをCsqとする。また彼は，SからCsqへの写像を行為（act）と呼んでいる。「その個人」からすれば，生涯にわたるポリシーとは行為である。

4．「生涯にわたるポリシー」の現実性と目的概念

サヴェジの念頭には「生涯にわたるポリシー」が概念として（紛れもなく）あるのだが，彼はそれを非現実的な理念物と見なしている節がある。彼は，自身が提示している行為概念を，ゲーム理論における戦略概念の類似物として把握しようと努力しているが，問題のポリシーに対してもアルゴリズムとしてこれを捉えようとしている。つまり彼は自身のポリシー概念を純論理に基づいて構築しようとしているのだ。しかし事物論理の側からすれば，生涯にわたるポリシーとは，「個」に宿る「心のコンパス（compass，羅針盤）」以外の何物でもない。この「心のコンパス」とは，立志達悟の「個」に宿る「なにか」である。

立志達悟とは，志を既に確立し惑うことがない有様である。いかなる不確定性に直面しても自身の「心のコンパス」が指し示す方角に黙然と進むのである。言わば志学不惑である。こちらの文化には純論理を養う豊かな純粋数学が発育しなかった。「論理」とはもっぱら事物論理である。しかも，事物論理への徹底は「そこなし」の深みを持つに至った。その副産物が「心のコンパス」だが，しかし既に『論語』では「義」の一字でこれを捉えている。「一もってこれを貫く」という発言もある。事物論理からすれば「心のコンパス」とは立志達悟の現実的果実であり，単なる理念物などではない。

なぜ「個」が「心のコンパス」を持ち得るかだが，将来，精神（霊性などではない）と呼ばれてきた事柄の機能的本質が数学的諸形式によって捉えられれば，この謎も解き得るであろう。

とにかくサヴェジは，行為を真剣に問うのだが，「目的」はどうなるのか。彼にとっては，通常の「目的」とは「目的の設定」という行為の帰結であり，彼は「目的の設定」を，小さな世界（small world）の選択という作業に（自動的に）含ませている。大きな世界（grand world）Sに対しては，「大きな目的」，正に立志達悟が対応する。

さらに注意すべきなのは，彼の枠組みでは「偶然」も「帰納」も登場しない。「確率」は不確定性に対する「個」の態度によって規定され，「偶然」を持ち出す必要はない。従って，「偶然とは何か」という厄介な問には関らない

ですむ。また「帰納」と呼ばれる作業だが，これは不確定性に直面している「個」による決定によって，暗黙の内に消去されてしまう。つまり，「帰納」の問題が決定の問題によって追い出されるのである。彼はどこまでも行為に徹するのであり，決断決定の人である。

5．The sure-thing principle 及び条件つき選好

The sure-thing principle を「商量の原理」と訳すこととする。これはサヴェジが重視する基本原理である。つまり,「「この世界」で事象 A が通用する場合 $f \leq g$ であり，「この世界」で事象非 A が通用する場合 $f \leq g$ であると，「その個人」が判断する場合,「その個人」は，いずれの事象が通用するかは知らないとしても，$f \leq g$ と判断する」という判断の様式は合理的であり，さらに,「事象 A は実際上不可能というわけではないとして，事象 A が通用する場合 $f < g$，事象非 A が通用する場合 $f \leq g$ と,「その個人」が判断する場合，いずれが通用するかを知らないとしても,「その個人」は $f < g$ と判断する」という判断の様式は合理的であるとするのが，サヴェジの立場であり，これらの判断様式を「商量の原理」と呼ぶのである。

この「商量の原理」を用いて条件つき選好の概念を反省してみる。この条件つき選好とは，任意の事象 B に対して，B が与えられている場合の選好，つまり「B が通用する」と想定する場合の選好である。このような選好を $\leq$given B とか $<$given B と表記する。「B が与えられている場合に，f は g よりも選好されるには非ず」とは，つまり $f \leq g$ given B とは，B の S に関する補集合～B 上でこれら二つの行為がとる結果（つまり Csq の元）には依存しない判断様式のはずである。そこでこれら二つは～B 上で一致すると想定すると，～B 上では両者は無差別なのだから,「商量の原理」により，この条件つき選好の下で $f \leq g$ となるはずであり，一方この選好は，両者が～B 上で一致しているので，B 上での両者の挙動のみに依存するはずである。つまり，後者の選好によって問題の条件つき選好を「定義する」道が開けることとなる。即ち，f 及び g を行為，B を事象とする。f 及び g を B 上で一致するように変形したものを各 f' 及び g' とすると，$f' \leq g'$ ならば $f \leq g$ given B と表記する。この $\leq$ given B は，f 及び g の B 上での挙動のみに依存するはずなので,「一致させる変形」のやり方には依存しないはずであり，もし依存するとすればそれは不合理と言ってよいであろう。そこで次の第二公準 P 2 が提示される。

P 2. f'，g'，f''，及び g'' を行為とし B を事象とする。f' 及び g' は～B 上で一致し，f'' 及び g'' も同様とする。また，f' 及び f'' は B 上で一致し，g' 及び g'' も同様とする。この場合，$f' \leq g'$ ならば $f' \leq g''$。

この P 2 は，表層的には $\leq$given の定義の成立を保証する，つまり条件つき選好が well-defined であることを保証するものだが，P 2 を侵犯する「個」は,「商量の原理」に反することとなるので不合理であるとするのが，その内実である。つまり,「商量の原理」により，合理的「個」は P 2 を自身に課すこととなる。

条件つき選好を利用すると，事象が実際上不可能である（virtually impossible）ことを，次のように定義できる。即ち，B を事象とする。いかなる行為 f 及び g に対しても $f \leq g$ given B となることを，B は実際上不可能であると言う。また，二項関係 $\leq$given B から二項関係 $<$given B が通常の流儀で定義できる。無差別関係 $=$・given B も同様である。

条件つき選好にとって重要な命題を述べておきたい。n を正の整数としておく。事象の列（B_i ; $i=1, \cdots, n$）が B に対する分割であるとは，$B_i, i=1, \cdots, n$ が互いに排反であり，かつ $B = \cup\{B_i ; i=1, \cdots, n\}$ となることである。する

と，事象 B に対する分割（$\mathbf{B}_i$; $i=1,\cdots,n$）に対して，$\mathbf{f}\leq\mathbf{g}$ given $\mathbf{B}_i$; $i=1,\cdots,n$，ならば $\mathbf{f}\leq\mathbf{g}$ given B。さらに，ある番号 j に対して $\mathbf{f}<\mathbf{g}$ given $\mathbf{B}_j$ならば，$\mathbf{f}<\mathbf{g}$ given B。特に B＝S ならば，結論の given B を省ける。これは極めて基本的な命題である。

6．結果の間の選好と第三公準

結果とは「個」が荷うこととなる窮極的な「むくい」であり，「個」における純粋経験である。このような「個」の状態が一つでも存在すれば Csq は空ではない。しかし結果の間で（サヴェジの意味での）選好を考えるということができるのであろうか。自身が荷うかもしれない「むくい」の間で，「個」が自身の嗜好（taste）を考えることは別に不思議ではない。しかし，この嗜好と「個」の行為との間にいかなる関りがあるのかは自明ではない。

サヴェジは「個」の嗜好を「個」の選好の統制下に置くために，定数的（constant）行為を導入する。つまり，行為は既に S から Csq への写像として捉えられているので，任意の結果に対して，恒にその結果のみを値として取る S 上の写像を導入するのであり，このような写像が定数的と呼ばれるのである。結果 **c** に対応する定数的行為を<**c**>と記すこととしておく。そこで，**c** 及び **d** を結果とすると，$\mathbf{c}\leq\mathbf{d}$ とは<**c**>≤<**d**>のことであると，定義するのである。なお通常の流儀で結果間の＜も定義できる。無差別関係＝・も同様である。

だが，定数的行為とは自明なものではない。「この世界」の状態がいかなるものであれ自身の純粋経験を一定に保つという，いわば「不動の」行為である。この「不動の」行為に対して，次の第三公準 **P 3** が導入される。

P 3.　**c** 及び **d** を結果とし，B を実際上不可能ではない事象とする。この場合，$\mathbf{c}\leq\mathbf{d}$ と<**c**>≤<**d**>given B とは同値である。

この **P 3** に関る重要な命題を述べておきたい。n を正の整数とする。（$\mathbf{B}_i$; $i=1,\cdots,n$）を B に対する分割とする。また（$\mathbf{c}_i$; $i=1,\cdots,n$）及び（$\mathbf{d}_i$; $i=1,\cdots,n$）を結果の列とする。各 i に対して $\mathbf{B}_i$ 上で $\mathbf{c}_i$及び $\mathbf{d}_i$ を取る行為を，各 **f** 及び **g** とする。この場合，$\mathbf{c}_i\leq\mathbf{d}_i$, $i=1,\cdots,n$，ならば $\mathbf{f}\leq\mathbf{g}$ given B。さらにある j に対して $\mathbf{c}_j<\mathbf{d}_j$かつ $\mathbf{B}_j$は実際上不可能ではないならば，$\mathbf{f}<\mathbf{g}$ given B。特に B＝S ならば，結論の given B を省ける。

7．定性的個人的確率

次に個人的確率（personal probability）の定式化である。「その個人」が二つの卵（茶と白としておく）に直面しており，二者択一を迫られているとする。選んだ卵が「食える」のならば現金百円の賞がもらえ，然らざれば賞はないとする。彼が「茶」を選べば，「食える」ということに関しては，「白」よりも「茶」が（彼にとっては）より確からしいと，（彼が）判断していると見なして，別に不都合はないであろう。この「より確からしい」という判断の様式は，「個」の行為によって定まるものであり言辞的なものではない。黙然とした行為によって表明される「個」のオピニオン（opinion）である。しかし，賞金の額が正ではあるが変化した場合，例えば 79 円に減額される場合，「その個人」の判断が「白」へと逆転することを容認すべきであろうか。このようなオピニオンの「ぶれ」は不合理であるとして，排除するのがサヴェジの立場である。つまり「その個人」は，賞が一円であれ一万円であれ，思慮深く黙然と自身の道を選ぶのであり，この選びには「ぶれ」がないのである。

この（「個」における）「たしからしさ」を定式化する際には，無差別性を考慮して「より確からしいには非ず」という間接的な選好が導入される。つまり，例えば，「白が食えることは

茶が食えることよりも，より確からしいには非ず（not more probable than）」などとなる。

問題はこの「たしからしさ」の定式化である。サヴェジは，そのために次の第四公準 P 4 及び第五公準 P 5 を導入する。

P 4. A 及び B を事象とし，c，c′，d，及び d′ を結果とし，f，f′，g，及び g′ を行為とする。さらに，c′＜c かつ d′＜d として，f 及び g は，A 及び B 上で各値 c を，～A 及び～B 上で各値 c′ を取り，f′ 及び g′ は，A 及び B 上で各値 d を，～A 及び～B 上で各値 d′ を取るものとする。この場合，f≦g ならば f′≦g′。

P 5. c＜d を満たす結果 c 及び d が存在する。

世界 S は空ではないとしたが，そうしなくとも P 5 より空ではないことが従う。また，Csq も空ではないとしたが，P 5 より当然空ではない。またこの P 5 より，S が実際上不可能とはなり得ないことが従う。

次に定性的個人的確率の定義である。A 及び B を事象とする。A≦B つまり「A は B よりもより確からしいには非ず」とは，「c′＜c となる任意の結果 c 及び c′ に対して f<A>≦f<B>」となることである。なおここで f<A> とは，A 上で c を，～A 上で c′ を取る行為であり，f<B>も（B に対する）同様の行為である。P 4 及び P 5 などより事象間の（自明でない）この二項関係が存在する。これを「その個人」の定性的個人的確率と呼ぶ。また通常の流儀で＜も定義できる。無差別関係＝・も同様である。

定性的個人的確率は次の(1)(2)(3)を満たす。

(1)それは単純な順序である。

(2)B，C，及び D を事象とし，さらに B∩D＝C∩D＝∅とすると，B≦C と B∪D≦C∪D とは同値である。

(3)A を事象とすると∅≦A であり，しかも∅＜S である。

なお，P 3 などに注意することで，A が実際上不可能であることと A＝・∅とが同値となることが従う。

定性的個人的確率は幾つかの基本的性質，例えば，「B≦B′ かつ C≦C′ で B′∩C′＝∅ならば，B∪C≦B′∪C′」などを満たしている。また，実際上不可能な事象の有限合併は実際上不可能である。

事象とは「この世界」S の部分集合のことであり，可測性に関する議論無しに定性的個人的確率が導入されていることには，やはり用心すべきである。

8．確率の定量化と P 6′

この P 6′とは次である。

P 6′. B 及び C を事象とする。B＜C ならば，「この世界」S に対するある分割が存在してその任意の項 D に対して B∪D＜C。

問題はこの P 6′の根拠である。「その個人」が，ありふれた一枚のコインに着眼し，これを投げ上げて裏（T）か表（H）かを観察するという，想像上の実験を想定するものとしよう。n を正の整数として，n 回投げ上げると想定すると，T 及び H からなる長さ n の可能な列は全体で 2^n 個であり，「この世界」S は，「想像上の実験の場」で，2^n 個に分割されることとなる。n が大きくなるに従って S はいわば「細分」されるのである。そこで，このような「細分」を考えて，「その各項 D に対して B∪D＜C」とできるのならば，つまり n を充分に大にとって問題の不等関係が従うと「その個人」が判断するのならば，彼は自身に対してこの P 6′を課すこととなるのである。ここで用心すべきなのは，T か H かは無差別であるというよう

な「たしからしさ」の同等性は何ら仮定されていないということである。何らかの無差別な，つまり一様な分割を想定するのならば，それは元来証明されるべき「たしからしさ」の定量化可能性を，事実上部分的に前提としていることとなり，そのような無差別性の仮定は論理的に受け入れ難いのである。

B<C とは「C≦B には非ず」ということであった。つまり「非ず」という作用素によって間接的に定義されている「間接的な」選好である。これを positive に解釈できるように特徴づけるのが P 6′である。これを「選好の連続性に関する仮定」として言及する流儀があるが，実際には positive preference (<) の特徴づけであり，「その個人」の選好の特徴づけの一角である。

定性的個人的確率は P 6′を導入することによって一意的に定量化され，しかもその定量的確率は精密である，というのがサヴェジの基本命題の一つである。定量的確率の定義だが，P が S 上の定量的確率であるとは，次の (0) (1) (2) (3) を満たすことである。

(0) P は S の各部分集合 (つまり事象) に対して実数値を対応させる関数である。
(1) 任意の事象 B に対して P(B)≧0。
(2) B∩C = ∅ならば P(B∪C) = P(B) + P(C)。
(3) P(S) = 1。

また，定量的確率 P が定性的確率≦に一致するとは，「B 及び C を事象とすると，B≦C と P(B)≦P(C) とは同値」ということである。さらに，定量的確率 P が精密であるとは，「任意の事象 B と 0 以上 1 以下の任意の実数 ρ に対して，B のある部分集合 C が存在して P(C) = ρP(B)」ということである。

確率の定量化に関するサヴェジの基本命題は，「定性的個人的確率≦が P 6′を満たす場合，S 上のある定量的確率 P が存在して P は≦に一致する。さらにこの P は一意的に定まり，しかも精密である。」と表現される。

この命題を導く際に，彼は次の等分割補題を従属選択の原理を使って導き，この補題を活用している。

等分割補題．≦を定性的個人的確率とし P 6′を満たすとする。この場合，任意の事象 B に対してある事象 C 及び D が存在して，B = C ∪D，C∩D = ∅，かつ C = ・D。

なお従属選択の原理は次の様式とする。即ち，A を集合とし R をその上の二項関係とする。A の任意の元 x に対して A のある元 y が存在して R(x, y) ならば，A の任意の元 a に対して $\boldsymbol{\omega}$ から A へのある写像 f が存在して，f (0) = a かつ任意の n∈$\boldsymbol{\omega}$ に対して R(f(n), f(n+1))。なお，$\boldsymbol{\omega}$ は 0 から始まる自然数の全体である。この原理は A = ∅だと恒真 (tautology) である。

サヴェジは，P 6′の一般化である次の P 6 を第六公準として掲げる。

P 6．f 及び g を行為とし c を結果とする。f<g ならば，S に対するある分割が存在して次の (1) 及び (2) を満たす。

(1) その分割の任意の項に対して，その項上で値 c を取り他では g と一致する行為 g′ に対して f<g′。
(2) その分割の任意の項に対して，その項上で値 c を取り他では f と一致する行為 f′ に対して f′<g。

サヴェジの「その個人」は，P 1 から P 6 までを規範として自身に課すのである。

9．条件つき確率の概念

B を事象とすると，条件つき選好≦given B が既に導入されている。ここで B が実際上不

可能ではないとすると，もとの選好$\leq$がP 1からP 5までとP 6′とを満たせば，この条件つき選好もこれら六つの公準を満たすことが従う。C 及びD を事象として，P 4と同様にして行為 f<C>及び f<D>を一対取り，f<C>$\leq$f<D>given B によって，C$\leq$D given B を定義することができそうである。つまり，条件つき定性的確率の定義ができそうなのである。しかし，「ためし」の行為対 f<C>及び f<D>は一意とは限らない。一方，f<C>$\leq$f<D>given B と C∩B$\leq$D∩B とは同値である。そこで，C$\leq$D given B を C∩B$\leq$D∩B によって定義することとする。

もとの選好と一致する「その個人」の定量的確率 P は一意的に定まるが，P(B)≠0とすると，さきの六つの公準により，$\leq$given B に一致する「その個人」の定量的確率も一意的に定まり，これを P(・|B)と表記すると，一意性より，任意の事象 A に対して P(A|B)＝P(A∩B)/P(B)でなければならないことが従う。通常条件つき確率は，「確率」を「確率」で割るという流儀によって，天下り式に「定義」されるのだが，サヴェジの枠組みからすれば，この「定義」は演繹されるのである。条件つき確率を定めるこの等式により，確率算の乗法法則 P(B∩C)＝P(B)P(C|B)，但し P(B)≠0，が従い，Bayes' rule　P(A|B)＝P(A)P(B|A)/P(B)，P(B)≠0，もほぼ明らかとなる。なお，乗法法則において，P(B)＝0の場合は P(C|B)を任意の実数値に固定しておくと約束すれば，両辺が0となりやはり等号が成立する。このように規約しておけば，Bayes' rule は P(A)＝0でも成立する。なお定量的確率 P(・|B)，P(B)≠0，は精密である。

P(A|B)の解釈だが，「B が通用している」という条件の下での「A の確率」ということだが，「観察」との関りからすれば，確率 P(A)は，「B の通用」を(「その個人」が) 観察することによって，確率 P(A|B)へと改訂されるのである。即ち，条件つき確率は，「「観察」による学習 (learning)」という作業への，一つの定式化となっている。

10. 効用関数の存在

有限個の値のみを取る行為を単純な行為と呼ぶこととする。S に対する分割に対して，各項上で一つの結果のみを値として取る，S から Csq への写像を考えると，これは単純な行為である。単純な行為の間の選好$\leq$は期待効用によって表現されるというのがサヴェジの二番目の基本命題である。そのためには効用関数なるものを定義しておく必要がある。

行為 f が取り得る値の全体を Csq(f)と記すこととする。即ち，Csq(f)＝{c∈Csq|∃s∈S(c＝f(s))}とする。f が単純な行為であれば Csq(f)は空でない有限集合となる。W を Csq 上で定義されている実数値を取る関数とする。単純な行為 f に対して<W，f>＝$\sum_{c\in Csq(f)} W(c)$ P(f＝c)と置く。ここで P(f＝c)は，通常の流儀に従って，P({f＝c})のこととし，{f＝c}は{s∈S|f(s)＝c}に対する略記である。U が選好$\leq$に対する効用関数であるとは，「U は Csq 上の実数値を取る関数で，任意の単純な行為 f 及び g に対して，f$\leq$g と<U，f>$\leq$<U，g>とは同値」となることである。

つまりサヴェジの二番目の基本命題とは，「その個人」の選好$\leq$を単純な行為へと制限すると，P 1からP 6までを前提とすれば，この制限された選好に対して効用関数が存在し，しかもこの効用関数は自明な多様性を無視すれば一意的に定まる，というものである。ここでの「自明な多様性」とは，U を任意の効用関数とすると，任意の正の実数 a と任意の実数 b に対して，aU＋b も効用関数となることを指している。従って「一意」とは，任意の効用関数 U 及び V に対してある正の実数 a とある実数 b とが存在して V＝aU＋b，となることである。

つまりP 1からP 6までを前提とすれば，

「その個人」の選好は，単純な行為に制限すれば期待効用によって表現されるのである。この場合の効用関数を狭義の効用関数と呼ぶこととする。

11. 第七公準と期待効用の拡張

第七公準 P 7 とは次である。

P 7. f 及び g を行為とし B を事象とする。この場合次の(1)(2)が成立する。

(1)任意の $s \in B$ に対して $f \leq <g(s)>$given B ならば，$f \leq g$ given B。
(2)任意の $s \in B$ に対して $<f(s)> \leq g$ given B ならば，$f \leq g$ given B。

サヴェジはこれが「商量の原理」から従うとしているが，それは無理である。これはサヴェジ自身の発案による公準と見なすべきである。

ここで注意すべきことは，P 1 から P 6 までその存在が導出される狭義の効用関数は，P 7（及び従属選択の原理）の下では有界となるということである。そこで U を狭義の効用関数とし f を任意の行為とすると，その合成 $U \circ f$ は，S 上の有界実関数となる。一方，S 上の任意の有界実関数 X に対して，「その個人」の確率 P に関する個人的期待値 $E(X)$ が存在する。但しここで $E(\cdot)$ は，個人的確率 P に関する期待値作用素である。サヴェジ自身は，この期待値作用素の定義及び存在を明白には述べてはいないが，Lebesgue 式の近似和を使って何とか定義できるのである。（このサヴェジの期待値作用素については園(2012) を参照して頂ければ幸いである。）

するとサヴェジの三番目の基本命題が従う。即ち，U を狭義の効用関数，f 及び g を（単純とは限らない一般的な）行為とすると，$f \leq g$ と $E(U \circ f) \leq E(U \circ g)$ とは同値である。つまり，「その個人」の選好 $\leq$ は行為の期待効用によって表現されるのである。ここで，$f < g$ と $E(U \circ f) < E(U \circ g)$ とは同値であるので，「その個人」は自身の期待効用を最大化するように行為することとなる。

条件つきの期待値作用素も通常のように導入される。$P(B) \neq 0$ とする。すると条件つき確率 $P(\cdot|B)$ に関する期待値作用素 $E(\cdot|B)$ を導入できる。一方，任意の事象 A に対して，但し A の指示関数(indicator)を I_A とすると，$\int_A X|A \, dP = \int_S XI_A \, dP$ となるので，左辺の積分を $E(X, A)$ と表記すると，$E(\cdot|B) = E(\cdot, B)/P(B)$ が従う。（$E(X, A)$ の呼称だが，X に対する A 上の半期待値（partial expectation）とするのはいかがか。）なお，$f \leq g$ given B と $E(U \circ f|B) \leq E(U \circ g|B)$ とは同値である。

12. 補遺―なぜ古典か？―

サヴェジの「基礎論」は，経済学及び統計学の古典として今日でも言及されることがある。しかしどこまで熱心に読まれているかは明白ではない。むしろ読まれざる古典ではないのかと筆者などは思っている。古典を読むことに仮に何らかの御利益があるとすれば，それは先人がどこまで真剣に考えているのかを謙虚に学べることであろう。サヴェジは彼の七つの公準を導入することによって，事物論理の一角を定式化しようと努めている。純論理の達人である「その個人」が，事事物物に即した論理を展開する際に，これら七つの公準を自身に課すのであるが，それは結局「自身の期待効用を最大化せよ」という maxim を自身が荷うことに他ならない。事物論理の一角への定式化は，「期待効用最大化の原理」へと通じるのである。このことは決して自明ではない。ここではサヴェジの労作である七つの公準を凝縮して紹介したが，数学の基礎に関心のある諸賢が，事物論理に少しでも眼を向けるきっかけとなれば，幸いである。

2012 年 11 月 22 日(木)

参考文献

Savage, Leonard Jimmie, The Foundations of Statistics, 2 nd Revised Edition, Dover, New York，1972. 1 st Edition は Wiley, New York，より 1954 年に出ている。なお，園(2001, 2007)を一瞥して頂ければ幸いである。

園 信太郎，『サヴェジ基礎論覚書』，岩波出版サービスセンター，東京，2001 年。

園 信太郎，『サヴェジ氏の思索』，岩波出版サービスセンター，東京，2007 年。

園 信太郎，「サヴェジ基礎論における期待値作用素概念について」，『經濟學研究』(北海道大学)，第 62 巻第 1 号，1－6，2012 年 7 月。