Statistique A_n^2 dans le cas de la methode du maximum de vraisemblance

Par Toshio HASHIMOTO

Ce mémoire a pour objet d'étudier la loi limite de probabilité d'une statistique A_n^2 qui est introduit par Hashimoto [3] dans le cas de la méthode du maximum de vraisemblance. Il résulte que la loi de probabilite d'une statistique A_n^2 par estimateur de maximum de vraisemblance est égal asymptotiquement à celle de A_n^2 sous quelques conditions.

1. Définitions et remarques préliminaires

A partir des résultats connus, nous nous proposons ici de poser le problème suivant ;

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F(x;\theta)$ supposée continue avec un paramètre inconnu θ, $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ un n-échantillon de X, et $F_n(x)$ la fonction de répartition empirique associé. D'après la suggestion de Darling [2] pour comparer $F(x)$ et $F_n(x)$, nous considerons ici la fonction de test

$$(1.1)\quad A_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty}\left\{F_n(x)-F(x;\hat{\theta}_n)-\int_{-\infty}^{\infty}\Big[F_n(y)-F(y;\hat{\theta}_n)\Big]dF(y;\hat{\theta}_n)\right\}^2 dF(x;\hat{\theta}_n)$$

ou $\hat{\theta}_n$ est un estimateur convenable pour un paramètre inconnu θ en $F(x;\theta)$. Cette statistique (1. 1) correspond à la forme modifiée de celle de Watson [4], [5]. De même que la variable aléatoire U_n^2 conduit au test non-paramétrique, la variable aléatoire A_n^2 peut servir à tester l'accord entre la fonction de répartition empirique $F_n(x)$ et la fonction de répartition théorique. En ce qui concerne la loi limite de cette statistique, on a un résultat dans le cas d'un estimateur efficace. On le note de la façon suivante ;

THÉORÈME *Dans le cas d'un estimateur efficace* $\hat{\theta}_n$ *de* θ, *la loi de* A_n^2 *tend vers celle de* $A^2=\int_0^1 Y^2(u)\,du$, *ou* $Y(u)$ *est un processus laplacien de moyenne* 0 *et de la fonction de covariance* $\rho(s, t)$ *donné par* (4. 5) *dans* [3].

2. Position du problème et théorème

Quand un estimateur efficace pour θ n'existe pas, il se trouve qu'un estimateur par le maximum de vraisemblance pour θ existe et il est asymptotiquement efficace au sens de Cramér.

Nous supposons que les conditions de Cramér ([1] pp. 500–501) soient satisfaites. Si ces conditions de Cramér, qui contiennent toutes les conditions 1)–6) des lemmes 3. 1 et 3. 2 de [3], sont satisfaites, ces dernierès sont aussi satisfaites sauf 4) et alors nous supposons que cette condition 4) est, elle aussi, satisfaites en l'appellant condition 'biais-faible' sur $\hat{\theta}_n$.

Dans certain cas, $\hat{\theta}_n$ est actuellement un estimateur sans biais ainsi qu'un estimateur efficace, donc la condition 4) sera satisfaite naturellement. L'analyse suivante est parallèlement analogue à celle developpée dans un article precedent [3].

Définissons σ^2, soit

$$\sigma^2 = \frac{1}{E\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x\,;\theta)\right]^2\right\}} = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x\,;\theta)\right\}^2 f(x\,;\theta)\,dx\right]^{-1}$$

et la fonction de la vraisemblance, soit $L=\prod_{j=1}^{n} f(x_j\,;\theta)$. On peut écrire

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_j\,;\theta) = \frac{n}{\sigma^2}(\hat{\theta}_n-\theta)(1+\varepsilon_n)$$

où ε_n tend vers 0 au sens de convergence en moyenne. Donc on a

$$\frac{n}{\sigma^2}(\hat{\theta}_n-\theta) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x_j\,;\theta)(1+\varepsilon_n'),\quad \varepsilon_n'\to 0 \quad \text{en moyenne.}$$

En consequence, quant à $h_n(u)$ qui est défini dans le lemme 3 de [3],

$$h_n'(u)\to h'(u) = \sigma^2\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(x\,;\theta) \quad \text{et} \quad \sigma_n^2 = \mathrm{Var}\left\{\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n-\theta)\right\}\to\sigma^2$$

si $n\to\infty$, et il résulte que $\rho_n(u,v)=E\{X_n(u)\,X_n(v)\}$ tend vers $\rho(u,v)$. On peut généraliser le théorème de la mannières suivante ;

THÉORÈME *Si $\hat{\theta}_n$ est un estimateur 'biais-faible' par le maximum de vraisemblance satisfaisant aux conditions de Cramér et si $\rho(u)=\sigma\frac{\partial}{\partial\theta}F(x\,;\theta)$ satisfait la rélation*

$$\int_0^1 |\varphi''(u)|\,u(1-u)\log\log\frac{1}{u(1-u)}\,du<\infty\,,$$

alors on a

$$\lim_{n\to\infty} P_r\left\{A_n^2<x\right\} = P_r\left\{\int_0^1 X^2(u)\,du<x\right\}$$

où $X(u)$ est un processus laplacien de moyenne 0 et de covariance

$$\rho(s,t)=min(s,t)-st+\frac{1}{2}(s^2+t^2-s-t)+\frac{1}{12}$$
$$-\varphi(s)\varphi(t)+\Big[\varphi(s)+\varphi(t)\Big]\int_0^1\varphi(x)\,dx-\Big[\int_0^1\varphi(x)\,dx\Big]^2$$

Ce théorème signifie bien sûre que la statistique A_n^2 converge en loi vers la variable alreatoire $A^2=\int_0^1 X^2(u)\,du$.

Département de Mathematique
Université de Hokkaido

Références

[1] CRAMÉR, H.: Mathematical methods of statistics, Princeton University Press, (1946).

[2] DARLING, D. A.: The Cramér-Smirnov test in the parametric case, Ann. Math. Stat., Vol. 26 (1956), pp. 1–20.

[3] HASHIMOTO, T.: Watson's U_n^2 test in the parametric case, Jour. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. 1, Vol. 20 (1969) pp. 204–219.

[4] WATSON, G. S.: Goodness-of-fit tests on a circle, Biometrika, Vol. 48 (1961) pp. 109–114.

[5] WATSON, G. S.: Goodness-of-fit tests on a circle II, Biometrika, Vol. 49 (1962) pp. 57–63.

(Received August 31, 1971)