HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	第2回数学総合若手研究集会
Author(s)	Izumiya, S.; Numata, Y.; Ishimoto, J.; Sasaki, I.; Nagase, Y.; Yamamoto, M.
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 104, 1
Issue Date	2006-01-01
DOI	10.14943/5173
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/5487; http://eprints3.math.sci.hokudai.ac.jp/1504/
Type	bulletin (article)
File Information	tech104.PDF

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

21st Century COE Program:
Mathematics of Nonlinear Structure via Singularity

第 2 回数学総合若手研究集会
The 2nd COE Conference for Young Researchers
－ CCYR 2 －

沼田泰英, 石本　潤, 佐々木格, 長瀬優子, 山本　稔
COE 運営委員会交流機能代表　泉屋　周一

Sapporo, 2006

Series #104. February, 2006

Publication of this series is partly supported by Grant-in-Aid for formation of COE.
'Mathematics of Nonlinear Structures via Singularities' (Hokkaido University)
URL:http://coe.math.sci.hokudai.ac.jp

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#78 S. Izumiya, G. Ishikawa, T. Sano and I. Shimada (Eds.), The 12th MSJ-IRI " Singularity Theory and Its Applications " ABSTRACTS, 291 pages. 2003.

#79 H. Kubo and T. Ozawa (Eds.), Proceedings of Sapporo Guest House Symposium on Mathematics 15 " Evolution Equations " , 31 pages. 2003.

#80 S. Miyajima, F. Takeo and T. Nakazi (Eds.), 第12回関数空間セミナー報告集, 122 pages. 2004.

#81 Y. Giga, S. Izumiya and K. Deguchi (Eds.), Mathematical Aspects of Image Processing and Computer Vision 2003, 48 pages. 2004.

#82 I. Shimada and Y. Tonegawa (Eds.), 2003年度談話会・特別講演アブストラクト集, 52 pages. 2004.

#83 The 2nd HU and SNU Symposium on Mathematics Abstracts, 22 pages. 2004.

#84 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa and K. Tsutaya (Eds.), Proceedings of the 29th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 77 pages. 2004.

#85 T. Ozawa and Y. Tsutsumi (Eds.), Lectures on nonlinear dispersive equations I, 147 pages. 2004.

#86 T. Ozawa and Y. Tsutsumi (Eds.), Lectures on nonlinear dispersive equations II, 47 pages. 2004.

#87 T. Ozawa and Y. Tsutsumi (Eds.), COE Symposium Nonlinear Dispersive Equations, 85 pages. 2004.

#88 T. Namiki, M. Hatakeyama, S. Tadokoro and H. Aoi (Eds.), 北海道大学数学教室におけるメタデータ交換プロトコル OAI-PMH に準拠した e-print サーバ構築, 14 pages. 2004.

#89 S. Izumiya (Ed.) M. Takahashi, T. Miyao, G. Okuyama, Y. Nakano and K. Inui, 第1回数学総合若手研究集会　COE Conference for Young Researchers, 143 pages. 2005.

#90 J. Saal, 1st COE Lecture Series H^{∞}-calculus for the Stokes operator on L_q-spaces, 34 pages. 2005.

#91 S. Miyajima, F. Takeo and T. Nakazi (Eds.), 第13回関数空間セミナー報告集, 111 pages. 2005.

#92 N. Umeda, 第4回ＣＯＥ研究員連続講演会　反応－拡散方程式の大域解と爆発解について, 8 pages. 2005.

#93 K. Arima, 第2回ＣＯＥ研究員連続講演会　極小モデルプログラムの入門およびその正標数への拡張, 25 pages. 2005.

#94 Y. Nakano, 学位論文 Doctoral thesis " OPTIMAL HEDGING IN THE PRESENCE OF SHORTFALL RISK " 43 pages. 2005.

#95 Keiji Matsumoto and Masao Jinzenji (Eds.), 2004年度談話会・特別講演アブストラクト集, 17 pages. 2005.

#96 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa and K. Tsutaya (Eds.), Proceedings of the 30th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 83 pages. 2005.

#97 M. Watanabe, 第5回 COE 研究員連続講演会　『逆散乱法』入門, 52 pages. 2005.

#98 M. Takeda, T. Mikami (Eds.), Probability and PDE, 48 pages. 2005.

#99 M. Van Manen, The 6th COE Lecture Series " From the cut-locus via medial axis to the Voronoi diagram and back " 42 pages. 2005.

#100 K. Hayami, T. Nara, D. Furihata, T. Matsuo, T. Sakurai and T. Sakajo (Eds.), 応用数理サマーセミナー「逆問題」, 196 pages. 2005.

#101 B. Forbes, The 7th COE Lecture Series トーリックミラー対称性、56 pages. 2005.

#102 H. Kubo, T. Ozawa and K. Yamauchi, SAPPORO GUEST HOUSE SYMPOSIUM ON MATHEMATICS 20 "Nonlinear Wave Equations", 68 pages. 2005.

#103 A. Miyachi and K. Tachizawa, Proceedings of the Harmonic Analysis and its Applications at Sapporo, 107 pages. 2005.

21st Century COE Program:
Mathematics of Nonlinear Structure via Singularity

第2回 数学総合若手研究集会
The 2nd COE Conference for Young Researchers
-CCYR2-

沼田泰英, 石本　潤, 佐々木格, 長瀬優子, 山本　稔
COE 運営委員会交流機能代表 泉屋 周一

Sapporo, 2006

当研究集会の経費は
北海道大学 21 世紀 COE プログラム「特異性から見た非線形構造の数学」
平成 17 年度「魅力ある大学院教育」イニシアティブ「全国大学院共通滞在型教育プログラム」
により賄われています.

はじめに

第2回数学総合若手研究集会-The 2nd COE Conference for Young Researchers- (CCYR2)は，北海道大学21世紀COEプログラム「特異性から見た非線形構造の数学」の交流機能の一事業として大学院生，ポストドクターら若手研究者により運営される研究集会です．

この研究集会は，

- 様々な分野の若手研究者が発表し，交流しあう場を提供する事で，お互いの研究活動に刺激を与える事．
- 数学の各分野間の横型の連携，基盤研究と応用研究間の縦型の交流という2つの軸に沿った交流を行う事．

を目的としております．

本アブストラクト集は講演者の方々から事前に集めた原稿をそのまま印刷したものです．本研究集会の目的から，講演者の方々には他分野の方々にも分かりやすい様に入門的な事項を含めて書いて頂いております．参加者が講演をより深く理解し，活発な交流を行ってご自身の研究を進展させる一助になればこの上ない喜びです．

なおこの研究集会は，

* 北海道大学21世紀COEプログラム「特異性から見た非線形構造の数学」
* 平成17年度「魅力ある大学院教育」イニシアティブ「全国大学院共通滞在型教育プログラム」

の援助を受けて開催されます．

最後になりましたが，開催にあたり，

◇ COE運営委員会の先生方をはじめ，北大数学教室の先生方，

◇ COE研究推進室ならびにCOE研究支援室の事務の方々，

◇ 講演者の皆様，参加者の皆様，

◇ 第1回CCYR世話人の方々，第3回CCYR世話人の方々

から多大なるご支援を頂きました．この場をかりて心より感謝申し上げます．

2006年2月

CCYR2世話人

沼田泰英，石本潤，佐々木格，長瀬優子，山本稔

第2回 数学総合若手研究集会

The 2nd COE Conference for Young Researchers -CCYR2-

世話人: 沼田泰英, 石本 潤, 佐々木格, 長瀬優子, 山本 稔
Organizers: Y. Numata, J. Ishimoto, I. Sasaki, Y. Nagase, M. Yamamoto

期間 (Period) : 2006年2月13日 – 2月16日

場所 (Venue) : 北海道大学大学院理学研究科数学教室3号館508号室, 4号館508室, 509室
Department of Mathematics, Hokkaido University
Science Building #3 Room 508, #4 Room 508, Room509

プログラム (Program) : (A) は3-508, (B) は4-508, (C) は4-509です.

2月13日 (月)

10:00-10:45 (A) **Rustam Sadykov** , Faculty of Mathematics, Kyushu University
Introduction to the bordism principle

11:00-11:45 (A) **吉野 太郎** (Taro YOSHINO), 京都大学数理解析研究所
Clifford-Klein 形の幾何について
(Geometry of Clifford-Klein forms)

14:00-14:45 (A) **勝良 健史** (Takeshi KATSURA), 北海道大学大学院理学研究科
力学系と作用素環
(Dynamical systems and operator algebras)

15:00-15:30 (A) **田中 立志** (Tatsushi TANAKA), 九州大学大学院数理学府
多重ゼータ値入門
(On multiple zeta values and their relations)

(B) **秋吉 宏尚** (Hirotaka AKIYOSHI), 大阪市立大学 数学研究所
3次元双曲多様体の組み合わせ的構造について
(Hyperbolic 3-manifolds from the viewpoint of combinatorial structure)

15:45-16:15 (A) **有馬 研一郎** (Ken-ichiro ARIMA), 北海道大学大学院理学研究科
Recognition principle of normal surface singularities in positive characteristic

(B) **高橋 博樹** (Hiroki TAKAHASHI), 京都大学大学院理学研究科数学教室
一次元写像族による力学系がカオス的になる確率を下から評価するための方法論と, その応用
(Computable conditions for the occurence of non-uniform hyperbolicity in families of one-dimensional maps)

16:30-17:00 (A) **富田 琢巳** (Takumi TOMITA), 九州大学大学院数理学府
Counting certain imaginary quadratic fields with prescribed 2-class order

(B) **和田出 秀光** (Hidemitsu WADADE), 東北大学理学研究科数学専攻
Sobolev's imbedding theorem in the limiting case with Lorentz space and BMO

2月14日（火）

10:00-10:45 (A) **縫田 光司** (Koji NUIDA), 東京大学大学院数理科学研究科
Coxeter 群の同型問題とその周辺
(On the isomorphism problem of Coxeter groups and related topics)

11:00-11:45 (A) **川上 裕** (Yu KAWAKAMI), 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
極小曲面のガウス写像の除外値問題への新しい視点
(A new perspective for a problem on the number of exceptional values of the Gauss map for minimal surfaces)

12:00-12:30 (A) **北臺 如法** (Yukinori KITADAI), 広島大学大学院理学研究科
標準フィルタ付けとフロベニウス写像による直像の安定性
(Canonical filtrations and stability of direct images by Frobenius morphisms)

(B) **細野 敬史** (Takafumi HOSONO), 九州大学大学院数理学府
Decay property of regularity-loss type and application to some nonlinear hyperbolic-elliptic system

14:15-14:45 (A) **阿部 友紀** (Yuuki ABE), 上智大学大学院理工学研究科数学専攻
Evaluation representations of quantum affine algebras at roots of unity

(B) **門上 晃久** (Teruhisa KADOKAMI), 大阪市立大学数学研究所
Geometric method in Virtual Knot Theory

15:00-15:45 (A) **赤堀 公史** (Takafumi AKAHORI), 東北大学大学院理学研究科数学専攻
A sharp bilinear estimates related with the Schrödinger-improved Boussinesq system

16:00-17:30 (C) ポスターセッション

上田 好寛 (Yoshihiro UEDA), 九州大学大学院数理学府
Large time behavior of solutions to a semilinear hyperbolic system with relaxation

加藤 大典 (Daisuke KATO), 慶應義塾大学大学院理工学研究科後期博士課程基礎理工学専
A new example of supergroups

北川 友美子 (Yumiko KITAGAWA), 奈良女子大学理学部数学科
サブリーマン接触多様体の無限小自己同型について
(On subriemannian contact manifolds)

昆 万佑子 (Mayuko KON), 北海道大学大学院理学研究科数学専攻
A CHARACTERIZATION OF PSEUDO-EINSTEIN REAL HYPERSURFACES

佐藤 規文 (Norifumi SATO), 北海道大学大学院理学研究科数学専攻
カレントについて
(Overview on the theory of currents)

棚橋 典大 (Norihiro TANAHASHI), 京都大学大学院理学研究科
ブラックホールにおける情報損失問題について
(About the Black Hole Information Paradox)

前川 泰則 (Yasunori MAEKAWA), 北海道大学大学院理学研究科数学専攻
輸送項付き熱方程式の基本解に対する Aronson 評価
(The Aronson estimates for the fundamental solutions of the perturbed heat equation

宮西 吉久 (Yoshihisa MIYANISI), 東京工業大学理工学研究科数学専攻
A remark on Laplace eigenfunctions on M_A^3
守屋 創 (Hajime MORIYA), 北海道大学大学院理学研究科数学専攻
On the univalence superselection rule and characterization of spontaneous symmetry breaking
山内 雄介 (Yusuke YAMAUCHI), 北海道大学大学院理学研究科
Blow-up results for a reaction-diffusion system
四ツ谷 直仁 (Naoto YOTSUTANI), 北海道大学大学院理学研究科数学専攻
Duality Theorem and its application

[懇親会]

2月15日（水）

10:00-10:45 (A) **斎藤 敏夫** (Toshio SAITO), 大阪大学大学院理学研究科
An introduction of generalized Heegaard splittings

11:00-11:45 (A) **前野 みゆき** (Miyuki MAENO), 奈良女子大学人間文化研究科複合現象科学専攻
One-dimensional h-path processes

12:00-12:30 (A) **山内 博** (Hiroshi YAMAUCHI), 東京大学大学院数理科学研究科
Vertex operator algebra and McKay's E_8 observation on the Monster

(B) **中條 大介** (Daisuke NAKAJO), 九州大学大学院数理学府
平坦なアフィン計量を持つ中心アフィン曲面と余法線写像
(Centroaffine surfaces with flat affine metric and conormal maps)

14:15-14:45 (A) **村井 聡** (Satoshi MURAI), 大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
Gotzmann monomial ideals

(B) **川口 良** (Ryo KAWAGUCHI), 大阪大学大学院理学研究科（数学専攻）
トーリック曲面上の曲線に対するゴナリティ予想
(The gonality conjecture for curves on a toric surface)

15:00-15:30 (A) **永安 聖** (Sei NAGAYASU), 大阪大学大学院理学研究科
多層からなる媒体に対する1次元波動方程式に関するある逆問題
(An inverse problem for the one-dimensional wave equation in multilayer media)

(B) **廣田 祐士** (Yuji HIROTA), 慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
Poisson 幾何学における森田理論
(Morita theory in Poisson Geometry)

15:45-16:15 (A) **広瀬 大輔** (Daisuke HIROSE), 北海道大学大学院理学研究科数学専攻
F-thresholds and jumping coefficients

(B) **鈴木 章斗** (Akito SUZUKI), 北海道大学大学院理学研究科数学専攻
A scaling limit for a general class of quantum field models and its application to nuclear physics

16:30-17:00 (A) **名古屋 創** (Hajime NAGOYA), 東北大学大学院理学研究科数学専攻
Quantum Painlevé Systems of type $A_{n-1}^{(1)}$

(B) **大貫 浩二** (Koji OHNUKI), 早稲田大学大学院理工学研究科数理科学専攻
On the colored Jones polynomial and the volume conjecture

2月16日（木）

9:30-10:00 (A) **阿部 拓郎** (Takuro ABE), 京都大学大学院理学研究科
The Stability of Coxeter type arrangements
(B) **吉田 尚彦** (Takahiko YOSHIDA), 東京大学大学院数理科学研究科
Twisted toric structure

10:15-10:45 (A) **青木 昌雄** (Masao AOKI), 京都大学大学院理学研究科
Hom スタックと Picard スタック
(Hom stacks and Picard stacks)
(B) **関 行宏** (Yukihiro SEKI), 中央大学大学院理工学研究科数学専攻
準線形放物型方程式の解の空間無限遠における爆発について
(On the blow-up at space infinity for solutions to the quasi-linear parabolic equations)

11:00-11:45 (A) **星野 歩** (Ayumu HOSHINO), 上智大学大学院 理工学研究科 数学専攻
量子群における結晶基底の多面体表示について
(Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Quantum Algebras)

12:00-12:45 (A) **大塚 岳** (Takeshi OHTSUKA), 東京大学大学院数理科学研究科
非等方的 Allen–Cahn 方程式による界面運動の近似の一様性
(On a uniform approximation of the motion of interfaces by anisotropic Allen–Cahn equations)

※ 45 分講演は Single Session，30 分講演は Parallel Session です。

INTRODUCTION TO THE BORDISM PRINCIPLE

RUSTAM SADYKOV

1. Whitney Theorem

A number of problems of differential geometry are known to have counterparts in homotopy theory. If a differential geometry problem is, in fact, equivalent to its homotopy theoretic counterpart, then we say that it satisfies *the homotopy principle.*

Let us, for example, consider *immersions* of a closed curve into the two dimensional plane $\mathbb{R}^2$. By definition, an immersion f of a closed curve into $\mathbb{R}^2$ is a smooth map of a unit circle S^1 into $\mathbb{R}^2$ without singularities. To reformulate the definition in terms of coordinates, let φ be the angular coordinate on the circle and x, y be the standard coordinates on $\mathbb{R}^2$. Then the map f from S^1 into $\mathbb{R}^2$ can be given by a pair of functions

$$x = x(\varphi), \tag{1}$$

$$y = y(\varphi). \tag{2}$$

The map f is *an immersion* if the functions (1) and (2) are smooth and for each angle φ at least one of the numbers $x_\varphi(\varphi) = \frac{dx}{d\varphi}(\varphi)$ or $y_\varphi(\varphi) = \frac{dy}{d\varphi}(\varphi)$ is not zero.

We say that two immersions f and g are *regularly homotopic* if there is a smooth deformation of f to g through immersions. More precisely, there is a smooth family of maps $F_t : S^1 \to \mathbb{R}^2$ parameterized by a (time) parameter $t \in [0, 1]$ such that the initial map F_0 coincides with f, the terminal map F_1 coincides with g, and at each moment $t \in [0, 1]$ the map F_t is an immersion.

One may wonder if any two immersions are regularly homotopic. To answer this question, Whitney proposed to shift from this differential geometry problem to its homotopy theoretic counterpart. Namely, given an immersion $f(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi))$ of a closed curve S^1, at each moment φ_0 the direction of the velocity vector $(x_\varphi(\varphi_0), y_\varphi(\varphi_0))$ determines a direction

$$\frac{(x_\varphi(\varphi_0), y_\varphi(\varphi_0))}{\sqrt[2]{x_\varphi^2(\varphi_0) + y_\varphi^2(\varphi_0)}} \in S^1 \tag{3}$$

Thus, the immersion f gives rise to a continuous map

$$G_f \colon S^1 \longrightarrow S^1.$$

Date: Jan. 2, 2006 .

that assigns to a moment φ_0 the direction (3). Under regular homotopy of f, the continuous map G_f deforms continuously, i.e., by homotopy. Consequently, if two immersions f, g are regularly homotopic, then the maps G_f and G_g are homotopic. The converse statement turns out to be also true.

Theorem 1.1. *(parametric h-principle for immersions $S^1 \to \mathbb{R}^2$) Two immersions f and g are regularly homotopic if and only if the maps G_f and G_g are homotopic.*

The homotopy theoretic part of Theorem 1.1 is simple; two maps G_f and G_g are homotopic if and only if their *degrees* are the same, i.e., the maps $G_f, G_g : S^1 \to S^1$ wind the circle S^1 around itself the same number of times.

For example, if f is the standard embedding of S^1 into $\mathbb{R}^2$ and g is the figure "8" immersion, then the degree of G_f is 1, whereas the degree of G_g is 0. Hence G_f is not homotopic to G_g and therefore f is not regularly homotopic to g.

2. H-principle for immersions. Smale paradox

For a manifold M, let $\pi_M : TM \to M$ denote the projection of the tangent bundle TM of the manifold M, and T_xM be the fiber of TM over a point $x \in M$. We say that a smooth map $f : M \to N$ of compact manifolds is *an immersion*, if the differential $df : TM \to TN$ of f is a monomorphism of vector bundles, i.e., for each point $x \in M$, the differential $d_xf : T_xM \to T_xN$ of f at x is a monomorphism.

Our next example is the differential geometry problem that in 60-70s inspired a number of further results culminating in the birth of the h-principle theory.

Problem 1. *Given a continuous map $f : M \to N$ of smooth manifolds. Does there exist an immersion $M \looparrowright N$ homotopic to the map f?*

From the definition of immersion, it follows that a necessary condition for the existence of an immersion homotopic to f is the existence of a vector bundle monomorphism $TM \to TN$ covering the map f, i.e., the existence of a continuous map $\tau : TM \to TN$ such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\tau} & TN \\ {\scriptstyle \pi_M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_N} \\ M & \xrightarrow{f} & N, \end{array}$$

commutes and for each point $x \in M$, the map $\tau|T_xM : T_xM \to T_yN$, with $y = f(x)$, is a monomorphism of vector spaces. Hence the homotopy theoretic counterpart of Problem 1 is Problem 2.

Problem 2. *Given a continuous map $f : M \to N$ of smooth manifolds, does there exist a monomorphism $TM \to TN$ of tangent bundles covering the map f.*

The h-principle for immersions, proved by Smale and Hirsch, asserts that Problem 1 and Problem 2 are, in fact, equivalent provided that either the dimension of the manifold M is strictly less than the dimension of the manifold N, or the dimensions of M and N are the same and the manifold M is open. Furthermore, two immersions $f_1, f_2 : M \looparrowright N$ are *regularly homotopic*, i.e., homotopic through immersions, if and only if df_1 and df_2 are homotopic through monomorphisms of tangent bundles.

A surprising consequence of the h-principle for immersions is the famous Smale Paradox.

Corollary 2.1 (Smale Paradox). *Every immersion $S^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ is regularly homotopic to the standard embedding. In particular, the standard embedding and its eversion are regularly homotopic.*

Proof. Regular homotopy classes of immersions $f : S^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ are in bijective correspondence with regular homotopy classes of immersions $\tilde{f} : V \looparrowright \mathbb{R}^3$ of the thickened sphere $V := S^2 \times [-1, 1]$. By the h-principle, the latter classes are in bijective correspondence with homotopy classes of monomorphisms

$$TV = V \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow T\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3,$$

which, in their turn, are in bijective correspondence with homotopy classes of maps $V \to \mathbb{R}^3 \times SO_3$. Since $\pi_2(SO_3) = 0$, every map $V \to \mathbb{R}^3 \times SO_3$ is homotopic to a constant map. Thus, there is only one regular homotopy class of immersions $S^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$. □

3. H-principle for submersions

If the dimension of a manifold M is at least as big as the dimension of the manifold N, then a smooth map $f : M \to N$ is called submersion if df is a nonsingular morphism of tangent bundles, i.e., for each point $x \in M$, the homomorphism $d_x f : T_x M \to T_y N$, with $y = f(x)$, is an epimorphism.

Again, as in the case of immersions, given a continuous map $f : M \to N$ of closed manifolds, a necessary condition for the existence of a submersion $M \to N$ homotopic to f is the existence of an epimorphism $TM \to TN$ of tangent bundles covering the map f.

However, in contrast to the case of immersions, the existence of an epimorphism of tangent bundles does not imply the existence of a submersion. For example, since the tangent bundle of S^1 is trivial, there exists a monomorphism of bundles $TS^1 \to T\mathbb{R}^1$, while every real valued function on S^1 has a singular point.

In this sense, the h-principle for submersions of closed manifolds does not hold.

4. B-principle for submersions

The bordism principle is a bordism version of the homotopy principle. To formulate the bordism principle we will need a few more definitions.

We say that two submersions $f_i : M_i \to N_i$, with $i = 1, 2$, of closed manifolds are bordant if there is a submersion $F : M \to N$ of a manifold M with boundary $\partial M = M_1 \cup M_2$ into a manifold N with boundary $\partial N = N_1 \cup N_2$ such that $F|M_i = f_i$ for $i = 1, 2$.

The classes of bordant submersions of manifolds of dimension m into manifolds of dimension n constitute an abelian group $Sub(m, n)$ with addition defined in terms of representatives by taking the disjoint union of submersions.

Next we define *a stable epimorphism* of tangent bundles as a class of an epimorphism $TM \oplus \mathbb{R}^k \to TN \oplus \mathbb{R}^k$ where k is a positive integer. If $k_1 < k_2$, then two epimorphisms $\tau_i : TM \oplus \mathbb{R}^{k_i} \to TM \oplus \mathbb{R}^{k_i}$, with $i = 1, 2$, represent the same stable epimorphism of tangent bundles if $\tau_2 = \tau_1 \oplus 1_{\mathbb{R}^{k_2 - k_1}}$, where $1_{\mathbb{R}^{k_2-k_1}}$ is the identity map of $\mathbb{R}^{k_2-k_1}$.

Let $[\tau_1]$ and $[\tau_2]$ be two stable epimorphisms represented by $\tau_i : TM_i \oplus \mathbb{R}^{k_i} \to TN_i \oplus \mathbb{R}^{k_i}$, with $k = 1, 2$. Suppose that there is a manifold M with boundary $\partial M = M_1 \sqcup M_2$, a manifold N with boundary $\partial N = N_1 \sqcup N_2$, a number $k > max(k_1, k_2)$ and an epimorphism $\tau : TM \oplus \mathbb{R}^k \to TN \oplus \mathbb{R}^k$ such that the epimorphisms

$$\tau|TM_1 \colon TM_1 \oplus \mathbb{R}^k \longrightarrow TN_1 \oplus \mathbb{R}^k$$

and

$$\tau|TM_2 \colon TM_2 \oplus \mathbb{R}^k \longrightarrow TN_2 \oplus \mathbb{R}^k$$

are stably equivalent to epimorphisms τ_1 and τ_2 respectively. Then we say that the stable epimorphisms $[\tau_1]$ and $[\tau_2]$ are *bordant.*

Let $Epi(m, n)$ denote the bordism group of stable epimorphisms of tangent bundles covering maps of manifolds of dimension m into manifolds of dimension n. Then there is a homomorphism of groups $Sub(m, n) \to Epi(m, n)$ that takes a class represented by a submersion f onto the class represented by an epimorphism df.

We say that the b-principle for submersions of manifolds of dimension m into manifolds of dimension n holds if the homomorphism $Sub(m, n) \to Epi(m, n)$ is an isomorphism.

In particular, if the b-principle holds and $f : M \to N$ is a continuous map covered by a stable epimorphism, then, the map f is bordant to a submersion.

5. Khan-Priddy theorem

We say that a map of a manifold of dimension m into a manifold of dimension n has *codimension* $n - m$.

The bordism principle for submersions of codimension 0 turns out to be equivalent to the Khan-Priddy theorem, which asserts that there is a map $q \colon K(S, 1) \to (\Omega^\infty S^\infty)_0$ inducing an isomorphism of integral homology groups, or, equivalently, of bordism groups. Here S is the group of infinite permutations, i.e., the limit $\varinjlim \Sigma_i$ of the groups Σ_i of permutations on i

elements; and $(\Omega^\infty S^\infty)_0$ is the colimit of the sequence of spaces of pointed maps $S^j \to S^j$ of degree 0.

To relate the Khan-Priddy theorem to the b-principle for submersions, let us give geometric interpretations of elements of the bordism groups of $K(S,1)$ and $(\Omega^\infty S^\infty)_0$.

An element of the oriented bordism group of $(\Omega^\infty S^\infty)_0$ is represented by a map $N \times S^j \to S^j$ that takes the slice $N \times \{v\}$ over the north pole $v \in S^j$ onto v. If necessary, we may slightly perturb this map so that it becomes transversal to the south pole $\{*\}$ of S^j. Then the inverse image of $\{*\}$ is a manifold $M \subset N \times S^j$. Furthermore, it is easy to see that the projection of $M \subset N \times S^j$ onto the first factor N can be covered by a fiberwise isomorphism of stablized tangent bundles. Now a straightforward argument shows that the bordism group of $(\Omega^\infty S^\infty)_0$ is isomorphic to the bordism group of epimorphisms of tangent bundles of codimension 0.

On the other hand, the space $K(\Sigma_i, 1)$ is a classifying space of i-sheet coverings. Hence the bordism group of $K(\Sigma_i, 1)$ is isomorphic to the bordism group of i-sheet coverings. To obtain the bordism group of $K(S,1)$ we consider all coverings and identify an i-sheet covering $f : M \to N$ with an $(i+1)$-sheet covering $f \sqcup 1_N : M \sqcup N \to N$ where 1_N is the identity map of the manifold N.

Now it remains to describe the map $q : K(S,1) \to (\Omega^\infty S^\infty)_0$. A point of $K(S,1)$ is represented by i unordered points $p_1, ..., p_i$ in $\mathbb{R}^j$ for some positive integers i and j. We will assign to points $p_1, ..., p_i$ a map $S^j \to S^j$ of order 0. Let r denote the minimal integer for which the disc in $\mathbb{R}^j$ of radius r with center at $0 \in \mathbb{R}^j$ contains all the i points. For $i < k \leq 2i$, pick the points p_k with coordinates $(r + k - i, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{j-1}$. Let ε be the minimal distance between the points $\{p_k\}$ and let $D_k \in \mathbb{R}^j$ denote the j-disc of radius $\frac{\varepsilon}{10}$ with center at p_k, $1 \leq k \leq 2i$. Then, the desired map $S^j \to S^j$ is the one that takes the complement to the disjoint union of the discs D_k onto the north pole $s \in S$, and maps each of D_k onto S^j by the composition of the factorization $D_k \to D_k/\partial D_k = S_k$ and a homeomorphism $S_k \to S^j$ of degree 1 if $k \leq i$ and of degree -1 otherwise.

6. Mumford conjecture

The b-principle for submersions of codimension -2 turns out to be equivalent to the Mumford conjecture on the cohomology ring of the moduli space of Riemann surfaces. The Mumford conjecture was recently proved by Madsen and Weiss.

Whether the b-principle for submersions of codimension k for $k < -2$ holds or does not hold is an open problem.

7. What is next?

The h-principle and its bordism version, the b-principle, can be formulated in a much more general setting.

For example, we may view immersions (or submersions) as smooth maps satisfying appropriate differential relations. Using the language of jet spaces, one may formulate the h-principle and b-principle for any differential relation.

It turns out that in general the bordism principle for a differential relation follows from the corresponding h-principle provided that the differential relation admits a destabilization. For example, for submersions, we require that the existence of an epimorphism of stabilized tangent bundles implies the existence of an epimorphism of genuine tangent bundles in the same bordism class. We proved that such a destabilization exists whenever the differential relation is invariant with respect to contact changes of coordinates.

Clifford-Klein 形の幾何について

京都大学数理解析研究所 COE 研究員　吉野太郎

Abstract

ユークリッド空間のタイル張りは (特に 2, 3 次元について) 古くからよく研究されている. 一方, より一般の空間のタイル張りについては, 現在あまり詳しい研究はなされていない. 一般の空間においては, タイル張り不可能な例も存在し, また, タイル張りが可能か否かさえ決定できていない空間も多くある. この講演では一般の空間に対し「タイル張り」を定義し, 種々の空間がタイル張り可能か否かを考察したい.

Tiling of Euclidean space (especially on 2 or 3 dimensional cases) has been studied for a long time. On the other hand, tiling of general spaces has not yet been studied in detail. Among general spaces, some spaces can not been tiled at all. Moreover, on some spaces, we cannot yet determine it is tileable or not. In this talk, we define 'tiling' of general spaces, and consider the tileability of various spaces.

1　問題の定式化

ユークリッド空間のタイル張りの研究の長い歴史に比べると, 一般の空間のそれは未だ日が浅い. 未解決問題も多く残されており, 今後発展する余地がある. 例えば 7 次元複素球面がタイル張り可能と証明されたのは, つい最近 (2005 年) のことである. この講演ではこの分野に関する古典的な結果から最近の結果, そして未解決問題までを見ていきたい.

後述するように, タイル張り可能性の問題はコンパクト Clifford-Klein 形の存在問題として定式化することができる (問題 1.16). また実際の議論も Clifford-Klein 形の言葉を用いて行うことになる. しかし, まずは直感的に問題を捉えるためにタイル張りの話から始めよう.

1.1　タイル張り

まず, 空間のタイル張りを定義し (定義 1.2), タイル張り可能性の問題を定式化しよう (問題 1.5).

「タイル張り」の一つの定式化として「空間を (一種類の) 同じ形のタイルで規則的に敷き詰める事」と捉えることができる. より一般には二種類以上のタイルを敷き詰める事も考えることができるが, ここでは簡単の為に一種類に限定する. また, タイルを不規則に敷き詰めることも考えられるが, ここでは規則的なもの, つまりタイルの並べ方が群で統率されているものを取り扱う. 即ち, ユークリッド空間のタイル張りを次のように定義する.

定義 1.1. T を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とし, 離散群 Γ が $\mathbb{R}^n$ に等長に作用しているとする. (T,Γ) が $\mathbb{R}^n$ の**タイル張り**であるとは, 次が満たされることをいう.

(a) $\mathbb{R}^n = \Gamma \cdot T$.

(b) $T = \gamma(T)$　or　$T \cap \gamma(T) \subset \partial T$　　$(\gamma \in \Gamma)$.

(c) $T \cap \gamma(T) \neq \emptyset$ となる γ は有限個に限る.

(ただし, ∂T は T の境界とする).

$\mathbb{R}^n$ の等長変換全体はユークリッド運動群 $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ であるから, 上記の離散群 Γ は $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ の部分群でなければならない. ここで, $\mathbb{R}^n$ 内の二つのタイルが「同じ形」であることは, $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ で互いに移りあう事と同値である. 換言すればリー群 $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ 内での「同じ形」を定めていると言える.

さて, 上の定義 1.1 を一般化して一般の多様体 M におけるタイル張りを定義しよう. このとき, 多様体 M 内での「同じ形」を定めるため, ユークリッド運動群 $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ の代わりに M に作用するリー群 G を考えることにする (例えば, M の (擬) 等長変換全体や正則変換全体等). すなわち, M 内の二つのタイル (コンパクト集合) は, G の作用で移りあうとき「同じ形」であると考える. このとき, 一般の空間のタイル張りは次のように定義できる.

定義 1.2. リー群 G が多様体 M に可微分に作用しているとする. M のコンパクト集合 T と, G の離散部分群 Γ について, (T, Γ) が (M, G) の**タイル張り**であるとは, 次が満たされることをいう.

(a) $M = \Gamma \cdot T$.

(b) $T = \gamma(T)$ or $T \cap \gamma(T) \subset \partial T$ $\quad (\gamma \in \Gamma)$.

(c) $T \cap \gamma(T) \neq \emptyset$ となる γ は有限個に限る.

上の定義において, リー群 G が小さすぎるときは明らかにタイル張りは不可能となる. そこで, 以下では G がある程度大きい事を要請しよう.

定義 1.3. 群 G の集合 X への作用が**推移的**であるとは, X の元 x が存在して, $X = G \cdot x$ と表せることをいう.

定義 1.4. リー群 G が推移的に作用する多様体を G の**等質空間**という.

等質空間においては G の作用が推移的なため「G が小さすぎるためにタイル張りできない」という状況は起きない. しかし, それでもまだタイル張り不可能な例は存在する. そこで, 種々の空間に対し次の問題を考えたい.

問題 1.5. M をリー群 G の等質空間としたとき (M, G) はタイル張り可能か?

これに答えることがこの講演の目的である.

ここで, 等質空間の例を幾つか見ておこう. 例えば, リー群はそれ自身の等質空間である. 特にユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は等質空間である. 同時に, $\mathbb{R}^n$ はリー群 $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ の等質空間ともみなせる. ユークリッド空間の (普通の意味での) タイル張りは, $\mathbb{R}^n$ を $O(n) \ltimes \mathbb{R}^n$ の等質空間とみなしたときのタイル張りに相当する. 他にも次の空間は等質空間である.

例 1.6. (1) 球面 S^n はリー群 $O(n+1)$ が推移的に作用する. 従って, S^n は $O(n+1)$ の等質空間である.

(2) 複素球面 $S^n_{\mathbb{C}} := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \ : \ z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 1\}$ は, リー群 $O(n+1, \mathbb{C})$ の等質空間である.

(3) 擬リーマン球面 $X(p,q) := \{x \in \mathbb{R}^{p+q+1} \ : \ x_1^2 + \cdots + x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \cdots - x_{p+q+1}^2 = 1\}$ は, リー群 $O(p+1, q)$ の等質空間である.

(4) 複素上半平面 $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im} z > 0\}$ はリー群 $SL(2, \mathbb{R})$ の等質空間である (一次分数変換として作用する).

ところで, G の任意の等質空間は G の閉部分群 H を用いて商多様体 G/H の形で表すことが出来る. すなわち, 次が成り立つ.

事実 1.7. M を G の等質空間とする. M の点 p を一つ選び H を固定部分群 $H := \{g \in G \ : \ g(p) = p\}$ で定めると同相写像 $G/H \xrightarrow{\sim} M, gH \mapsto g(p)$ を通じて M は商多様体 G/H に微分同相である.

例 1.8. 例 1.6 で挙げた等質空間は, 次のようにして商多様体として表示できる.
(1) $S^n \simeq O(n+1)/O(n)$ (2) $S^n_{\mathbb{C}} \simeq O(n+1, \mathbb{C})/O(n, \mathbb{C})$ (3) $X(p,q) \simeq O(p+1, q)/O(p, q)$ (4) $\mathcal{H} \simeq SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$

ここまでで等質空間のタイル張り可能性問題を定式化し, 等質空間の例を幾つか見てきた. さて, ここで実際の問題に取り組む前にタイル張りの問題を Clifford-Klein 形の問題に定式化し直すことにしよう.

実はタイル張り可能性を考えるうえでは, タイルそのもの (コンパクト集合 T) には殆ど意味がなく, タイルの並べ方 (離散群 Γ) こそが本質的である. タイル張りの問題を Clifford-Klein 形の問題に捉え直すことは, 丁度, タイルそのものを忘れ並べ方にのみ注目することに相当する.

1.2 不連続群と Clifford-Klein 形

タイル張りの問題を Clifford-Klein 形の問題に捉え直すために, まず**不連続群**を定義する (定義 1.9). そして, これを用いて M のタイル張り可能性を特徴づけよう (事実 1.14).

定義 1.9. 離散群 Γ が多様体 M に固有不連続かつ固定点自由に作用しているとき Γ を M の**不連続群**という.

定義 1.10. 離散群 Γ の多様体 M への作用が固有不連続あるいは固定点自由であるとは次のように定義される.

(1) 作用が**固有不連続** $\overset{\text{def}}{\iff}$ M の任意のコンパクト集合 S に対し, $S \cap \gamma(S) \neq \emptyset$ となる $\gamma \in \Gamma$ は有限個.

(2) 作用が**固定点自由** $\overset{\text{def}}{\iff}$ M の任意の点 $p \in M$ に対し, $\gamma(p) = p \Rightarrow \gamma = e \quad (\gamma \in \Gamma)$ が成り立つ.

ここで, 不連続群に関する基本的な性質を見ておこう.

事実 1.11. Γ を多様体 M の不連続群とすると, 商空間 $\Gamma\backslash M$ は自然に多様体の構造を持つ. 特に M が単連結の場合には $\Gamma\backslash M$ の普遍被覆多様体は M に, 基本群は Γ に一致する.

事実 1.12. X を多様体とする. X の普遍被覆多様体を $M := \tilde{X}$, 基本群を $\Gamma := \pi_1(X)$ とおく. このとき, Γ は自然に M に作用し, M の不連続群となる. さらに商多様体 $\Gamma\backslash M$ は自然に X と微分同相となる.

即ち, 上の事実を標語的に表すと次の様になる.

多様体 X	$\overset{\text{1:1 に対応する}}{\longleftrightarrow}$	単連結な多様体 M とその不連続群 Γ

X から (M,Γ) を得るには $M = \tilde{X}$, $\Gamma := \pi_1(X)$ とおけばよく, (M,Γ) から X を得るには $X = \Gamma\backslash M$ とおけばよい.

例 1.13. トーラス $\mathbb{T}^n$ の普遍被覆多様体, 基本群はそれぞれ $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Z}^n$ となる. 逆に商空間 $\mathbb{Z}^n\backslash\mathbb{R}^n$ はトーラスとなる.

不連続群の言葉を用いると, 空間のタイル張り可能性は次のように定式化できる.

事実 1.14. G を線形リー群とする. (M,G) がタイル張り可能であることは, G の離散部分群 Γ で M の不連続群となるものが存在し, 商多様体 $\Gamma\backslash M$ がコンパクトとなることが必要十分.

証明の概略. (T,Γ) を (M,G) のタイル張りとする. Γ の適当な有限指数部分群 Γ' でねじれ元を持たないものが取れる. このとき, Γ' は M の不連続群となり, $\Gamma'\backslash M$ はコンパクトとなる. 逆に, M の不連続群 Γ で $\Gamma\backslash M$ がコンパクトとなれば, $\Gamma\backslash M$ の代表系をうまく取り, その閉包を T とすることで, (T,Γ) が (M,G) のタイル張りとなる. ■

最後にタイル張り可能性の問題を Clifford-Klein 形の言葉で言い替えよう.

定義 1.15. G/H を等質空間とする. G の離散部分群 Γ が G/H の不連続群であるとき商多様体 $\Gamma\backslash G/H$ を G/H の**Clifford-Klein 形**という. 特に $\Gamma\backslash G/H$ がコンパクトな Clifford-Klein 形のとき不連続群 Γ を G/H の**一様格子**という.

従って, 事実 1.14 より, 問題 1.5 は次の問題と同値である.

問題 1.16. 等質空間 G/H はコンパクト Clifford-Klein 形を持つか (一様格子を持つか)?

例 1.13 で見たように, $\mathbb{R}^n$ はコンパクト Clifford-Klein 形 $\mathbb{T}^n$ を持つので, タイル張り可能である. 他の例として複素上半平面 $\mathcal{H} = SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ がタイル張り可能な事を見てみよう (例 1.6, 1.8 の (4) を参照).

例 1.17. 種数 2 以上のコンパクトリーマン面 X の普遍被覆多様体は複素上半平面 $\mathcal{H}$ となる. 換言すれば, $\mathcal{H}$ とその不連続群 Γ を用いて, $X = \Gamma\backslash\mathcal{H}$ と表すことができる. 従って複素上半平面 $\mathcal{H}$ はタイル張り可能であり, その不連続群 (タイルの並べ方) は, (本質的に)X の種数 $g\,(\geq 2)$ を決めるごとに定まる.

1.3 線形簡約リー群

この講演では, 等質空間の中でも特に**線形簡約な等質空間**について問題 1.5(問題 1.16) を考察する. そこで, 線形簡約リー群および線形簡約な等質空間について簡単に復習しておこう (なお, ここで取り上げる内容についての詳しい説明は例えば [KO] を参照).

一般線形群 $GL(n,\mathbb{C})$ の閉部分群を**線形リー群**という. また $GL(n,\mathbb{C})$ の同型写像

$$\theta : GL(n,\mathbb{C}) \to GL(n,\mathbb{C}), \qquad g \mapsto (g^*)^{-1}$$

を**カルタン対合**という. 線形リー群 G が θ 不変であり, 連結成分が有限個であるとき G を**線形簡約リー群**という.

例 1.18. 以下のリー群は線形簡約リー群である.

$GL(n,\mathbb{C})$, $GL(n,\mathbb{R})$, $SL(n,C)$, $SL(n,\mathbb{R})$, $O(p,q)$, $U(p,q)$, $Sp(p,q)$, $Spin(p,q)$, $O(n,\mathbb{C})$, $O^*(2n)$, $U^*(2n)$, $Spin(n,\mathbb{C})$.

G を線形簡約リー群とし, θ をカルタン対合としたとき, G の部分集合 K, P を次のように定義する.

$$K := \{g \in G \ : \ \theta(g) = g\}, \qquad P := \{g \in G \ : \ \theta(g) = g^{-1}\}.$$

このとき, K は G の極大コンパクト部分群, P は G の閉部分多様体となる. 例えば $G = GL(n,\mathbb{C})$ のときは, K はユニタリ行列全体 $U(n)$, P はエルミート行列全体となる.

線形簡約リー群 G に対し, P の次元を**非コンパクト次元**といい, 記号 $d(G)$ で表す. すなわち

$$d(G) := \dim P = \dim G - \dim K$$

となる. P 内の極大可換部分群 A を一つ選ぶと, G の任意の元 g は, $k_1, k_2 \in K$ と $a \in A$ によって $g = k_1 a k_2$ と表すことが出来る (表し方は一意ではない). この分解 $G = KAK$ を**カルタン分解**という. また, A の次元を G の**実ランク**といい, 記号 $\mathbb{R}$-rank$G$ で表す. P 内の極大可換部分群は互いに共役なので, その次元は一意に決まる. いくつかの線形簡約リー群について, その非コンパクト次元と実ランクを見ておこう.

G	$GL(n,\mathbb{R})$	$GL(n,\mathbb{C})$	$SO(p,q)$	$SU(p,q)$	$Sp(p,q)$	$Sp(n,\mathbb{R})$
$d(G)$	$\frac{n(n+1)}{2}$	n^2	pq	$2pq$	$4pq$	n^2+n
$\mathbb{R}$-rank$G$	n	n	$\min(p,q)$	$\min(p,q)$	$\min(p,q)$	n

等質空間 $M = G/H$ において, G, H が共に線形簡約リー群であるとき, M を**線形簡約な等質空間**という.

注 1.19. より正確には, 上の意味の線形簡約リー群と同型なリー群もやはり線形簡約リー群という. 例えば, $G \subset GL(n,\mathbb{C})$ を上の意味での線形簡約リー群としたとき, 適当な $g \in GL(n,\mathbb{C})$ による共役 $G' := gGg^{-1}$ は必ずしも θ 不変ではないが, やはり線形簡約リー群という.

同様に, 上の意味の線形簡約な等質空間と同型な空間も線形簡約な等質空間という.

2 古典的な結果

以降, 種々の等質空間について問題 1.16 (あるいは問題 1.5) を考えていく. まず古典的な結果として, 1960 年代に得られた一様格子を持つ空間と持たない空間を見ていこう (今後「タイル張り」という単語は表に出てこないが, 1.2 節で述べたように空間がタイル張り可能であることは一様格子を持つことと同値である).

2.1 リーマン等質空間

Borel は線形簡約なリーマン等質空間が常に一様格子を持つことを示した ([B]).

定義 2.1. 等質空間 G/H は, H がコンパクトなとき, リーマン等質空間という.

定理 2.2. 線形簡約なリーマン等質空間 G/H は一様格子を持つ.

特に線形簡約リー群自身 $G = G/\{e\}$ は一様格子を持つ. また, リーマン多様体 M にその等長変換全体 $G := I(M)$ が推移的に作用するとき, M はリーマン等質空間となる. そのうち線形簡約なものは以下の例がある.

例 2.3. 次の線形簡約な等質空間 G/H はリーマン等質空間であり, 従って一様格子を持つ.

	G/H
1	$SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$
2	$SU^*(2n)/Sp(n)$
3	$SU(p,q)/S(U(p)\times U(q))$
4	$SO_0(p,q)/SO(p)\times SO(q)$
5	$SO^*(2n)/U(n)$
6	$Sp(n,\mathbb{R})/U(n)$
7	$Sp(p,q)/Sp(p)\times SP(q)$
8	$SL(n,\mathbb{C})/SU(n)$
9	$SO(n,\mathbb{C})/SO(n)$
10	$Sp(n,\mathbb{C})/Sp(n)$

例 1.17 で挙げた複素上半平面 $\mathcal{H} = SL(2,\mathbb{R})/SO(2)$ は, 上の表一行目の $n = 2$ の場合に相当する. 定理 2.2 において, 一様格子は算術的部分群を用いて構成される.

2.2 Calabi-Markus 現象

次に一様格子を持たない例を見ていこう. Calabi と Markus は擬リーマン球面 $X(n,1) = SO(n+1,1)/SO(n,1)$ の不連続群 Γ が有限群に限ることを証明した ([CM]). 特に $X(n,1)$ には一様格子が存在しない. このように, 不連続群が有限群に限られる事を **Calabi-Markus 現象**という. 今日では, より一般的に次のような Calabi-Makurs 現象の判定条件が得られている.

定理 2.4. 線形簡約な等質空間 G/H に対して次は同値である.

(i) G/H の不連続群は有限群に限る.

(ii) $\mathbb{R}$-rank$G = \mathbb{R}$-rank$H$.

これより特に擬リーマン球面 $X(p,q)$ は $p \geq q$ ならば不連続群が有限群に限る. その他の例として次の等質空間は一様格子を持たない.

例 2.5. 次の (非コンパクトな) 等質空間 G/H は定理 2.4 の (ii) を満たし, 従って一様格子を持たない ($n = p+q$; $p, q > 0$).

	G/H
1	$Sp(n,\mathbb{R})/GL(n,\mathbb{R})$
2	$SO^*(4n)/U^*(2n)$
3	$SL(n,\mathbb{C})/SL(n,\mathbb{R})$
4	$Sp(n,n)/Sp(n,\mathbb{C})$
5	$SO(2n,\mathbb{C})/GL(n,\mathbb{C})$
6	$GL(n,\mathbb{R})/GL(p,\mathbb{R})\times GL(q,\mathbb{R})$
7	$GL(n,\mathbb{C})/GL(p,\mathbb{C})\times GL(q,\mathbb{C})$
8	$U^*(2n)/U^*(2p)\times U^*(2q)$
9	$Sp(n,\mathbb{C})/Sp(p,\mathbb{C})\times Sp(q,\mathbb{C})$
10	$Sp(n,\mathbb{R})/Sp(p,\mathbb{R})\times Sp(q,\mathbb{R})$
11	$SU(p,q)/SO(p,q)$
12	$Sp(p,q)/SU(p,q)$

3 最近の結果

前の節で, 一様格子を持つ空間 (定理 2.2) と持たない空間 (定理 2.4) に関する古典的な結果を見てきた. この節で扱う結果はこれらの結果の一般化とみなせる.

小林俊行は 1980 年代後半から Clifford-Klein 形の研究を行い, 一様格子を持つ/持たない等質空間の例を多く与えた ([K]). ここでは, その中の主な結果を見ていく. まず必要な言葉を定義しよう.

3.1 固有と相似

等質空間 G/H の不連続群 Γ を考えるうえで, Γ の固有不連続性の判定は重要である. 作用の固有不連続性の判定条件を与えるために「固有」という概念を定義しよう. ここで重要なアイデアは, Γ と H の違いを忘れ G 内で両者を**対等に扱う**点である.

定義 3.1. リー群 G 内の二つの部分集合 L, H に対して, 固有と相似を次の様に定義する. また L と H が固有であるとき記号 $L \pitchfork H$, 相似であるとき $L \sim H$ で表す.

(1) L と H が**固有** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意のコンパクト集合 $S \subset G$ に対して $L \cap SHS$ が相対コンパクト (つまり $L \cap SHS$ の閉包がコンパクト).

(2) L と H が**相似** $\overset{\text{def}}{\iff}$ コンパクト集合 $S \subset G$ が存在して $L \subset SHS$ かつ $H \subset SLS$ とできる.

記号 $\pitchfork$ を用いると次のような固有不連続性の判定条件が得られる: リー群 G とその閉部分群 H, 離散部分群 Γ に対して

$$\boxed{\Gamma \pitchfork H \text{ in } G \iff \Gamma \text{ の } G/H \text{ への作用は固有不連続.}}$$

固有と相似に関するその他の性質もまとめておこう. どれも定義から容易に証明できる.

命題 3.2. L, L', H をリー群 G の部分集合とすると次が成り立つ.

(1) 関係 $\sim$ は同値関係である.

(2) $L \sim L' \implies (L \pitchfork H \Leftrightarrow L' \pitchfork H)$.

(3) $L \pitchfork H \iff H \pitchfork L$.

次の 3.2 節, 3.2 節では「固有」「相似」を用いて, 一様格子の存在問題の一般論を見ていく.

3.2 コンストラクタ

定義 3.3. G/H を線形簡約な等質空間とする. G の簡約部分群 L が次の条件 (a), (b) を満たすとき, L を G/H の**コンストラクタ**という.

$$\text{(a) } L \pitchfork H, \qquad \text{(b) } L\backslash G/H \text{ はコンパクト.}$$

定理 3.4. 線形簡約な等質空間 G/H にコンストラクタが存在するならば, G/H には一様格子が存在する.

証明の概略. Borel の結果 (定理 2.2) より線形簡約リー群 L には $\Gamma\backslash L$ がコンパクトとなるような不連続群 $\Gamma \subset L$ が存在する. このとき, $\Gamma \sim L$ であるから, (a) より $\Gamma \pitchfork H$ in G が得られる. さらに, (b) より $L\backslash G/H$ がコンパクトであることから, $\Gamma\backslash G/H$ もコンパクトになり, Γ は G/H の一様格子であることが分かる. ■

この定理から得られる例を見てみよう. まず線形簡約なリーマン等質空間 G/H を考える. このとき, H はコンパクトであるから, 定義 3.3(a) は常に満たされる. 従って, G 自身がコンストラクタとなり, G/H は一様格子を持つことが分かる. これは 2.1 節で述べた結果に他ならない. また, **群多様体** $G/H = (G' \times G')/\mathrm{diag}G'$ も一様格子を持つ. 実際, $L := G' \times \{e\}$ がコンストラクタとなる.

上記のリーマン等質空間や群多様体の他にも, 個々の等質空間 G/H に対しコンストラクタ L を与えることができる. この場合は $\pitchfork$ の対称性から, H が G/L のコンストラクタとなることに注意しよう. 従って一様格子を持つ空間は**二つ同時に**得られる.

例 3.5. 次の等質空間 G/H 及び G/L は一様格子を持つ $(n=1,2,3,\cdots)$.

	G/H	G/L
1	$SU(2,2n)/U(1,2n)$	$SU(2,2n)/Sp(1,n)$
2	$SO(2,2n)/SO(1,2n)$	$SO(2,2n)/U(1,n)$
3	$SO(4,4n)/SO(3,4n)$	$SO(4,4n)/Sp(1,n)$
4	$SO(3,4)/SO(1,4)$	$SO(3,4)/G_{2(2)}$
5	$SO(4,4)/SO(1,4)$	$SO(4,4)/Spin(3,4)$
6	$SO(8,8)/SO(7,8)$	$SO(8,8)/Spin(1,8)$
7	$SO(8,\mathbb{C})/SO(7,\mathbb{C})$	$SO(8,\mathbb{C})/Spin(1,7)$
8	$SO(8,\mathbb{C})/SO(1,7)$	$SO(8,\mathbb{C})/Spin(7,\mathbb{C})$
9	$SO^*(8)/SO^*(6)$	$SO^*(8)/Spin(1,6)$

(ここで L は G/H のコンストラクタとなり, H は G/L のコンストラクタとなる.)

上の表の 7 行目は冒頭で触れた 7 次元複素球面 $S^7_{\mathbb{C}}=SO(8,\mathbb{C})/SO(7,\mathbb{C})$ である.

3.3 オブストラクタ

前節ではコンストラクタの存在から一様格子の存在が従うことを見た. ここでは逆に一様格子の障碍を見ていこう.

定義 3.6. G/H を線形簡約な等質空間とする. G の簡約部分群 L が次の条件 (a), (b) を満たすとき, L を G/H の**オブストラクタ**という.

$$\text{(a) } L\sim H, \qquad \text{(b) } d(L)>d(H).$$

定理 3.7. 線形簡約な等質空間 G/H にオブストラクタが存在するならば, G/H には一様格子が存在しない.

証明の概略. G/H の一様格子 Γ が存在したと仮定する. (b) より G/H は G/L に比べ「より非コンパクト」である. このことから $\Gamma\not\pitchfork L$ が示される. 一方, $\Gamma\pitchfork H$ と (a) より $\Gamma\pitchfork L$ が得られ矛盾が示される. ■

例 3.8. 次の等質空間 G/H には, オブストラクタ L が存在し, 従って一様格子を持たない.

	G/H	L
1	$SL(2n,\mathbb{R})/SO(n,n)$	$Sp(n,\mathbb{R})$
2	$SU^*(2n)/SO^*(2n)$	$Sp(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor, n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)$
3	$SU(2n,2n)/SO^*(4n)$	$Sp(n,n)$
4	$Sp(2n,\mathbb{R})/U(n,n)$	$Sp(n,\mathbb{C})$
5	$SO(2n,2n)/SO(2n,\mathbb{C})$	$U(n,n)$
6	$SO^*(2n)/SO^*(2p)\times SO^*(2q)$	$SO^*(2n-2)$
7	$SL(n,\mathbb{C})/SO(n,\mathbb{C})$	$SU(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor, n-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor)$
8	$SO(n,\mathbb{C})/SO(p,\mathbb{C})\times SO(q,\mathbb{C})$	$SO(n-1,\mathbb{C})$
9	$SL(2n,\mathbb{C})/SU(n,n)$	$Sp(n,\mathbb{C})$

但し $\lfloor x\rfloor$ は x を越えない最大の整数を表す.

リーマン等質空間に一様格子が存在するという古典的結果は, コンストラクタとして G 自身が選べる事に相当した. 同様に, Calabi-Markus 現象はオブストラクタとして G 自身を選べる事に相当する.

実際, $L=G$ がオブストラクタの条件 (a),(b) を満たしているとすると, 条件 (b) は G/H が非コンパクトであることと同値である. また, 条件 (a) は Calabi-Markus 現象の判定条件 $\mathbb{R}$-rank$G=\mathbb{R}$-rank$H$ と同値になる. このことは, 次のように確かめられる:

$G=KAK$ とカルタン分解し, $K_H:=K\cap H$, $A_H:=K\cap H$ とおくと $H=K_HA_HK_H$ は H のカルタン分解を与える. 極大可換リー群 A, A_H は線形空間に同型なリー群であるから, 条件 $\mathbb{R}$-rank$G=\mathbb{R}$-rank$H$ は条件 $A=A_H$ と同値である. さらに K, K_H がコンパクトな事から, これらは $G\sim H$ と同値である. 即ちオブストラクタの条件 (a) に他ならない.

4 未解決問題

最後に一様格子の存在に関する未解決問題を見て行こう. 次の予想は定理 3.4 の逆が成り立つことを主張する.

予想 4.1. 線形簡約な等質空間 G/H に一様格子が存在するならば, G/H にはコンストラクタが存在する.

仮にこの予想が示されたとすれば, 問題 1.5 に答えることは大幅に易しくなるだろう. しかし, 現時点では予想 4.1 を指示する「状況証拠」が多くあるのみで, 証明を得るには至っていない.

実際, 予想 4.1 を擬リーマン球面 $X(p,q) = O(p+1,q)/O(p,q)$ に適用した次の予想も, 十分性が示されているのみで必要性は未解決である.

予想 4.2 (空間形予想). 等質空間 $X(p,q) = O(p+1,q)/O(p,q)$ が一様格子を持つ必要十分条件は (p,q) が次のリストに含まれることである.

p	$\mathbb{N}$	0	1	3	7
q	0	$\mathbb{N}$	$2\mathbb{N}$	$4\mathbb{N}$	8

十分性は次のようにして分かる: p または q が 0 のときは H がコンパクトとなり Borel の結果 (定理 2.2) より一様格子を持つ. また, $p = 1,3,7$ のときは, それぞれ例 3.5 の 2,3,6 行目に相当する.

予想 4.1 を証明するには「一様格子を持つ」という幾何的な仮定から「オブストラクタ L が存在する」という群論的結論を導かなければならず, 証明の難しさの一因となっている. 一方, 次の予想は幾何的な仮定から幾何的な結論を導けばよいため, 証明がより容易かもしれない.

予想 4.3. 線形簡約な等質空間 G/H が一様格子を持つならば, G/H はコンパクト空間上の自明束である.

実は, この予想は予想 4.1 より弱い予想である. 即ち次が成り立つ.

事実 4.4. 線形簡約な等質空間 G/H がコンストラクタをもつならば G/H はコンパクト空間上の自明束である.

予想 4.3 を複素球面 $S^n_{\mathbb{C}} = O(n+1,\mathbb{C})/O(n,\mathbb{C})$ に適用すると次の様になる.

予想 4.5. 等質空間 $G/H = O(n+1,\mathbb{C})/O(n,\mathbb{C})$ が一様格子を持つ必要十分条件は $n = 1,3,7$ である.

この予想も十分性は示されているものの必要性は未解決である.

References

[B] A. Borel, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces*, Topology **2** (1963), 111–122.

[CM] E. Calabi and L. Markus, *Relativistic space forms*, Ann. of Math. **75** (1962), 63–76.

[K] T. Kobayashi, *Discontinuous groups and Clifford-Klein forms of pseudo-Riemannian homogeneous manifolds*, In: Lecture Notes of the European School, August 1994, eds. H. Schlichtkrull and B. Ørsted, Perspectives in Math **17**. Academic Press (1996), 99–165.

[KO] T. Kobayashi and T. Oshima, Lie 群と Lie 環 1, 2. 岩波講座 (1999).

[KY] T. Kobayashi and T. Yoshino, *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces – revisited.*

力学系と作用素環
Dynamical systems and operator algebras

勝良 健史 (北海道大学大学院理学研究科数学専攻)
Takeshi KATSURA (Department of Mathematics, Hokkaido University)

1 はじめに

本講演では，力学系及び作用素環の定義，力学系から作用素環を構成する方法を紹介して，この構成方法が二つの分野にとってどう有意義であるかを説明しようと思う．

In this talk, I introduce definitions of dynamical systems and operator algebras, and methods to construct operator algebras from dynamical systems. I also try to explain how useful these constructions are for the two areas.

2 力学系

空間 X と，X から X 自身への写像 α の組 $\Sigma = (X, \alpha)$ を**力学系**（**dynamical system**）と呼ぶ．写像 α は対象とする空間に入っている構造（例えば微分構造など）を保つことが仮定されており，この構造としてどのようなものを考えるかによって様々な種類の力学系のクラスを得ることができる．この講演では，X として位相空間を考える**位相力学系**（**topological dynamical system**）と，X として測度空間を考える**可測力学系**（**measurable dynamical system**）の二つだけを扱う．ここで，位相空間といえば局所コンパクト空間を意味し，測度空間といえば局所化可能測度空間を意味することと約束する．局所化可能（localizable）測度空間とは，有限測度空間の直和と同型な測度空間のことであり，任意の σ-有限測度空間は局所化可能である．力学系 $\Sigma = (X, \alpha)$ は，写像 $\alpha\colon X \to X$ が同型写像のとき**可逆**（**invertible**）であるという．

力学系が与えられたとき，それを「基本的」な力学系の合わさったものと考えると便利なことがあるが，この「基本的」な力学系として次がある．

定義 2.1. 可逆な位相力学系 $\Sigma = (X, \alpha)$ は自明でない閉 α-不変集合が存在しないとき**極小**（**minimal**）であるという．

可逆な可測力学系 $\Sigma = (X, \alpha)$ は自分自身も補集合も測度 0 でない α-不変集合が存在しないとき**エルゴード的**（**ergodic**）であるという．

3 作用素環

この章では作用素環の定義や例などを紹介する．証明等は，例えば [P2, P1] を参照のこと．

3.1 $*$環，C^*環，von Neumann環

定義 3.1. **$*$環**（**$*$-algebra**）とは複素数体 $\mathbb{C}$ 上の環 A であって，下の3条件を満たす**対合**（**involution**）と呼ばれる写像 $A \ni x \mapsto x^* \in A$ を持つものである（$x, y \in A$，$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$）；

1. $(x^*)^* = x$,
2. $(\alpha x + \beta y)^* = \overline{\alpha} x^* + \overline{\beta} y^*$,
3. $(xy)^* = y^* x^*$.

定義 3.2. **C^*環**（**C^*-algebra**）とは $*$ 環であって，下の2条件を満たすノルムで Banach 空間になっているものである；

1. $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$,
2. $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

2番目の条件は**C^*条件**（**C^*-condition**）と呼ばれている．これらの条件から自動的に $\|x^*\| = \|x\|$ が成り立つことが分かる．

定義 3.3. **von Neumann環**（**von Neumann algebra**）とは C^*環であって，ある Banach 空間の双対空間になっているものである．

von Neumann 環は W^* 環と呼ばれることもある．上に挙げた C^*環と von Neumann 環の定義は「抽象的」なものであるが，それと同値な「具体的」な定義も存在する．次の節でそれを説明する．

3.2 $B(\mathcal{H})$

$\mathcal{H}$ を複素 Hilbert 空間とする．$\mathcal{H}$ の元を $\xi, \eta, \ldots$ で表し，$\mathcal{H}$ の内積は $\langle \cdot, \cdot \rangle$，ノルムは $\|\cdot\|$ と書く．線形写像 $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は，連続であることと $\sup_{\|\xi\| \leq 1} \|T\xi\|$ の値が有限であることが同値であり，このとき T を**有界作用素**（**bounded operator**）という．また，上記の値を T の作用素ノルム，または単にノルムといい $\|T\|$ であらわす．有界作用素全体の集合を $B(\mathcal{H})$ で表す．$B(\mathcal{H})$ は自然に複素ベクトル空間になり，上のノルムで Banach 空間となる．また，$B(\mathcal{H})$ は写像の合成を積

として環になる．$T \in B(\mathcal{H})$ に対し，$\langle T\xi, \eta\rangle = \langle \xi, S\eta\rangle$ を満たす $S \in B(\mathcal{H})$ が唯一存在する．この S を T^* と表し，T の**共役作用素（adjoint operator）**という．写像 $T \mapsto T^*$ は前節定義した対合が満たすべき条件を満たし，$B(\mathcal{H})$ は $*$ 環になる．また，作用素ノルムにより C^* 環になり，さらに $B(\mathcal{H})$ はトレース有限作用素全体のなす Banach 空間 $T(\mathcal{H})$ の双対空間と同型であることが示されるので，von Neumann 環になる．

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が $\mathbb{C}^n$ のとき，$B(\mathcal{H})$ は $n \times n$ 行列全体のなす環 $M_n(\mathbb{C})$ となり，共役作用素を考えることは転置して各成分の複素共役をとることに対応する．$B(\mathcal{H})$ にはノルムから定まる距離位相以外にも自然に定まる位相がいくつかあるが，その一つに**弱作用素位相（weak operator topology）**と呼ばれるものがある．この位相は，任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対し $B(\mathcal{H}) \ni T \mapsto \langle T\xi, \eta\rangle \in \mathbb{C}$ を連続にする最弱の位相で，ノルム位相よりも弱い．

定理 3.4. $B(\mathcal{H})$ の $*$ 部分環でノルム位相で閉じているものは C^* 環になる．全ての C^* 環はこのようにして得られる C^* 環に同型である．

$B(\mathcal{H})$ の $*$ 部分環で，弱作用素位相で閉じているものは von Neumann 環になる．全ての von Neumann 環はこのようにして得られる von Neumann 環に同型である．

$B(\mathcal{H})$ の元（より一般には C^* 環の元）T は，$T^*T = TT^* = 1$ を満たすとき**ユニタリー（unitary）**，$TT^*T = T$ を満たすとき**部分等長作用素（partial isometry）**と呼ばれる．

3.3 可換な作用素環

C^* 環及び von Neumann 環はそれぞれ非可換位相空間，非可換測度空間と呼ばれることがあるが，それは可換な C^* 環及び von Neumann 環がそれぞれ位相空間，測度空間と一対一に対応していることからきている．この節ではその対応を見る．

位相空間 X 上の $\mathbb{C}$ 値連続関数 f で，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ がコンパクト集合になるもの全体を $C_0(X)$ とかく．$C_0(X)$ は各点の演算及び共役写像で $*$ 環になる．$f \in C_0(X)$ に対し $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$ と定義すると，$C_0(X)$ は $\|\cdot\|_\infty$ というノルムに対して Banach 空間になる．

定理 3.5. 位相空間 X に対して $C_0(X)$ は上の演算で可換 C^* 環になる．逆に可換 C^* 環は全てこの形をしている．

X を測度空間とする．X 上の有界可測関数全体の集合に対し，ほとんどいたるところ一致する二つの関数を同一視したものを $L^\infty(X)$ と書く．上と同様の演算で $L^\infty(X)$ は $*$ 環でありかつ Banach 空間になる．

定理 3.6. 測度空間 X に対して $L^\infty(X)$ は可換 von Neumann 環になる．逆に可換 von Neumann 環は全てこの形をしている．

X 上の可積分関数全体のなす Banach 空間 $L^1(X)$ の双対空間が $L^\infty(X)$ と同型になること†に注意．また，$L^\infty(X)$ は掛け算により Hilbert 空間 $L^2(X)$ 上の作用素としてあらわすこともできる（定理 3.4 参照）．

4 可逆力学系と作用素環

この章では，可逆な位相力学系 $\Sigma = (X, \alpha)$ から C^*環 $A(\Sigma)$ を構成する方法を紹介する．全く同様にして，可逆な可測力学系から von Neumann 環を構成することができるがそれに関しては省略する．以下，主に位相力学系及び C^*環の事についてのみ議論する．

$\Sigma = (X, \alpha)$ を可逆な位相力学系とする．まず可換 C^*環 $C_0(X)$ を適当に $B(\mathcal{H})$ の $*$ 部分環として表す．Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ を

$$\mathcal{K} = \left\{ (\xi_n)_{n=-\infty}^{\infty} \;\middle|\; \xi_n \in \mathcal{H},\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|\xi_n\|^2 < \infty \right\}$$

で定義する．可換 C^*環 $C_0(X)$ から $B(\mathcal{K})$ への写像 π を

$$\pi(f)(\xi_n)_n = (\alpha_n(f)\xi_n)_n \qquad (f \in C_0(X),\ (\xi_n)_n \in \mathcal{K})$$

で定義する．ここで，$n \in \mathbb{Z}$ に対し $\alpha_n(f) \in C_0(X)$ は

$$\alpha_n(f)(x) = f(\alpha^n(x)) \qquad (x \in X)$$

で定義される．このとき π は $C_0(X)$ の $B(\mathcal{K})$ への埋め込みになっている．$\mathcal{K}$ 上のユニタリー作用素 u を $(\xi_n)_n \mapsto (\xi_{n+1})_n$ で定義する．すると，簡単な計算により

$$u\pi(f)u^* = \pi(\alpha_1(f))$$

となることがわかる．ここで，π の像と $u \in B(\mathcal{K})$ で生成される C^*環を $A(\Sigma)$ と書き，**同相写像 C^*環**（**homeomorphism C^*-algebra**）という．同相写像 C^*環 $A(\Sigma)$ は最初に勝手に与えた $C_0(X)$ の表現にはよらないことが証明できる．

同相写像 C^*環 $A(\Sigma)$ はもとの位相力学系の「軌道」の構造の情報を持った C^*環になる．例えば次の定理を証明することができる．

定理 4.1. 位相空間 X が無限集合のとき，力学系 $\Sigma = (X, \alpha)$ が極小的であるための必要十分条件は同相写像 C^*環 $A(\Sigma)$ が単純となることである．

ここで，C^*環が**単純**（**simple**）であるとは，自明でない両側閉イデアルを持たないことである．同様にして，可測力学系がエルゴード的であることを付随する von Neumann 環の言葉で特徴づけることができる．

†これは測度空間が局所化可能であることと同値

可逆な位相力学系 (X,α) は X が Cantor 集合で α が極小的のとき **Cantor 極小系（Cantor minimal system）**と呼ばれる．Giordano，Putnam，Skau の 3 人は 2 つの Cantor 極小系が「強軌道同型」であることと，付随する同相写像 C^* 環が同型であることが同値であることを示した（[GPS]）．

力学系を調べる上で「軌道」の構造とともに重要である「エントロピー」の情報に関しては，付随する作用素環だけでは調べることができないことがわかっている．

5　群作用と接合積

群 G の空間 X への作用 α とは，G から X の自己同型写像全体のなす群への準同型写像のことである．G が整数群 $\mathbb{Z}$ のときは，G の作用を与えることと X の自己同型写像を一つ与えることが同値である．よって，2 章で定義した力学系とは空間 X と $\mathbb{Z}$ の X への作用の組に他ならない．より一般に，空間 X，群 G と G の X への作用 α の 3 つ組のことを力学系と呼ぶこともある．4 章の構成方法と同様にして，そのような 3 つ組から**接合積（crossed product）**と呼ばれる作用素環を構成することができる．X が位相空間のとき，接合積は $C_0(X)\rtimes_\alpha G$ と表される C^* 環で G が $\mathbb{Z}$ のときは同相写像 C^* 環に一致する†．詳しい定義は [P1] を参照．群として位相群を考えるときは作用に関してもある種の連続性を仮定する必要がある．特に実数群 $\mathbb{R}$ の作用は時間発展ととらえることができ重要である．

6　Markov シフトと Cuntz-Krieger 環

可逆力学系に対しては 4 章に挙げたようにして作用素環を構成することができた．可逆でない力学系に対しても同様の構成をすることができるが，この章ではそれとは異なる構成方法を一つ紹介する．この方法は Cuntz と Krieger によって片側 Markov シフトと呼ばれる可逆でない位相力学系を研究するために導入された（[CK]）．

N を 2 以上の自然数とする．

$$\{1,2,\dots,N\}^{\mathbb{N}}=\left\{(x_n)_{n=0}^{\infty}\;\middle|\;x_n\in\{1,2,\dots,N\}\right\}$$

は直積位相でコンパクト空間になる．片側シフト

$$\sigma\colon\{1,2,\dots,N\}^{\mathbb{N}}\ni(x_n)_n\mapsto(x_{n+1})_n\in\{1,2,\dots,N\}^{\mathbb{N}}$$

は全射だが単射でない連続写像である．$\{1,2,\dots,N\}^{\mathbb{N}}$ の閉部分集合 X が $\sigma(X)\subset X$ を満たすとき，$\Sigma=(X,\sigma)$ は可逆でない位相力学系になる．

†接合積には，普遍性を用いて定義される full crossed product と表現を用いて定義される reduced crossed product の二種類があり，群が可換のときは一致する．

Aを成分が0または1の$N \times N$行列とする．このとき，

$$X_A = \left\{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \{1,2,\ldots,N\}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; A_{x_n,x_{n+1}} = 1 \ (n \in \mathbb{N})\right\}$$

は$\sigma(X_A) \subset X_A$を満たす$\{1,2,\ldots,N\}^{\mathbb{N}}$の閉集合になる．このようにして定義される力学系$\Sigma_A = (X_A, \sigma)$は（位相的）**Markovシフト**（**Markov shift**）と呼ばれる．

CuntzとKriegerはMarkovシフトを調べるため，行列Aから次のようにしてC^*環$\mathcal{O}_A$を導入した．$\mathcal{H}$をHilbert空間とし，$B(\mathcal{H})$の部分等長作用素の組$\{S_i\}_{i=1}^N$で次の条件を満たすものを考える．

$$1 = \sum_{i=1}^{N} S_i S_i^*, \qquad S_i^* S_i = \sum_{j=1}^{N} A_{i,j} S_j S_j^*.$$

行列Aがある弱い条件を満たしているとき，上の2条件を満たす部分等長作用素の組$\{S_i\}_{i=1}^N$で生成されるC^*環は$\{S_i\}_{i=1}^N$の取りかたによらず一意である．このC^*環を$\mathcal{O}_A$と書き，**Cuntz-Krieger環**（**Cuntz-Krieger algebra**）と呼ぶ．

上の構成方法からはすぐには分からないが，Cuntz-Krieger環$\mathcal{O}_A$はMarkovシフト$\Sigma_A = (X_A, \sigma)$から一意に定まる．つまり，異なる行列A, A'が同型のMarkovシフトを誘導するとき，それらのつくるCuntz-Krieger環も同型になる．このCuntz-Krieger環のK群やExt群と呼ばれる群は行列Aから簡単に計算可能であり，Markovシフトのflow equivalenceと呼ばれる同値関係での不変量になっている．

7　位相グラフとC^*環

同相写像C^*環とCuntz-Krieger環の構成方法をともに拡張したものとして，[K]で位相グラフと呼ばれるものからC^*環を構成する方法が提案された．

定義 7.1. 位相空間$X, \widetilde{X}$と局所同相写像$d\colon \widetilde{X} \to X$連続写像$r\colon \widetilde{X} \to X$の4つ組$E = (X, \widetilde{X}, d, r)$を**位相グラフ**（**topological graph**）という．

$(\widetilde{X}, d, r)$の3つ組はXから自分自身への多重値連続写像と思うことができ，位相グラフは位相力学系の拡張と思うことができる．実際，dが同相写像のときは，位相グラフは2章で定義した位相力学系に他ならない．また，$X = \widetilde{X} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$，$d(z) = z^2$，$r(z) = z$のとき，位相グラフ$E = (X, \widetilde{X}, d, r)$は$X$上の$\sqrt{\cdot}$という$1:2$の「写像」で定義される「力学系」と考えることができる．4つ組$E = (X, \widetilde{X}, d, r)$がグラフと呼ばれるのは，$X$を点の集合，$\widetilde{X}$を線の集合，線$e \in \widetilde{X}$が$d(e) \in X$から$r(e) \in X$に向き付けられていると思うという視点からきている．

[K]では，この位相グラフEに対してC^*環$\mathcal{O}_E$を定義する方法が提案されたが，この方法は4章であげた同相写像C^*環の構成方法と6章であげたCuntz-Krieger環の構成方法をともに拡張したものであり，C^*環$\mathcal{O}_E$の構造は位相グラフEの「軌道」の構造をよく反映したものになっている．

参考文献

[CK] Cuntz, J.; Krieger, W. *A class of C^*-algebras and topological Markov chains.* Invent. Math. **56** (1980), no. 3, 251–268.

[GPS] Giordano, T.; Putnam, I. F.; Skau, C. F. *Topological orbit equivalence and C^*-crossed products.* J. Reine Angew. Math. **469** (1995), 51–111.

[K] Katsura, T. *A class of C^*-algebras generalizing both graph algebras and homeomorphism C^*-algebras I, fundamental results.* Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no. 11, 4287-4322.

[P1] Pedersen, G. K. *C^*-algebras and their automorphism groups.* London Mathematical Society Monographs, **14**. Academic Press, Inc., London-New York, 1979.

[P2] Pedersen, G. K. *Analysis now.* Graduate Texts in Mathematics, **118**. Springer-Verlag, New York, 1989.

多重ゼータ値入門

On multiple zeta values and their relations

九大数理　田中 立志

本アブストラクトにおいて, 多重ゼータ値及びアソシエータの基本事項をまとめておく. 詳細は [AK],[IKZ] 参照.

Definition 1 (多重ゼータ値, multiple zeta value). 正の整数 $k_1, k_2, \dots, k_n$(但し $k_1 > 1$) に対して, 多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \dots, k_n)$ とは以下の級数で定義される：

$$\zeta(k_1, \dots, k_n) = \sum_{m_1 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_n^{k_n}}.$$

Remark 2. $k_1 > 1$ のとき, 右辺の級数は絶対収束する.

Notation 3. $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ を (収束) index といい, $\mathrm{wt}.\mathbf{k} := k_1 + \cdots + k_n$ を (index $\mathbf{k}$ の, あるいは多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \dots, k_n)$ の) 重さ (weight), $\mathrm{dp}.\mathbf{k} := n$ を深さ (depth) という. また, 以後多重ゼータ値のことを MZV と略記する.

Remark 4. $\mathrm{dp}.\mathbf{k} = 1$ のとき, MZV は Riemann ゼータ値である. 特に, $\mathrm{wt}.\mathbf{k}$ が偶数であるときの Euler の公式は有名である：

$$\zeta(2k) = -\frac{1}{2}\frac{B_{2k}}{(2k)!}(2\pi i)^{2k}.$$

ここに, B_{2k} はベルヌーイ数である：$\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} B_m \frac{t^m}{m!} = \frac{te^t}{e^t - 1}$.

Definition 5 (MZV space). $\mathbf{Q}$ 上のベクトル空間 $\mathcal{Z}_k$ を,

$$\mathcal{Z}_0 = \mathbf{Q}, \mathcal{Z}_1 = 0, \mathcal{Z}_k = \sum_{\mathrm{wt}.\mathbf{k}=k} \mathbf{Q} \cdot \zeta(\mathbf{k}) \ (k \geq 2)$$

で定義する. さらに, MZV 全体が生成する $\mathbf{Q}$-ベクトル空間を $\mathcal{Z}$ とする：$\mathcal{Z} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}_k$.

Conjecture 6 (Zagier's dimention conjecture). $\dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k$ であろう. 但し, $\{d_k\}$ は $d_0 = 1, d_1 = 0, d_2 = 1, d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$ $(k \geq 3)$ で漸化的に定まる数列.

Theorem 7 (Goncharov, Terasoma). $\dim_{\mathbf{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$.

MZV space $\mathcal{Z}$ は, $\mathbf{Q}$-ベクトル空間のみならず, (フィルター, 次数付き) $\mathbf{Q}$-代数となる. そこには, 以下の 2 通りの積構造が入る.

(Ⅰ) **harmonic product** $\cdots$ 定義級数の積に現れる和の範囲の分割からくる積構造.

$$\begin{aligned}\zeta(p)\zeta(q) &= \left(\sum_{m>0}\frac{1}{m^p}\right)\cdot\left(\sum_{n>0}\frac{1}{n^q}\right) = \left(\sum_{m>n>0} + \sum_{n>m>0} + \sum_{m=n>0}\right)\frac{1}{m^p n^q} \\ &= \zeta(p,q) + \zeta(q,p) + \zeta(p+q) \quad \text{など.}\end{aligned}$$

（Ⅱ）**shuffle product** $\cdots$ MZV には反復積分表示がある. 反復積分の積が反復積分の和で書けるという Ree による一般的な定理があり, それからくる積構造.

$$\zeta(p)\zeta(q)=\sum_{i=0}^{p-1}\binom{n-1+i}{i}\zeta(n+i,m-i)+\sum_{j=0}^{q-1}\binom{m-1+j}{j}\zeta(m+j,n-j)\quad \text{など.}$$

（Ⅰ）,（Ⅱ）を合わせると, MZV たちの線形関係式が得られる ((finite) double shuffle relation).

上記の $\mathcal{Z}_k$ の ($\mathbf{Q}$ 上の) 次元の上限を与える定理は, MZV たちの間に豊富な線形関係式が成り立つことを示唆している. 以下に知られている関係式の一部を列挙する.

（A）**duality** Index $\mathbf{k}=(a_1+1,\underbrace{1,\dots,1}_{b_1-1},\dots,a_s+1,\underbrace{1,\dots,1}_{b_s-1})$ $(a_i,b_i\geq 1)$ に対して, その双対 index $\mathbf{k}'$ を,

$$\mathbf{k}'=(b_s+1,\underbrace{1,\dots,1}_{a_s-1},\dots,b_1+1,\underbrace{1,\dots,1}_{a_1-1})$$

で定める. このとき,

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(\mathbf{k}')$$

が成り立つ.

（B）**sum formula** $1\leq n\leq k$ なる正の整数 k,n をとる. このとき,

$$\sum_{\substack{\mathrm{wt.}\mathbf{k}=k\\ \mathrm{dp.}\mathbf{k}=n}}\zeta(\mathbf{k})=\zeta(k)$$

が成り立つ.

（C）**Ohno's relation** 互いに双対な収束 index $\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_n),\mathbf{k}'=(k'_1,\dots,k'_{n'})$ と, 任意の整数 $l\geq 0$ に対して,

$$\sum_{\substack{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_n=l\\ \epsilon_1,\dots,\epsilon_n\geq 0}}\zeta(k_1+\epsilon_1,\dots,k_n+\epsilon_n)=\sum_{\substack{\epsilon'_1+\cdots+\epsilon'_{n'}=l\\ \epsilon'_1,\dots,\epsilon'_{n'}\geq 0}}\zeta(k'_1+\epsilon'_1,\dots,k'_{n'}+\epsilon'_{n'})$$

が成り立つ. Duality 及び sum formula はこの Ohno's relation に含まれている.

（D）**regularized double shuffle relation** MZV たちの間に 2 つの積構造が入ることは述べた. ここではその 2 つの積構造を 2 変数非可換多項式環 $\mathfrak{H}:=\mathbf{Q}\langle x,y\rangle$ 上の積構造として定式化し, そのことばを用いて regularized double shuffle relation とは何かを述べることにする.

Notation 8. $\mathfrak{H}^0:=\mathbf{Q}+x\mathfrak{H}y\subset\mathfrak{H}^1:=\mathbf{Q}+\mathfrak{H}y\subset\mathfrak{H}$ により $\mathfrak{H}^0,\mathfrak{H}^1$ を定義する. また, $z_k:=x^{k-1}y$ とする.

Definition 9. $\mathfrak{H}^1$ 上の積 $*$ を, $\mathbf{Q}$-双線形性及び次の (i), (ii) により定義する :

(i) 任意の $w\in\mathfrak{H}^1$に対し $w*1=1*w=w$,

(ii) 任意の words w_1,w_2と正の整数 p,q に対し

$$z_pw_1*z_qw_2=z_p(w_1*z_qw_2)+z_q(z_pw_1*w_2)+z_{p+q}(w_1*w_2).$$

この積 $*$ を ($\mathfrak{H}^1$上の) harmonic product という. $\mathfrak{H}^1$ はこの積により可換 $\mathbf{Q}$-代数となる. この $\mathbf{Q}$-代数を記号で $\mathfrak{H}^1_*$ と書く. $\mathfrak{H}^0$ は $\mathfrak{H}^1_*$ の部分代数となり, これを $\mathfrak{H}^0_*$ と書く.

Definition 10. $\mathfrak{H}$ 上の積 ш を, **Q**-双線形性及び次の (i), (ii) により定義する：

(i) 任意の $w \in \mathfrak{H}$ に対し w ш $1 = 1$ ш $w = w$,

(ii) 任意の words w_1, w_2 と $u_i = x$ または $y (i = 1, 2)$ に対し

$$u_1 w_1 \text{ ш } u_2 w_2 = u_1(w_1 \text{ ш } u_2 w_2) + u_2(u_1 w_1 \text{ ш } w_2).$$

この積 ш を ($\mathfrak{H}$ 上の) shuffle product という. $\mathfrak{H}$ はこの積により可換 **Q**-代数となる. この **Q**-代数を記号で $\mathfrak{H}_{ш}$ と書く. $\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^0$ は $\mathfrak{H}_{ш}$ の部分代数となり, これらをそれぞれ $\mathfrak{H}^1_{ш}, \mathfrak{H}^0_{ш}$ と書く.

Definition 11 (evaluation map). **Q**-線形写像 $Z : \mathfrak{H}^0 \longrightarrow \mathbf{R}$ を,

$$Z(x^{k_1-1}y \cdots x^{k_n-1}y) = \zeta(k_1, \ldots, k_n) \quad (k_1 > 1, k_2, \ldots, k_n \geq 1)$$

で定義する.

Remark 12. Evaluation map Z は 2 つの積 $*$, ш について ($\mathbb{Q}$-代数) 準同型になる：

$$Z(w_1 * w_2) = Z(w_1)Z(w_2), Z(w_1 \text{ ш } w_2) = Z(w_1)Z(w_2).$$

但し, $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0$ である. これらを合わせて finite double shuffle relation なる線形関係式を得る：

$$Z(w_1 \text{ ш } w_2 - w_1 * w_2) = 0.$$

Proposition 13. (i) **Q**-代数準同型 $Z^* : \mathfrak{H}^1_* \longrightarrow \mathbf{R}[T]$ で, $Z^*|_{\mathfrak{H}^0_*} = Z, Z^*(y) = T$ なるものが一意的に存在する.

(ii) **Q**-代数準同型 $Z^{ш} : \mathfrak{H}^1_{ш} \longrightarrow \mathbf{R}[T]$ で, $Z^{ш}|_{\mathfrak{H}^0_{ш}} = Z, Z^{ш}(y) = T$ なるものが一意的に存在する.

Theorem 14 (regularized double shuffle relation). 任意の $w_1 \in \mathfrak{H}^1, w_0 \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$Z^{ш}(w_1 \text{ ш } w_2 - w_1 * w_2) = 0 \quad (\text{または}, Z^*(w_1 \text{ ш } w_2 - w_1 * w_2) = 0).$$

Conjecture 15. MZV たちのすべての (**Q** 上の) 線形関係式は regularized double shuffle relation から導かれるであろう.

（E）**derivation relation** $\mathfrak{H} = \mathbf{Q}\langle x, y\rangle$ の導分 (derivation) なる **Q**-線形写像 ∂_n(すなわち, $\partial_n(ww') = \partial_n(w)w' + w\partial_n(w')$ をみたすもの): $\mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H}$ を,

$$\partial_n(x) = x(x+y)^{n-1}y, \partial_n(y) = -x(x+y)^{n-1}y$$

で定義する.

Theorem 16 (derivation relation). 任意の正の整数 $n \geq 1$ と任意の $w_0 \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$Z(\partial_n(w_0)) = 0.$$

Derivation relation は duality のもとで Ohno's relation と同値であることが知られている.

次に, Drinfel'd associator を導入する. ここでは簡単のため Le-Murakami [LM] による, その構成的な表示を定義としよう.

$\mathbb{C}$-代数準同型 $g_1 : \mathbb{C}\langle\langle X, Y\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{C}[[\xi, \eta]]\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ を,

$$X \longmapsto X-\xi,\ Y \longmapsto Y-\eta$$

で, $\mathbb{C}$-線形写像 $g_2 : \mathbb{C}[[\xi,\eta]]\langle\langle X,Y\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{C}\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ を,

$$\eta^p M \xi^q \longmapsto Y^p M X^q \ (p,q \geq 0, M \text{ は } X,Y \text{ の word})$$

で定義する. また, MZV たちを係数にもつ 2 変数非可換巾級数 $\varphi(X,Y)$ を,

$$\varphi(X,Y) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 \geq 2 \\ k_2,\ldots,k_n \geq 1}} (-1)^n \zeta(k_1,\ldots,k_n) X^{k_1-1} Y \cdots X^{k_n-1} Y$$

とおく.

Proposition/Definition 17 (Drinfel'd associator). Drinfel'd associator $\Phi(X,Y)$ は,

$$\Phi(X,Y) = g_2 \circ g_1(\varphi(X,Y))$$

で与えられる.

Proposition 18 (associator relation). (i) $\log \Phi(X,Y) \in [\mathbb{L}_{\widehat{\mathbb{C}}}, \mathbb{L}_{\widehat{\mathbb{C}}}]$.
(ii) $\Phi(X,Y)\Phi(Y,X) = 1$.
(iii) $A+B+C=0$ のとき, $e^{\pi i A}\Phi(C,A)e^{\pi i C}\Phi(B,C)e^{\pi i B}\Phi(A,B) = 1$.
(iv) $\Phi(X_{1,2},X_{2,3})\Phi(X_{3,4},X_{4,5})\Phi(X_{5,1},X_{1,2})\Phi(X_{2,3},X_{3,4})\Phi(X_{4,5},X_{5,1}) = 1$.
ここに, $X_{i,i} = 0, X_{i,j} = X_{j,i}$ $(1 \leq i,j \leq 5), \sum_{k=1}^{5} X_{i,k} = 0$ $(1 \leq i \leq 5), [X_{i,j}, X_{k,l}] = 0$ $(\{i,j\} \cap \{k,l\} = \phi)$. $\mathbb{L}_{\widehat{\mathbb{C}}}$ は古庄 [F] 参照.

Conjecture 19. MZV たちの間の関係式はすべて associator relation から導かれるであろう.

Definition 20 (formal associator). formal associator $\widehat{\Phi}(X,Y)$ とは,

$$\widehat{\Phi}(X,Y) = \exp_{Ш}(-yY) \cdot \sum_{\substack{w \in \{x,y\}^* \\ W = \mathrm{Cap}(w)}} wW \cdot \exp_{Ш}(-xX)$$

で定義される, $\mathfrak{H}\langle\langle X,Y\rangle\rangle$ の元である. ここに, $\{x,y\}^*$ は x と y の word 全体, $\mathrm{Cap}(w)$ は w の大文字化, $\exp_{Ш}(-yY)$ は,

$$\exp_{Ш}(-yY) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^{Ш n} \frac{Y^n}{n!}$$

とする.

Proposition 21. (i) $\widehat{\Phi}(X,Y) \in \mathfrak{H}^0\langle\langle X,Y\rangle\rangle$.
(ii) $Z(\widehat{\Phi}(X,Y)) = \Phi(X,Y)$.

Theorem 22 ([T]). Proposition 18 (ii) $\Longleftrightarrow$ MZV の duality.

Question 23. ほかの associator relation $\Longleftrightarrow$ (あるいは $\Longrightarrow$) MZV の ??.

参考文献

[AK] T. Arakawa and M. Kaneko, 多重ゼータ値および多重 L 値ノート, 立教 SFR 講究録 7, 2005.

[F] H. Furusho, *The multiple zeta values algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Vol 39. no 4. (2003). 695-720.

[IKZ] K. Ihara, M. Kaneko and D.Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Max-Planck-Institut für Mathematik preprint series 2004-100.

[LM] T. Q. T. Le and J. Murakami, *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J. 142(1996), 39-65.

[T] T. Tanaka, *A few applications of shuffle products for p-adic multiple zeta values*, Master's thesis, Kyushu University (2004).

3次元双曲多様体の組み合わせ的構造について*

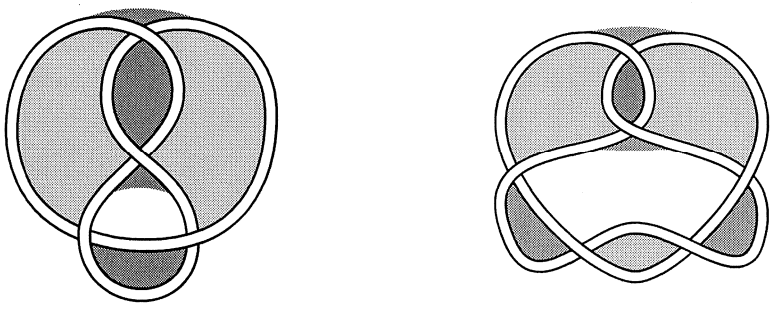
秋吉 宏尚（大阪市立大学数学研究所）†

Abstract

By Thurston's theorem, every Haken manifold as the complement of a knot in the 3-sphere is canonically decomposed into finitely many geometric pieces. In this talk, we will briefly see Thurston's theory on the hyperbolic uniformization of Haken manifolds, which is based on the deformation of Kleinian groups. Recently, several famous conjectures in the theory of Kleinian groups are announced to be true. We will see some of them. In the talk, we also see more concrete approach to hyperbolic manifolds, which is based on Jorgensen's theory on the quasifuchsian space of once-punctured torus groups.

1 序

図1に描かれているのは（実3次元空間 $\mathbb{R}^3$ の1点コンパクト化として得られる）3次元球面 S^3 内の**結び目**，すなわち円周 S^1 の埋め込み，である．これら K_1, K_2 の類似点，相違点をいくつか列挙してみよう．まず，いずれも種数1を持つことがわかる．すなわち，各結び目を境界として持ち，内部では結び目と交わらないような種数1の曲面（一点穴あきトーラス）が存在する．その曲面も図に描かれている．(図を見ると帯のようにアニュラスがねじれて埋め込まれているように見えるが，その上の方の一部は2階建て状になっていて，360度ひねられた帯がくっついている.）二つの結び目の重要な類似点として，どちらも双曲的結び目であるということが挙げられる．すなわち，いずれの補空間も有限体積完備双曲構造を許容する．モストウ剛性により，そのような双曲構造は位相不変である（すなわち補空間に対する一意性がある）ことがわかる．一方，二つの結び目の相違点の一つとして，K_1 は，補空間が円周上の曲面束と同相である



(a) (b)

図 1: (a) 8の字結び目 $K_1 = 4_1$，(b) $K_2 = 6_1$ （結び目の番号は Rolfsen の表のもの）

*Hyperbolic 3-manifolds from the viewpoint of combinatorial structure

†Hirotaka Akiyoshi (Osaka City University Advanced Mathematical Institute)

という，ファイバー結び目であるのに対して，K_2 はそうでないことが挙げられる．この違いは様々な性質の差を生み出すが，今回注目したいのは，それぞれの双曲構造に関するものである．

この講演では，これらの結び目の類似点，相違点を例として，3次元双曲多様体について考察していくことにする．

2　3次元多様体の幾何化

閉（= 向き付け可能で境界を持たずコンパクトな）曲面に対する次の事実はよく知られているだろう：閉曲面 S はそのオイラー標数 $\chi(S)$ により分類される．さらに，

- $\chi(S) > 0$ となるのは S が2次元球面 S^2 と同相なときに限る．S^2 は，3次元ユークリッド空間内の単位球面として実現されるので，**球面構造**（= 定曲率1を持つリーマン計量）を許容する．
- $\chi(S) = 0$ となるのは S が2次元トーラス T^2 と同相なときに限る．T^2 は，ユークリッド平面 $\mathbb{E}^2$ を2つの平行移動（等長変換）$(x, y) \mapsto (x+1, y)$, $(x, y) \mapsto (x, y+1)$ が生成する階数2の自由アーベル群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の作用で割ったものとして実現されるので，**ユークリッド構造**（= 定曲率0を持つリーマン計量）を許容する．
- $\chi(S) < 0$ となるのは種数が2以上の場合，すなわち，S が S^2 とも T^2 とも同相でないときである．このとき S は，双曲平面 $\mathbb{H}^2$ を等長変換群の離散部分群（フックス群）で割ったものとして実現されることがわかるので，**双曲構造**（= 定曲率 -1 を持つリーマン計量）を許容する．

補足 2.1. 一つの（種数が2以上の）曲面 S が許容することのできる双曲構造は一意的ではない．そこで，S が許容する（標識つき）双曲構造全体からなる空間を S のタイヒミュラー空間と呼び，$\mathrm{Teich}(S)$ と書くことにする．S のリーマン計量の各等角同値類は唯一つの双曲構造を含むことが知られている．従って，$\mathrm{Teich}(S)$ は S が許容する（標識つき）等角構造全体からなる空間とも同一視される．

上記の曲面の「幾何化」と同様なことが3次元多様体に対しても期待される．それが Thurston による3次元多様体に対する幾何化予想である．幾何化予想を述べる準備として，3次元閉多様体の標準的な分割について触れておく（[4, 6] 参照）．

3次元閉多様体 M を，埋め込まれた2次元球面に沿って切り開くと二つの連結成分が得られるとき，各連結成分の S^2 と同相な境界に3次元球体を境界で貼りつけることで2つの3次元閉多様体 M_1, M_2 が得られる．このとき，M は M_1 と M_2 の**連結和**であるといい，$M = M_1 \# M_2$ と書く．$M = M_1 \# M_2$ ならば成分 M_1，M_2 のいずれかが3次元球面 S^3 と同相であるとき，M は**素**であるという．

定理 2.2 (Kneser, Milnor)**.** 3次元閉多様体は有限個の素な多様体の連結和として一意的に表される．

任意に埋め込まれた S^2 が常に埋め込まれた3次元球体の境界となるような多様体は**既約**であるという．素だが既約でない3次元閉多様体は球面と円周の直積しかないことがわかる．シェンフリースの定理により，3次元球面内の任意の結び目の補空間は既約なことがわかる．トーラス体でもクラインの壺上の閉区間束でもないような（トーラスを境界成分として持つかもしれない）3次元多様体は，埋め込まれた任意のトーラス，クラインの壺が境界成分にアイソトピックなとき，**非トーラス的**であるという．また，曲面上の（特異ファイバーを許容する）円周束を**ザイフェルト多様体**という．図1に描かれた K_1, K_2 それぞれの補空間は非トーラス的で，さらに，ザイフェルト多様体ではないことがわかる．

定理 2.3 (Jaco-Shalen-Johanson)**.** 既約な3次元多様体は極大なザイフェルト多様体と非トーラス的な多様体の和集合として一意的に表される．

定理 2.2, 2.3 により，任意の 3 次元閉多様体は有限個の（トーラスを境界成分として持つかもしれない）既約な非トーラス的多様体，ザイフェルト多様体，球面と円周の直積の和集合への標準的な分解を持つことがわかる．上で述べた事実から，図 1 に描かれた K_1, K_2 の補空間は，それ自体がこの標準的分割の成分であることがわかる．

ザイフェルト多様体は 3 次元球面 S^3，3 次元ユークリッド $\mathbb{E}^3$ 構造，あるいは低い次元の構造の積 $S^2 \times \mathbb{E}^1$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$, $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$, Nil 構造のいずれかを局所モデルとする幾何構造を許容する．ザイフェルト，双曲構造以外に，もうひとつ Sol 構造が存在する．

予想 2.4 (Thurston，幾何化予想)．3 次元閉多様体から定理 2.2, 2.3 により得られた各多様体は，ザイフェルト構造，Sol 構造，または双曲構造を許容するだろう．

既に述べたように，K_1, K_2 の補空間はザイフェルト構造を許容しないことがわかる．また，Sol 構造を許容するのは閉多様体のみである．従って，予想 2.4 によれば，K_1, K_2 の補空間は双曲構造を許容することが期待される．そして，それは正しいことが次の定理により示された．

基本群間の単射を誘導する曲面の埋め込みで境界にアイソトピックでないようなもの（**本質的曲面**）を許す既約多様体を**ハーケン多様体**と呼ぶ．既約 3 次元多様体が球面と同相でない境界を持つならばハーケン多様体であることが知られている．従って，特に 3 次元球面内の任意の結び目の補空間はハーケン多様体である．

定理 2.5 (Thurston)．ハーケン多様体に対しては予想 2.4 は正しい．

Thurston の証明に従って，K_1，K_2 の補空間の有限体積完備双曲構造を構成するためのアイディアを述べておく．まず，それらがハーケン多様体であるという性質を用いると，本質的曲面で次々に切り開いていくことで，いくつかの球体へと分解することができる．その球体たちの双曲構造を構成し，徐々に構造を変形した上で逆に貼り合わせていくことで，最終的には K_1，K_2 の補空間の双曲構造を得ることができる．補空間を切り開くための最初の曲面，すなわち，双曲構造を得るために最後に貼り合わせる必要のある曲面として，図 1 に描かれた穴あきトーラスを用いることができる．その最後の貼り合わせが可能であることを保障する議論は以下のようなものである．K_1 のようにファイバー曲面で切り開く場合には，「二重極限定理」を用いて穴あきトーラス擬フックス空間 $\mathcal{QF}$ の境界内に貼り合わせ可能な構造が見つかることが保障される．一方，K_2 のようにファイバー曲面でないもので切り開くときには，切り開いた多様体の幾何学的有限な双曲構造の変形空間の上に，その不動点が貼り合わせ可能な構造となるような写像を定義し，その写像に対する「不動点定理」により証明が完成する．

3　双曲多様体とクライン群

この講演では前節で紹介した 3 次元多様体が許容すると期待される 8 つの幾何構造のうち，双曲構造に注目する．これは，一つには，双曲構造以外の幾何構造を許容する多様体はかなりよく分かっているという事実による．また，任意の 3 次元閉多様体は，トーラスと同相な境界成分を持ち内部が有限体積完備双曲構造を許容するような多様体の境界にトーラス体を貼り付けることにより得られることが知られていて，さらに（加算通りある）境界へのトーラス体の貼り付け方のうち，有限個の例外を除けば得られる閉多様体は双曲構造を許容することが知られている．この意味で「ほとんど全ての 3 次元閉多様体は双曲構造を許容する」と思うこともできるのである．これが双曲多様体を研究する大きな動機となっている．

3 次元完備双曲多様体 M に対し，その普遍被覆空間を $\widetilde{M}$ とすると，局所座標系を解析接続することで，3 次元双曲空間への展開写像 $\widetilde{M} \to \mathbb{H}^3$ を得ることができる．ここで，$\widetilde{M}$ は単連結・完備な双曲多様体なので，展開写像は等長同型写像であることがわかる．この写像を通して M の普遍被覆空間を $\mathbb{H}^3$ と同一視

すると，基本群 $\pi_1(M)$ は被覆変換群として $\mathbb{H}^3$ に等長的に完全不連続に作用することがわかる．こうして，$M \cong \mathbb{H}^3/\Gamma$（$\Gamma$ は $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の離散部分群）という同一視が得られる．$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の離散部分群を**クライン群**と呼ぶ．また，上のような方法で得られる準同型 $\pi_1(M) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ を**ホロノミー写像**という．

双曲平面 $\mathbb{H}^2$ は，リーマン計量 $ds^2 = |dz|^2/(\Im(z))^2$ を持つ上半平面 $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im(z) > 0\}$ と同一視される（**上半平面モデル**）．このモデルにおいて，(向きを保つ) 等長変換は 1 次分数変換 $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ となるので，等長変換群 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ は $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\{\pm I\}$ と同一視される．3 次元双曲空間 $\mathbb{H}^3$ の**上半空間モデル** $\{(z,t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R} \,|\, t>0\}$, $ds^2 = (|dz|^2+dt^2)/t^2$ の無限遠境界はリーマン球面 $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ と自然に同一視され，$\widehat{\mathbb{C}}$ への 1 次分数変換としての $PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/\{\pm I\}$ の作用は等長変換群 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ と同一視される．成分を複素化することにより，$PSL(2,\mathbb{R}) \subset PSL(2,\mathbb{C})$ とみなされるが，この包含関係は自然に $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2) \subset \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ と対応する．

以上の事実より，3 次元（2 次元）双曲構造のホロノミー写像は多様体の基本群の $PSL(2,\mathbb{C})$（$PSL(2,\mathbb{R})$）への表現とみなされる．行列群の位相から，表現空間にも位相が誘導されるが，実は双曲構造の微小変形は表現の微小変形と対応することがわかる．こうした考察を基にして，双曲構造の変形空間は表現の変形空間に埋め込まれる．

4 Jorgensen 理論

この節では穴あきトーラス群に対する Jorgensen 理論について述べる．第 2 節の最後に述べたように，円周上の曲面束の双曲構造を構成するためには，曲面束をファイバー曲面で切り開いて得られる多様体，すなわち曲面と区間の直積，が許容する双曲構造を知る必要がある．Jorgensen 理論とは，(一点) 穴あきトーラスと区間の直積が許容する双曲構造の，フォード領域と呼ばれる標準的な基本領域に関する理論である．

穴あきトーラス T の（2 次元）有限面積完備双曲構造に関するホロノミー写像を $\rho_0 : \pi_1(T) \to PSL(2,\mathbb{R})$ とし，擬フックス空間を

$$\mathcal{QF} = \{\rho : \pi_1(T) \to PSL(2,\mathbb{C}) \,|\, \rho = w\circ\rho_0\circ w^{-1},\ w : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}} : \text{擬等角同相}\}/\text{共役}$$

と定義する．また，$\mathcal{QF}$ の，$\pi_1(T)$ の $PSL(2,\mathbb{C})$ 表現空間における，閉包を $\overline{\mathcal{QF}}$ と書くことにする．$\rho \in \overline{\mathcal{QF}}$ に対し，双曲多様体 $\mathbb{H}^3/\mathrm{Im}\,\rho$ は $T\times(-1,1)$ に同相であることがわかり，さらに，開区間 $(-1,1)$ の両端 ±1 に対応して $\mathbb{H}^3/\mathrm{Im}\,\rho$ には T 上の（無限遠）等角構造もしくは ending lamination として射影層状構造が自然に定義される．これら $\lambda^{\pm}(\rho)$ は $\mathrm{Teich}(T) \cong \mathbb{H}^2$ のサーストンコンパクト化 $\mathrm{Teich}(T)\cup\mathcal{PML}(T) \cong \overline{\mathbb{H}}^2$ に値をとる．こうして，**end invariant** $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^-,\lambda^+) : \overline{\mathcal{QF}} \to \overline{\mathbb{H}}^2\times\overline{\mathbb{H}}^2 - \mathrm{diag}(\partial\mathbb{H}^2)$ が定義される．ベアスの同時一意化，および，Minsky [8] による「穴あきトーラスに対する ending lamination conjecture の肯定的解決」の一部により，次の定理が知られている．

定理 4.1. $\boldsymbol{\lambda} : \overline{\mathcal{QF}} \to \overline{\mathbb{H}}^2\times\overline{\mathbb{H}}^2 - \mathrm{diag}(\partial\mathbb{H}^2)$ は全単射である．また，逆写像は連続である．

Jorgensen [5] により，end invariant とは異なる方法で，同じ定義域・値域を持つ写像が定義されている．以後，$\mathbb{H}^3$ に上半空間モデルを用いる．

定義 4.2. クライン群 Γ に対し，∞ の固定化群を Γ_∞ と書くことにする．このとき，Γ の**フォード領域** $Ph(\Gamma) \subset \mathbb{H}^3$ を，「$\Gamma - \Gamma_\infty$ に含まれる全ての要素に対する等長半球面の外部の共通部分」と定義する．

補足 4.3. Γ_∞ の $\mathbb{H}^3$ への作用の基本領域を Rh_∞ とすると，$Ph(\Gamma)\cap Rh_\infty$ は Γ の作用の基本領域となる．定義から，フォード領域とは「無限遠点を中心としたディリクレ領域」のようなものと思うことができる．ディリクレ領域は中心点の取り方に依存して一意的には定義されないが，我々が対象とする穴あきトーラス群に関しては，カスプに対応する放物的固定点が無限遠に（本質的に）一意的に定まるので，フォード領域は一意的に定まることがわかる．

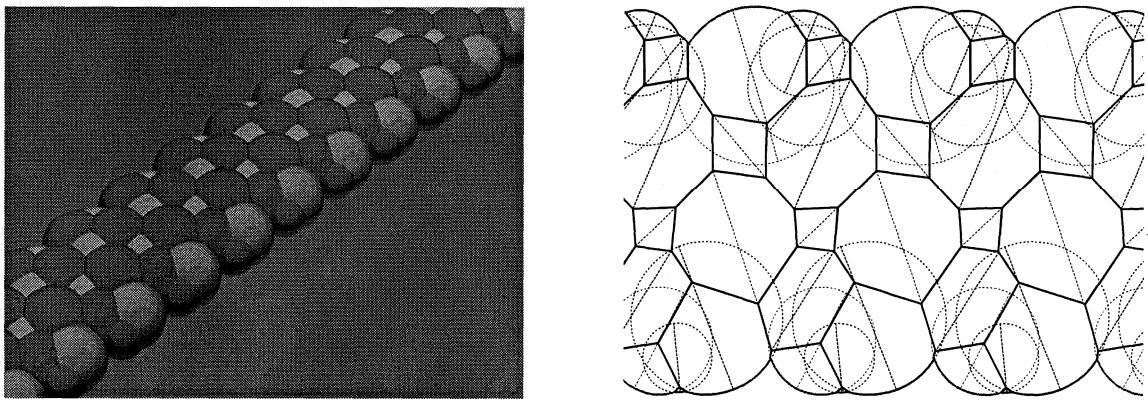


図 2: 一般的な穴あきトーラス擬フックス群のフォード領域

定理 4.4 (Jorgensen [5], cf. [3, 2]). 以下の性質を持つ写像 $\boldsymbol{\nu} = (\nu^-, \nu^+) : \overline{\mathcal{QF}} \to \overline{\mathbb{H}}^2 \times \overline{\mathbb{H}}^2 - \mathrm{diag}(\partial\mathbb{H}^2)$ が存在する.

(1) 任意の $\rho \in \overline{\mathcal{QF}}$ に対し, $Ph(\rho)$ の組み合わせ構造は $\boldsymbol{\nu}(\rho)$ により記述される.

(2) $\boldsymbol{\nu}$ は強位相に関して連続な全射である. さらに, その制限 $\boldsymbol{\nu}|_{\mathcal{QF}} : \mathcal{QF} \to \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ は同相写像である.

(3) 各 $\epsilon = \pm$ に対し, $\nu^\epsilon(\rho) \in \partial\mathbb{H}^2$ と $\lambda^\epsilon(\rho) \in \partial\mathbb{H}^2$ は同値である. さらに, これらの条件が満たされるとき, $\nu^\epsilon(\rho) = \lambda^\epsilon(\rho)$ である.

定理 4.4 により定まるパラメータ $\boldsymbol{\nu} = (\nu^-, \nu^+) : \overline{\mathcal{QF}} \to \overline{\mathbb{H}}^2 \times \overline{\mathbb{H}}^2 - \mathrm{diag}(\partial\mathbb{H}^2)$ を **side parameter** と呼ぶ. この理論の周辺で, 次のような結果を得ることができる.

- Side parameter と end invariant との比較と, その帰結として凸核の双曲体積の評価 ([2] 参照)
- 穴あきトーラス束の Epstein-Penner 分割の決定 ([1, 7] 参照)
- 表現の離散性の判定 ([9, 10] 参照)
- 二橋結び目補空間の Epstein-Penner 分割 ([3] 参照)

5 今後の展望

次の問題を考えたい.

問題 5.1. 2 枚の穴あきトーラスを境界として持つ 3 次元多様体のフォード領域を特徴づけよ.

第 4 節で述べたように, 図 1 に描かれた K_1 の補空間を始めとする, 穴あきトーラス束の双曲構造は, Jorgensen 理論によってフォード領域を用いて組み合わせ的にも精密に理解される. そこで, K_2 の補空間のような非ファイバー曲面を含む多様体の双曲構造も組み合わせ構造の観点から理解できるのではないかと期待している. すなわち, 次の表の「???」を埋めることを目指す.

	解析的議論	組み合わせ的議論
ファイバー曲面	二重極限定理	Jorgensen 理論
非ファイバー曲面	不動点定理	???

参考文献

[1] H. Akiyoshi, *On the Ford domains of once-punctured torus groups*, in *Hyperbolic spaces and related topics*, RIMS, Kyoto, Kokyuroku 1104 (1999), 109-121.

[2] H. Akiyoshi, *End invariants and Jorgensen's angle invariants of punctured torus groups*, in *Perspectives of Hyperbolic Spaces II*, RIMS, Kyoto, Kokyuroku 1387, 59–69 (2004).

[3] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, and Y. Yamashita, *Punctured torus groups and 2-bridge knot groups (I)*, preprint.

[4] J. Hempel, "3-Manifolds", Annals of Mathematics Studies 86, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.

[5] T. Jorgensen, *On pairs of punctured tori*, unfinished manuscript, available in Proceeding of the workshop "Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds" (edited by Y.Komori, V.Markovic and C.Series), London Math. Soc., Lect. Notes 299 (2003), 183–207.

[6] M. Kapovich, "Hyperbolic Manifolds and Discrete Groups", Progress in Mathematics 183, Birkhäuser, 2000.

[7] M. Lackenby, *The canonical decomposition of once-punctured torus bundles*, Comment. Math. Helv. 78 (2003), no. 2, 363–384.

[8] Y. Minsky, *The classification of punctured torus groups*, Ann. of Math. 149 (1999), 559–626.

[9] M. Wada, *OPTi*, a Macintosh softoware, available from:
`http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~wada/index-jp.html`

[10] Y. Yamashita, *Computer experiments of the discreteness locus in projective structures*, to appear in the proceeding of the workshop, "Spaces of Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds", London Math. Soc., Lect. Notes. Edited by Y. Minsky, M. Sakuma, and C. Series.

〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138 大阪市立大学 数学研究所
e-mail: akiyoshi@sci.osaka-cu.ac.jp

Recognition principle of normal surface singularities in positive characteristic

有馬研一郎（北大 COE）
Ken-ichiro Arima, Hokkaido Univ.

Abstract. Rational double points and simple elliptic singularities are characterized by their equations in characteristic 0. They are known as quasihomogeneous singularities. The classification algorithm of their equations is also studied. We try to extend these results to the case of positive characteristic.

1 2次元正規特異点

Definition 1. k を代数的閉体とする．$n+1$ 変数多項式 $f \in k[x_0, \cdots x_n]$ で定まる超曲面が点 $P = (p_0, \cdots, p_n)$ で 特異点 を持つとは

$$f(P) = \frac{\partial f}{\partial x_0}(P) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = 0$$

であるときをいう．

また，$A = k[x_0, \cdots x_n]/(f)$ が商体 $Q(A)$ の中で正規であるとき，この超曲面を 正規曲面 という．

直観的には尖った点や折り目を連想すればよい．また2次元 $(n = 2)$ の場合，正規であることと高々孤立特異点であることは同値である．

Definition 2. 正規代数多様体の最小特異点解消 $\mu : Y \longrightarrow X$ に対し $R^i\mu_*\mathcal{O}_Y = 0$ が $i > 0$ で成り立つとき，X は 有理特異点 を持つという．

Fact 3. 2次元の場合，以下は同値である．

(1) 有理2重点である．

(2) 標準特異点である．

(3) 絶対孤立2重点である．

(4) 単純特異点である．

(5) 最小特異点解消の既約例外因子が全て (-2)-曲線である．

Definition 4. 正規代数曲面の最小特異点解消の例外集合が非特異楕円曲線であるとき，X は 単純楕円型特異点 を持つという．

以下の2つは標数0の場合である．

Fact 5. 2次元の有理2重点の標準形は，下記の5つである．

A_m : $z^2+x^2+y^{m+1}$ $(m\geq 1)$

D_m : $z^2+x^2y+y^{m-1}$ $(m\geq 4)$

E_6 : $z^2+x^3+y^4$

E_7 : $z^2+x^3+xy^3$

E_8 : $z^2+x^3+y^5$

Fact 6. 2次元の単純楕円型特異点で超平面特異点であるものは，次の3つの標準形で表される．

$\widetilde{\mathrm{E}}_6$: $x^2z-4y^3+g_2yz^2+g_3z^3=0$

$\widetilde{\mathrm{E}}_7$: $x^2-4y^3z+g_2yz^3+g_3z^4=0$

$\widetilde{\mathrm{E}}_8$: $x^2-4y^3+g_2yz^4+g_3z^6=0$ where $g_2^3-27g_3^2\neq 0$

Definition 7. $w=(w_0,w_1,w_2)\in\mathbb{Q}^3_{\geq 0}$ に対し単項式 $M=a\,x^{e_0}y^{e_1}z^{e_2}\in k[[x,y,z]]$ の重みを $w(M)=\sum e_iw_i$ と定める．$f\in k[[x,y,z]]$ は以下を満たすとき重み w に関して半擬斉次多項式であるという：$f=f_{w=1}+f_{w>1}$ と書けて (i) $f_{w=1}$ に現れる0でない係数の単項式 M について $w(M)=1$．(ii) $f_{w>1}$ に現れる0でない係数の単項式 M について $w(M)>1$．($f_{w>1}=0$ の場合は擬斉次多項式である．)

Fact 5, 6 より次の事実が解る．

Fact 8. 標数0では有理2重点および単純楕円型特異点は擬斉次多項式である．

2 正標数の特異点

標数0の2次元正規特異点は，与えられた方程式を標準形に帰着するアルゴリズムも知られている ([KM], Section 4.2 他)．一方正標数では困難である．以下は [GK] による標数2の2重点の分類アルゴリズムの概要である．

(1) $f_2\sim x^2+yz\Rightarrow \mathrm{A}_1$

(2) $f_2\sim yz\Rightarrow \mathrm{A}_m$ or non-normal

(3) $f_2\sim x^2$. $f=x^2+\psi(y,z)+x\varphi(y,z)$. $O(\psi)\geq 3$, $O(\varphi)\geq 2$.

(3-1) $\psi_3\equiv 0\Rightarrow$ not RDP

(3-2) $\psi_3\sim y^2z+yz^2\Rightarrow \mathrm{D}_4$

(3-3) $\psi_3\sim y^2z$. $f\sim x^2+y^2z+axyz+bxz^2+O(4)$.

(3-3-1) $b\neq 0\Rightarrow \mathrm{D}_5^0$ $(a=0)$ or D_5^1 $(a\neq 0)$

:

このように，標数 0 と比べると大変複雑である．

次に，標数 0 との違いを定義方程式でみてみよう．例えば，標数 3 の有理 2 重点は 9 種類に増える．

$\mathrm{A}_m : z^2+x^2+y^{m+1} \quad (m \geq 1)$

$\mathrm{D}_m : z^2+x^2y+y^{m-1} \quad (m \geq 4)$

$\mathrm{E}_6^0 : z^2+x^3+y^4$

$\mathrm{E}_6^1 : z^2+x^3+y^4+x^2y^2$

$\mathrm{E}_7^0 : z^2+x^3+xy^3$

$\mathrm{E}_7^1 : z^2+x^3+xy^3+x^2y^2$

$\mathrm{E}_8^0 : z^2+x^3+y^5$

$\mathrm{E}_8^1 : z^2+x^3+y^5+x^2y^3$

$\mathrm{E}_8^2 : z^2+x^3+y^5+x^2y^2$

すなわち，正標数では有理 2 重点が既に擬斉次多項式になっていない．

有理 2 重点の型を X_m^r とすると，半擬斉次多項式に関しては重みで X と m の判別は可能である．r は決定出来ない．

Theorem 9 ([Ro]). 重み $\mathcal{A}_m = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{m+1})$, $\mathcal{D}_m = (\frac{1}{2}, \frac{1}{m-1}, \frac{m-2}{2(m-1)})$, $\mathcal{E}_6 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4})$, $\mathcal{E}_7 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9})$, $\mathcal{E}_8 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5})$ に関する擬斉次多項式は有理 2 重点を定める．その型はそれぞれ A_m, D_m^r, E_6^r, E_7^r, E_8^r.

正標数の単純楕円型特異点の定義方程式の標準形は，超平面の場合が廣門氏によって分類された ([Hi], Corollary 4.3)．これらは擬斉次多項式になっている．

Theorem 10 ([Hi], Corollary 4.3).

char 2

$\widetilde{\mathrm{E}}_6 : x^2z+y^3+a_1xyz+a_3xz^2+a_4yz^2=0$

$\widetilde{\mathrm{E}}_7 : x^2+y^3z+a_1xyz+a_3xz^2+a_4yz^3=0$

$\widetilde{\mathrm{E}}_8 : x^2+y^3+a_1xyz+a_3xz^3+a_4yz^4=0$

where $a_i \in k$, $a_1^5a_3a_4+a_1^4a_4^2+a_3^4+a_1^3a_3^3 \neq 0$

char $\neq 2$

$\widetilde{\mathrm{E}}_6 : y(y-z)(y-\lambda z)-x^2z=0$

$\widetilde{\mathrm{E}}_7 : yz(y-z)(y-\lambda z)-x^2=0$

$\widetilde{\mathrm{E}}_8 : y(y-z^2)(y-\lambda z^2)-x^2=0, \quad$ where $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0,1$

これに加え次のことがわかる．

Theorem 11. 次の重みを持つ半擬斉次多項式が孤立特異点の定義方程式ならば，単純楕円型特異点を定める．

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

Proof. 重みが $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ の場合，$f_{w=1}$ に現れる単項式は x^2, xyz, xz^3, y^3, y^2z^2, yz^4, z^6 であり，標数が 2 で孤立特異点であれば各項の重みを変えずに $f_{w=1} = x^2 + y^3 + a_1xyz + a_3xz^3 + a_4yz^4$ と変形出来る．$f_{w>1}$ が特異点の性質に影響しないことは重み付きブローアップを行うことで解る．$f_{w<1} \neq 0$ の場合は全て有理 2 重点であることが確認出来る．他の重みについても同様．

これを用いて標数 2 の 2 重点の分類アルゴリズムを拡張することを試みる．[GK] によると有理 2 重点にならないもののうち，孤立特異点であるものは以下のようになっている．

(1) (non-normal)
(2) (2-1) $x^2 + O(4)$
(2-2) $x^2 + xy^2 + O(4)$
(2-3) $x^2 + xyz + O(4)$
(3) (3-1) $x^2 + y^3 + O(6)$
(3-2) $x^2 + y^3 + xyz^3 + dxz^4 + O(6)$, $d \in k$
(3-3) $x^2 + y^3 + xyz^2 + dyz^4 + O(6)$
(3-4) $x^2 + y^3 + xz^3 + dyz^4 + O(6)$
(3-5) $x^2 + y^3 + xyz + O(6)$

このうち (2) からは主に $\widetilde{\mathrm{E}}_7$ 型が，(3) からは主に $\widetilde{\mathrm{E}}_8$ 型が現れることが解る．

参考文献

[Hi] M.Hirokado, *Deformations of rational double points and simple elliptic singularities in characteristic p*, Osaka Journal of Math. 41 (2004), pp605–616

[GK] G.-M.Greuel, H.Kröning, *Simple singularities in positive characteristic*, Mathematische Zeitschrift 203 (1990), pp339–354

[KM] Y.Kollár, S.Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, Cambridge University Press(1998)

[Ro] M.Roczen, *Recognition of simple singularities in positive characteristic*, Mathematische Zeitschrift 210 (1992), pp641–654

COMPUTABLE CONDITION FOR THE OCCURRENCE OF NON-UNIFORM HYPERBOLICITY IN FAMILIES OF ONE-DIMENSIONAL MAPS

HIROKI TAKAHASI

In spite of its innoccent definition, the quadratic family

$$f_a(x) = 1 - ax^2$$

can display a wide variety of dynamics which are closely intertwined. Graczyk-Świątеck proved that the set of regular parameters (corresponding to a hyperbolic periodic attractor) is open dense. Lyubich [8] proved that almost every parameter is either regular or stochastic (corresponding to an absolutely continuous invariant measure, *acim* for short). The second possibility in this dichotomy is not negligible, which had earlier been proved by Jakobson [5]. His theorem is recognized as a landmark in the study of chaotic dynamical systems, and so far quite a few different alternative proofs were given [1] [2] [6] [11] [12] [14] [15] [16] [17] [19]. However, any of these arguments tells nothing about the question: *how many parameter values corresponding to acim in the quadratic family?* We give a partial answer to this question. We develop a constructive argument closely following [6], and as a result obtain a lower estimate for the measure of the parameter set corresponding to acim near $a = 2$. Joint work with Stefano Luzzatto.

REFERENCES

[1] M. Benedicks and L. Carleson - On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$. *Ann of Math. (2)* **122** (1985) 1-25. *Ann of Math. (2)* **133**, 73–169, (1991)

[2] M. Benedicks and L. Carleson - The dynamics of the Hénon map. *Ann of Math. (2)* **133**, 73–169, (1991)

[4] J. Graczyk and G. Świątek - Generic hyperbolicity in the logistic family. *Ann of Math.* (2) **146** (1997) no.1, 1–52.

[5] M. Jakobson - Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Comm. Math. Phys.* **81** (1981), 37-74.

[6] S. Luzzatto - Bounded recurrence of critical points and Jakonson's theorem. *London Math. Soc. Lecture Note.* Ser **274** (1999), 173-210.

[7] S. Luzzatto and H. Takahasi - Computable conditions for the occurrence of non-uniform hyperbolicity in families of one-dimensional maps. preprint.

[8] M. Lyubich - Dynamics of quadratic polynomials. I, II. *Acta math.* **178** (1997), no.2, 185–247, 247–297.

[11] W. de Melo and S. van Strien - *One-dimensional dynamics.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 25. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[12] M. Rychlick - Another proof of Jakobson's theorem - *Ergodic theory Dynam Systems.* **8** (1998) no.1, 93–109.

[14] S. Senti - Dimension of weakly expanding points for quadratic maps. *Bull. Soc. Math. France* **131** (2003), no. 3, 399–420.

[15] M. Tsujii - A proof of Benedicks-Carleson-Jakobson theorem. *Tokyo J. Math.* **16** (1993), no.2, 295-310.

[16] M. Tsujii - Positive Lyapunov exponents in families of one-dimensional dynamical systems. *Invent Math.* **111** (1993), no.1, 113-137.

[17] P. Thieullen, C. Tresser, and L-S. Young - Positive Lyapunov exponent for generic one-parameter families of unimodal maps. *J. Anal. Math.* **64** (1994), 121-172.

[19] J-C. Yoccoz - Dynamiques des polynômes quadratiques. *Dynamique et géométrie complexes.* x, xii, 187–222, Soc. Math. France, Paris, 1999.

Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto, Japan
E-mail address: takahasi@math.kyoto-u.ac.jp

Counting certain imaginary quadratic fields with prescribed 2-class order

Takumi Tomita

2005年12月26日

概要

Let $I^{(2)}$ be a set of imaginary quadratic fields whose discriminant $d = pq$ and let $I_s^{(2)}$ be the subset of $I^{(2)}$ whose elements have a given 2-class order s (2-class order is the 2-order of the ideal class group of K). It is conjectured that the density of $I_s^{(2)}$ in $I^{(2)}$ has positive proportion. Using a computer, we find out a conjectual such constant explicitly. This is ture for the cases where $s = 1$ by the result of F. Gerth in [G 84]. In this talk we give a sufficient condition for the cases where $s = 2$.

1 Motivation

1984年 H. Cohen と H. W. Lenstra は論文 [C-L 84] において $\mathbf{Q}$ 上 (ここでは体は全て $\mathbf{Q}$ 上のものを考える) の n 次巡回 Galois 拡大体 K のイデアル類群[*1]の prime to p-part[*2] の分布に関し, とても興味深い予想をいくつも提出した. この講演では $p = 2$ の場合 (2次体) にのみ制限して考える. $p = 2$ であれば「巡回 Galois 拡大」という仮定は自動的に満たされる. 簡単に2次体について復習しておくと, 一般に2次体は非平方整数 m を用いて $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ [*3]と書くことができ, m が正である時は実2次体 (real quadrat ic field), m が負の時は虚2次体 (imaginary quadratic field) と呼ばれる. イデアル類群 $Cl(K)$ の prime to 2-part を $Cl(K)_{\mathrm{odd}}$ と書くことにすると

(C1) $Cl(K)_{\mathrm{odd}}$ が cyclic になる確率は

$$\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{3\zeta(6)C_\infty\eta_\infty(2)} \fallingdotseq 97.7575\ \%$$

(C2) 奇素数 p が $|Cl(K)_{\mathrm{odd}}|$ を割る確率は

$$f(3) \fallingdotseq 43.987\ \%, f(5) \fallingdotseq 23.967\ \%, f(7) \fallingdotseq 16.320\%\quad \text{etc}$$

といった $Cl(K)_{\mathrm{odd}}$ に関する様々な予想が定式化されており (詳しくは [C-L 84] 参照), これらはいずれも今だ未解決の問題である. さて, ここで Cohen-Lenstra では扱われていないイデアル類群の primary p-part[*4] はどうなるのか？という疑問がわいてくる. そこで「発見的方法 (heuristic method)」でなに

[*1] 定義は §2 で簡単に復習する, これは有限アーベル群.
[*2] p と素な元全体が作る部分群.
[*3] $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ は 1 と $\sqrt{m}$ で $\mathbf{Q}$ 上生成される $\mathbf{C}$ の部分体.
[*4] p 冪で消える元全体の作る部分群, Sylow p-部分群.

かしかの規則を求める為に虚2次体に限ってその primary 2-part をコンピューターを用いて類数の分布を調べた. そのデータを下に興味深い規則 (予想) を見つけることができたのでそのことについて報告する.

※ 虚2次体を題材に選んだ理由は, 後に述べるがその類数の表 (データ) を比較的簡単に作ることができるからである. 一般に代数体 (実2次体 or 3次以上の $\mathbf{Q}$ の有限次拡大体) の類数を (沢山) 計算する事は容易ではない.

2 イデアル類群

以下2次体 $K_m = \mathbf{Q}(\sqrt{m})$ のみを考える.

イデアル類群の定義

$$\omega := \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{m}}{2} & m \equiv 1 \pmod 4 \\ \sqrt{m} & m \equiv 2,3 \pmod 4 \end{cases}$$

とおいて $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ の部分環 $O_{K_m} := \mathbf{Z} + \mathbf{Z}w$ を K_m の整数環という ($\{1, \omega\}$ を基底とする rank 2 の自由 $\mathbf{Z}$-加群). この時 K_m の有限生成 O_{K_m}-部分加群 $\mathfrak{a}$ ($\neq 0$) を K_m の分数イデアルと呼ぶ. 分数イデアル全体は自然にアーベル群の構造を持ち[*5]それをイデアル群と呼び $\mathcal{I}_{K_m}$ と書く. 単項分数イデアル $(a) = aO_{K_m}$ 全体は $\mathcal{I}_{K_m}$ の部分群をなし, それを $\mathcal{P}_{K_m}$ と書く. K_m のイデアル類群 $Cl(K_m)$ とは商群 $\mathcal{I}_{K_m}/\mathcal{P}_{K_m}$ で定義されるものである (可換環論の初歩で習うように $\mathbf{Z}$ の全てのイデアルは一つの元から生成されるが ($\mathbf{Z}$ は PID である), O_{K_m} は一般にそうではない. $Cl(K_m)$ は O_{K_m} が PID からどのくらいずれているのかをあらわす群である). 簡単ではないがこれは有限アーベル群であることが知られており, その位数を類数とよび h_{K_m} と書く.

類数の求め方

$m < 0$ とする. 整数論では通常 K_m の類数 h_{K_m} の計算に「解析的類数公式」[*6] と呼ばれるものを使うわけであるが, その計算にはゼータ関数の特殊値を使うなど簡単にアルゴリズムを使って計算できるようなものではない. しかし2次体 K_m に関しては次のような2次形式を用いたシンプルな計算方法が知られている[*7](実際のアルゴリズムは [Co 93, Algotithm 5.3.5] 参照).

$$h(K_m) = \#\{f = ax^2 + bxy + cy^2 \in \mathbf{Z}[x,y] \mid (\text{条件})\}$$

条件は以下:

(i) $b^2 - 4ac = D_{K_m}$
(ii) $a > 0$
(iii) $|b| \leq a \leq c$ (但し $b \geq 0$ if $a = |b|$ or $a = c$)
(iv) $|b| \leq a \leq \sqrt{|D_{K_m}|/3}$

[*5] その単位元は $(1) = O_{K_m}$, $\mathfrak{a}$ の逆元は $\mathfrak{a}^{-1} := \{x \in K_m \mid x\mathfrak{a} \subset O_{K_m}\}$.
[*6] 「解析的類数公式」は2次体とは限らないより一般の代数体の公式.
[*7] Gauss の2次形式の理論に基づく.

※ D_{K_m} は K_m の判別式. 即ち

$$D_{K_m} = \begin{cases} m & \text{if } m \equiv 1 \pmod 4 \\ 4m & \text{if } m \equiv 2,3 \pmod 4 \end{cases}$$

とする.

例えば $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-119})$ の時, $-119 \equiv 1 \pmod 4$ なので $D_K = -119$. この時条件 (i)-(iv) を満たす (a,b,c) の組は $(1,1,30),(2,\pm 1,15),(3,\pm 1,10),(4,\pm 3,8),(5,\pm 1,6),(6,5,6)$ の 10 個. 従って $h_K = 10$.

3 実験結果と予想

§1 でも断ったように, 以下では虚2次体のみ考えることにする. 虚2次体 $K_m = \mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ (m は非平方数) に対して $Cl(K_m)$ を K_m のイデアル類群とする. A_{K_m} を $Cl(K_m)$ の primary 2-part (i. e. Sylow 2-subgroup) とし, $Cl(K_m)$, A_{K_m} の位数を それぞれ $h(K_m), h_2(K_m)$ とする. 任意の正整数 t (ramification number) と非負整数 s (2-calss order) と正の実数 x に対して次のような記号を用意する:

$$\begin{aligned} I^{(t)} &:= \{K_m \mid \text{exactly } t \text{ primes ramigy in } K_m/\mathbf{Q}\} \\ I^{(t)}(x) &:= \{K_m \in I^{(t)} \mid m \le x\} \\ I_s^{(t)} &:= \{K_m \in I^{(t)} \mid \mathrm{ord}_2(h_2(K_m)) = s\} \\ I_s^{(t)}(x) &:= \{K_m \in I^{(t)s} \mid m \le x\} \end{aligned}$$

※ ramification number t は 判別式 D_{K_m} の異なる素因子の数.

※ 2-class order $\mathrm{ord}_2(*) = s$ は $*$ を素因数分解した時の 2 の冪の個数をあらわす. 例えば $\mathrm{ord}_2(40) = \mathrm{ord}_2(2^3 \cdot 5) = 3$, $\mathrm{ord}_2(7/32) = \mathrm{ord}_2(2^{-5} \cdot 7) = -5$ など.

定義 3.1.

$$\begin{aligned} d_s^{(t)}(x) &:= \frac{|I_s^{(t)}(x)|}{|I^{(t)}(x)|} \\ d_s^{(t)} &:= \lim_{x \to \infty} d_s^{(t)}(x) \end{aligned}$$

先のアルゴリズムを用いて $d_s^{(t)}(x)$ を $x \le 10^7$ の範囲で (10000 を 1 メモリとしてインプット) グラフ化したものが図 1 である[*8]. この図より $t = 2$ の場合次のような予想を立てることができる:

予想 3.2.

$$d_s^{(2)} = \frac{1}{2^s}$$

この予想は次と同値である:

予想 3.3.

$$|I_s^{(2)}(x)| \sim \frac{1}{2^{s+1}} \frac{x \log\log x}{\log x}$$

[*8] (Benchmark) この単純なアルゴリズムを用いて $x \le 10^7$ までの表 (図 1) を作るのに Pentium 4 CPU 3.00GHz マシンでおよそ 70h かかる (プログラムには C を用いた).

※ $f(x) \sim g(x)$ とは $f(x)/g(x) \to 1$ $(x \to \infty)$ であることをいう. 例えば $1+x \sim x$, $\sin(x) \sim x$ など.

この予想に関して F. Gerth 氏による次のような結果 $(s=1)$ がある:

定理 3.4. [G 84, Proposition 2.1.]

$$d_1^{(2)} = 1/2$$

詳しくは述べられないが, Gerth 氏のこの定理に関する証明の主要部分は, 定理の十分条件として, 次の Legendre symbol の和に関する評価式を証明することである:

命題 3.5 (F. Gerth). p, q を $p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$ なる奇素数とする. この時

$$\sum_{pq \leq x} \left(\frac{q}{p}\right) = o\left(\frac{x \log\log x}{\log^2 x}\right)$$

が成り立つ.

※ 一般に整数 a, b に対して

$$\left(\frac{a}{b}\right)_n := \begin{cases} 1 & \text{if } x^n \equiv a \pmod b \text{ が解を持つ} \\ -1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める. 特に $n=2$ の時は Legendre Symbol と呼ばれ, 下付の添え字を省略する.

※ $f(x) = o(g(x))$ とは $f(x)/g(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ であることをいう. 例えば $x = o(x^2)$, $\sin(x) = o(x)$ など.

同様の議論を高次の s (≥ 2) に拡張しようとすると, 一般には予想の十分条件として上のような指標和の評価式のようなきれいな条件を書くことができないが, $s=2$ の場合は 2 次の diophantus 方程式 $ax^2 + by^2 = z^2$ の可解性に関する Legendre の定理などを用いることによって, 4 乗剰余記号を用いて次のような十分条件を得ることができる (cf [B 04]):

定理 3.6. 次の 2 つの評価式

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{pq \leq x} \left(\frac{-q}{p}\right)_4 = o\left(\frac{1}{2}\frac{x(\log\log x)}{\log x}\right) \\ \displaystyle\sum_{pq \leq x} \left(\frac{-q}{p}\right)_4 \left(\frac{q}{p}\right) = o\left(\frac{1}{2}\frac{x(\log\log x)}{\log x}\right) \end{cases}$$

が正しければ $d_2^{(2)} = 1/4$ となる.

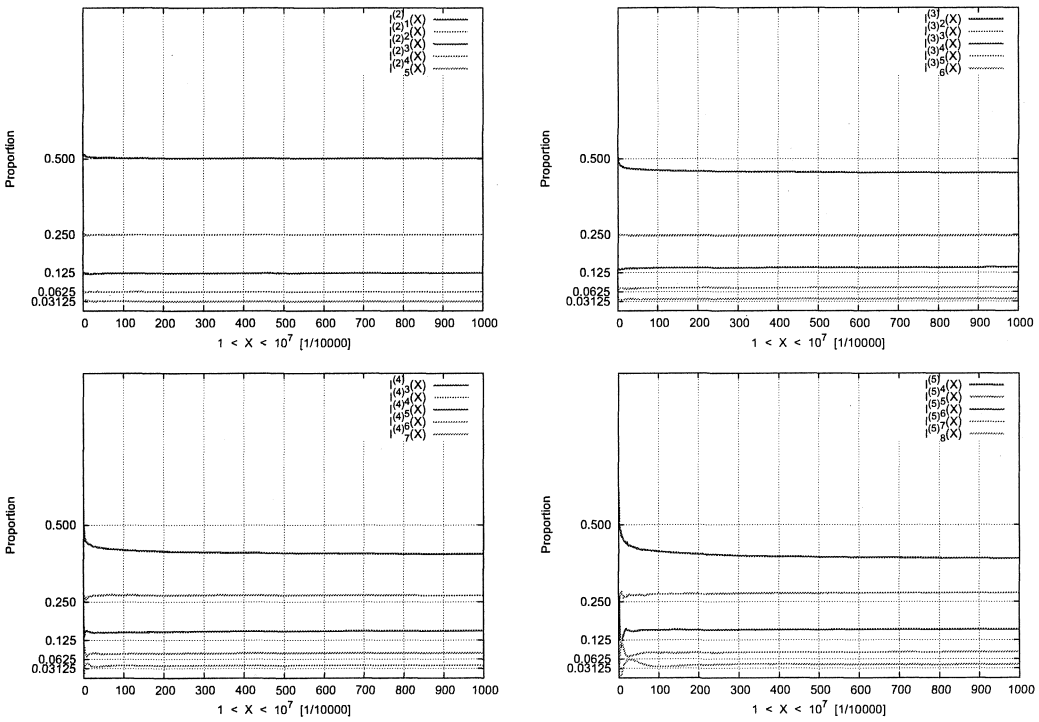


図 1　$d_s^{(t)}(10000x)$ のグラフ

$$
\begin{array}{ll}
I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, I_3^{(2)}, I_4^{(2)}, I_5^{(2)} & \rightarrow(\text{左上}) \\
I_2^{(3)}, I_3^{(3)}, I_4^{(3)}, I_5^{(3)}, I_6^{(3)} & \rightarrow(\text{右上}) \\
I_3^{(4)}, I_4^{(4)}, I_5^{(4)}, I_6^{(4)}, I_7^{(4)} & \rightarrow(\text{左下}) \\
I_4^{(5)}, I_5^{(5)}, I_6^{(5)}, I_7^{(5)}, I_8^{(5)} & \rightarrow(\text{右下})
\end{array}
$$

※ [G 84] より $d_1^{(2)} = 0.5, d_2^{(3)} = 0.4375, d_3^{(4)} = 0.375, d_4^{(5)} = 0.350586$ が知られている.

参考文献

[B 04] J. M. Basilla, *The quadratic fields with discriminant divisible by exactly two primes and with "narrow" class number divisible by 8.*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 80 (2004), no. 10, pp. 187–190 (2005).

[C-L 84] H. Cohen and H. W. Lenstra, *Heuristics on class groups of number fields.*, Lecture Notes in Math., 1068, Springer, Berlin, 1984, pp. 33-62.

[Co 93] H. Cohen, *A course in computational algebraic number theory.*, Graduate Texts in Mathematics, 138. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[G 84] F. Gerth III, *The 4-class ranks of quadratic fields.*, Invent. Math. 77 (1984), no. 3, pp. 489–515.

Sobolev's imbedding theorem in the limiting case with Lorentz space and BMO

Hideo Kozono, Kouei Minamidate, Hidemitsu Wadade

Mathematical Institute, Tohoku University, 980-8578, Sendai, Japan

We consider the Gagliardo-Nirenberg type inequality in $\mathbb{R}^n$. Let Ω be an arbitrary domain in $\mathbb{R}^n$. It is well known that the Sobolev space $H_0^{n/p,p}(\Omega), 1 < p < \infty$, is continuously embedded into $L^q(\Omega)$ for all q with $p \leqq q < \infty$. However, we cannot take $q = \infty$ in such an embedding. When $\Omega = \mathbb{R}^n$, Ogawa [11] and Ogawa-Ozawa [12] treated the Hilbert space $H^{n/2,2}(\mathbb{R}^n)$ and then Ozawa [15] gave the following general embedding theorem in the Sobolev space $H^{n/p,p}(\mathbb{R}^n)$ of the fractional derivatives which states that

$$\|\Phi_p(\alpha|u|^{p'})\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqq C\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{0.1}$$

holds for all $u \in H^{n/p,p}(\mathbb{R}^n)$ with $\|(-\Delta)^{n/(2p)}u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqq 1$, where

$$\Phi_p(\xi) := \exp(\xi) - \sum_{j=0}^{j_p-1} \frac{\xi^j}{j!} = \sum_{j=j_p}^{\infty} \frac{\xi^j}{j!}, \quad j_p := \min\{j \in \mathbb{N} \mid j \geqq p-1\}.$$

The advantage of (0.1) gives the scale invariant form. In order to prove the above Trudinger type inequality, Ozawa [15] showed the following Gagliardo-Nirenberg type interpolation inequality which is equivalent to (0.1). For $1 < p < \infty$, there is a constant M depending only on n and p such that

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqq Mq^{1/p'}\|u\|^{p/q}_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|(-\Delta)^{n/(2p)}u\|^{1-p/q}_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{0.2}$$

holds for all $u \in H^{n/p,p}(\mathbb{R}^n)$ and for all q with $p \leqq q < \infty$. Our goals are the generalizations of (0.2) to the Gagliardo-Nirenberg type interpolation inequality with the Lorentz space and BMO. We shall state main theorems below.

Theorem 0.1. *Let $1 < p_1 < \infty$.*
(i) *There exists a constant C_{n,p_1} depending only on n and p_1 such that*

$$\|u\|_{L^q} \leqq C_{n,p_1}\, q^{1/r_2'}\|u\|^{p_1/q}_{L(p_1,p_2)}\|(-\Delta)^{n/(2r_1)}u\|^{1-p_1/q}_{L(r_1,r_2)} \tag{0.3}$$

holds for all $u \in L(p_1, p_2)$ *with* $(-\Delta)^{n/(2r_1)}u \in L(r_1, r_2)$, *where* p_2, q, r_1 *and* r_2 *are any numbers satisfying* $1 \leqq p_2 \leqq p_1 \leqq q < \infty$, $p_1 \leqq r_1 < \infty$ *and* $1 < r_2 < \infty$.

(ii) *There exists a constant* C_{n,p_1} *depending only on* n *and* p_1 *such that*

$$\|u\|_{L^q} \leqq C_{n,p_1} \frac{q^2}{q-p_1} \|u\|_{L(p_1,\infty)}^{p_1/q} \|(-\Delta)^{n/(2r_1)}u\|_{L(r_1,\infty)}^{1-p_1/q} \tag{0.4}$$

holds for all $u \in L(p_1, \infty)$ *with* $(I-\Delta)^{n/(2r_1)}u \in L(r_1, \infty)$, *where* q *and* r_1 *are any numbers satisfying* $p_1 < q < \infty$ *and* $p_1 \leqq r_1 < \infty$.

We note that when we put $p_1 = p_2 = r_1 = r_2 =: p \in (1, \infty)$ in (0.3), we can obtain (0.2) proved by Ozawa [15] immediately. Moreover, from Corollary 0.1, we obtain the Trudinger type inequalities equivalent to (0.3) and (0.4) as follows :

Corollary 0.1. *Let* $1 < p_1 < \infty$.

(i) *For every* $1 < r_2 < \infty$, *there exists a constant* C_{n,p_1,r_2} *depending only on* n, p_1 *and* r_2 *such that the following holds. For arbitrary* $0 < \alpha < C_{n,p_1,r_2}$, *there exists a constant* $\tilde{C}_{n,p_1,r_2,\alpha}$ *depending only on* n, p_1, r_2 *and* α *such that*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{p_1,r_2}\left(\alpha\left(\frac{|u(x)|}{\|(-\Delta)^{n/(2r_1)}u\|_{L(r_1,r_2)}}\right)^{r_2'}\right)dx \leqq \tilde{C}_{n,p_1,r_2,\alpha}\left(\frac{\|u\|_{L(p_1,p_2)}}{\|(-\Delta)^{n/(2r_1)}u\|_{L(r_1,r_2)}}\right)^{p_1} \tag{0.5}$$

holds for all $u \in L(p_1, p_2) \setminus \{0\}$ *with* $(-\Delta)^{n/(2r_1)}u \in L(r_1, r_2)$, *where* p_2, r_1 *are any numbers satisfying* $1 \leqq p_2 \leqq p_1$, $p_1 \leqq r_1 < \infty$ *and* Φ_{p_1,r_2} *is defined by*

$$\Phi_{p_1,r_2}(\xi) := \sum_{\substack{r_2' j \geqq p_1 \\ j \in \mathbb{N}}} \frac{\xi^j}{j!} \qquad \text{for } \xi \in \mathbb{R}.$$

(ii) *There exists a constant* C_{n,p_1} *depending only on* n *and* p_1 *such that the following holds. For arbitrary* $0 < \alpha < C_{n,p_1}$, *there exists a constant* $\tilde{C}_{n,p_1,\alpha}$ *depending only on* n, p_1 *and* α *such that*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Phi}_{p_1}\left(\alpha \frac{|u(x)|}{\|(-\Delta)^{n/(2r_1)}u\|_{L(r_1,\infty)}}\right)dx \leqq \tilde{C}_{n,p_1,\alpha}\left(\frac{\|u\|_{L(p_1,\infty)}}{\|(-\Delta)^{n/(2r_1)}u\|_{L(r_1,\infty)}}\right)^{p_1} \tag{0.6}$$

holds for all $u \in L(p_1, \infty) \setminus \{0\}$ *with* $(I-\Delta)^{n/(2r_1)}u \in L(r_1, \infty)$ *and for all* $p_1 \leqq r_1 < \infty$, *where* $\tilde{\Phi}_{p_1}$ *is defined by*

$$\tilde{\Phi}_{p_1}(\xi) := \sum_{\substack{j > p_1 \\ j \in \mathbb{N}}} \frac{\xi^j}{j!} \qquad \text{for } \xi \in \mathbb{R}.$$

In fact, noting the definition of Φ_{p_1,r_2}(or $\tilde{\Phi}_{p_1}$), we exchange the integral of (0.5)(or (0.6)) for the sum, and then by applying (0.3)(or (0.4)) for each integral, we have the Trudinger type inequality.
By putting $q_1 = q_2$ in Theorem 0.2, we have the following Corollary 0.2.

Theorem 0.2. (i) *For every* $1 \leqq p_1 < \infty$, *there exists a constant* C_{n,p_1} *depending only on* n *and* p_1 *such that*

$$\|u\|_{L^q} \leqq C_{n,p_1}\, q\, \|u\|^{p_1/q}_{L(p_1,p_2)} \|u\|^{1-p_1/q}_{BMO} \tag{0.7}$$

holds for all $u \in L(p_1,p_2) \cap BMO$, *where* p_2 *and* q *are any numbers satisfying* $1 \leqq p_2 \leqq p_1 \leqq q < \infty$.
(ii) *For every* $1 < p_1 < \infty$, *there exists a constant* C_{n,p_1} *depending only on* n *and* p_1 *such that*

$$\|u\|_{L^q} \leqq C_{n,p_1} \frac{q^2}{q-p_1} \|u\|^{p_1/q}_{L(p_1,\infty)} \|u\|^{1-p_1/q}_{BMO} \tag{0.8}$$

holds for all $u \in L(p_1,\infty) \cap BMO$ *and for all* $p_1 < q < \infty$.

Moreover, from Corollary 0.2, we obtain the Trudinger type inequalities equivalent to (0.7) and (0.8) as follows :

Corollary 0.2. (i) *For every* $1 \leqq p_1 < \infty$, *there exists a constant* C_{n,p_1} *depending only on* n *and* p_1 *such that the following holds. For arbitrary* $0 < \alpha < C_{n,p_1}$, *there exists a constant* $\tilde{C}_{n,p_1,\alpha}$ *depending only on* n, p_1 *and* α *such that*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{p_1}\left(\alpha \frac{|u(x)|}{\|u\|_{BMO}}\right) dx \leqq \tilde{C}_{n,p_1,\alpha} \left(\frac{\|u\|_{L(p_1,p_2)}}{\|u\|_{BMO}}\right)^{p_1}$$

holds for all $u \in L(p_1,p_2) \cap BMO \setminus \{0\}$ *and for all* $1 \leqq p_2 \leqq p_1$, *where* Φ_{p_1} *is defined by*

$$\Phi_{p_1}(\xi) := \sum_{\substack{j \geqq p_1 \\ j \in \mathbb{N}}} \frac{\xi^j}{j!} \qquad \text{for } \xi \in \mathbb{R}.$$

(ii) *For every* $1 < p_1 < \infty$, *there exists a constant* C_{n,p_1} *depending only on* n *and* p_1 *such that the following holds. For arbitrary* $0 < \alpha < C_{n,p_1}$, *there exists a constant* $\tilde{C}_{n,p_1,\alpha}$ *depending only on* n, p_1 *and* α *such that*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Phi}_{p_1}\left(\alpha \frac{|u(x)|}{\|u\|_{BMO}}\right) dx \leqq \tilde{C}_{n,p_1,\alpha} \left(\frac{\|u\|_{L(p_1,\infty)}}{\|u\|_{BMO}}\right)^{p_1}$$

holds for all $u \in L(p_1,\infty) \cap BMO \setminus \{0\}$, *where* $\tilde{\Phi}_{p_1}$ *is defined by*

$$\tilde{\Phi}_{p_1}(\xi) := \sum_{\substack{j > p_1 \\ j \in \mathbb{N}}} \frac{\xi^j}{j!} \qquad \text{for } \xi \in \mathbb{R}.$$

Finally, we shall state the application to the Brezis-Gallouet-Wainger type inequality. In fact, from Corollary 0.1 (i), we can obtain the inequality as follows :

Theorem 0.3. *For every* $1 < p_1 < \infty$, $1 \leqq q \leqq \infty$ *and* $n/q < m < \infty$, *there exists a constant* $C_{n,p_1,q,m}$ *depending only on* n, p_1, q *and* m *such that*

$$\|u\|_{L^\infty} \leqq C_{n,p_1,q,m}\Big[1+\big(\|u\|_{L(p_1,p_2)}+\|(-\Delta)^{n/(2r_1)}u\|_{L(r_1,r_2)}\big) \times \big(\log(e+\|(-\Delta)^{m/2}u\|_{L^q})\big)^{1/r_2'}\Big] \tag{0.9}$$

holds for all $u \in L(p_1,p_2)$ *with* $(-\Delta)^{n/(2r_1)}u \in L(r_1,r_2)$ *and* $(-\Delta)^{m/2}u \in L^q$, *where* p_2, r_1 *and* r_2 *are any numbers satisfying* $1 \leqq p_2 \leqq p_1 \leqq r_1 < \infty$ *and* $1 \leqq r_2 < \infty$.

we note that the inequality with $p_1 = p_2 = r_1 = r_2 =: p \in (1,\infty)$ in (0.9) coincides with the classical Brezis-Gallouet-Wainger inequality.

References

[1] S.Adachi and K.Tanaka, *A scale-invariant form of Trudinger-Moser inequality and its best exponent,* Proc.Amer.Math.Soc. **1102** (1999), 148-153.

[2] D.R.Adams, *A sharp inequality of J.Moser for higher order derivatives,* Ann. of Math. **128** (1988), 385-398.

[3] J.Almgren, J.Frederick and E.H.Lieb, *Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous,* J.Amer.Math.Soc. **2** (1989), 683-773.

[4] C.Bennett and R.Sharpley, *Interpolation of Operators,* Academic Press,Inc, New York, 1988.

[5] H.J.Brascamp and E.H.Lieb, *A general rearrangement inequality for multiple integrals,* J.Funct.Anal. **17** (1974), 227-237.

[6] D.Gilbarg and N.S.Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* Springer-Verlag, New York, 1977.

[7] G.Hardy, J.Littlewood and G.Pólya, *Inequalities,* The University Press,Cambridge,1959.

[8] H.KOMATSU, *Fourier Analysis*, Iwanami Shoten,1978 (in Japanese).

[9] E.H.LIEB, *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities,* Ann. of Math. **118** (1983), 349-374.

[10] J.MOSER, *A sharp form of an inequality by N.Trudinger,* Indiana Univ. Math.J. **20** (1971), 1077-1092.

[11] T.OGAWA,*A proof of Trudinger's inequality and its application to nonlinear Schrödinger equation*, Nonlinear Anal. **14** (1990), 765-769.

[12] T.OGAWA AND T.OZAWA, *Trudinger type inequalities and uniqueness of weak solutions for the nonlinear Schrödinger mixed problem,*, J. Math. Anal.Appl. **155** (1991), 531-540.

[13] R.O'NEIL, *Convolution operators and $L(p,q)$spaces*, Duke Math. J. **30** (1963),129-142.

[14] T.OZAWA, *Characterization of Trudinger's inequality,* J.Inequal.Appl. **1** (1997), 369-374.

[15] T.OZAWA, *On critical cases of Sobolev's inequalities,* J.Funct.Anal. **127** (1995), 259-269.

[16] E.M.STEIN, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton U. Press, Princeton, N.J., 1970.

[17] E.M.STEIN AND G.WEISS, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton U. Press, Princeton, N.J. 1971.

[18] G.TALENTI, *Best constant in Sobolev inequality,* Ann.Mat.Pura Appl. **110** (1976), 353-372.

[19] N.S.TRUDINGER, *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications,* J.Math.Mech. **17** (1967), 473-483.

On the isomorphism problem of Coxeter groups and related topics

Koji Nuida[1]

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo
E-mail: nuida@ms.u-tokyo.ac.jp

At the conference the author gives a talk which surveys the definition, history and preceding results on the isomorphism problem of Coxeter groups (problem of deciding which Coxeter groups are isomorphic), together with backgrounds for Coxeter groups, applications of this problem and some related topics in the theory of Coxeter groups, including the author's recent works. The author would like to express his gratitude to the conference organizers for giving the opportunity.

1 Introduction

Isomorphism problem of groups Let $\mathcal{C}$ be any class of groups. The *isomorphism problem* of groups in the class $\mathcal{C}$ is the problem of deciding which groups in $\mathcal{C}$ are isomorphic with each other, preferably in terms of their presentations (of certain special types relevant to $\mathcal{C}$) by generators and fundamental relations. (More generally, this problem often involves the study of properties of the set of all isomorphisms, or of individual isomorphisms, between these groups.) The isomorphism problem in $\mathcal{C}$ is called *solvable* if there exists an algorithm which decides whether given two groups in $\mathcal{C}$ are isomorphic or not; otherwise it is called *unsolvable*.

The isomorphism problem of groups (with finitely many generators and fundamental relations) was investigated in a relation to the homeomorphism problem of manifolds (problem of deciding which manifolds are homeomorphic). In another direction, this problem is also related to the "halting problem of Turing machines" through the "word problem of groups". It is known that the halting problem is reduced to the word problem, which is reduced to the isomorphism problem, which is reduced to the homeomorphism problem. Since the halting problem is unsolvable, it follows that all of the other three problems, including the isomorphism problem, are unsolvable as well (see e.g. [Sti93, Chapter 9] for details).

Coxeter groups A pair (W, S) of a group W and its generating set S is called a *Coxeter system* if W admits the following presentation

$$W = \langle S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \text{ for all } s, t \in S \text{ such that } m(s,t) < \infty \rangle$$

[1]supported by JSPS Research Fellowship (No. 16-10825)

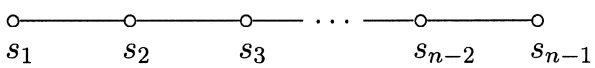
where the $m(s,t) \in \{1,2,\dots\} \cup \{\infty\}$ are symmetric in $s,t \in S$, and $m(s,t) = 1$ if and only if $s = t$. A *Coxeter group* signifies a group W having a generating set S such that (W,S) is a Coxeter system. (Several basic definitions and facts for Coxeter groups are well summarized in a book [Hum90].) Some examples of Coxeter groups will be given later. Note that, in this abstract, *we do not assume that the set S is finite* unless otherwise specified.

The theory of Coxeter groups was born from a study of finite (real) reflection groups given by H. S. M. Coxeter [Cox34, Cox35]. Although the Coxeter groups arised originally from the above geometric aspect of mathematics, Coxeter groups and their related objects (root systems, Bruhat order, Hecke algebras, etc.) now appear not only in geometry, but also in various areas of mathematics (such as representation theory, group theory and combinatorics). This is probably one of the main reasons why Coxeter groups (including their special cases; e.g. Weyl groups) have been investigated so well (and another reason would be the beauty of the theory of Coxeter groups itself).

An individual Coxeter group W (with generating set S) is usually determined in terms of the *Coxeter graph* Γ; that is a simple undirected graph (graph without loops, multiple edges and edge orientation) with vertex set S in which two vertices $s,t \in S$ are joined by an edge with label $m(s,t)$ if and only if $m(s,t) \geq 3$. Some examples of Coxeter groups and Coxeter graphs are given in Figures 1 and 2 (as in these figures, the label '3' of an edge is omitted by convention when drawing a picture). It is easy to see that the (restricted) direct product of Coxeter groups corresponds to the disjoint union of their Coxeter graphs. The following theorem implies that the Coxeter systems (W,S) are in one-to-one correspondence with the Coxeter graphs (up to isomorphism).

Theorem 1 (see [Hum90, Proposition 5.3]) *For $s,t \in S$, the $m(s,t)$ in the above definition is precisely the order of st in W.*

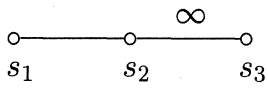
Figure 1: Coxeter graph of the symmetric group S_n



The symmetric group S_n of degree n is a finite Coxeter group. Here s_i denotes the adjacent transposition $(i\ \ i+1)$.

The isomorphism problem of Coxeter groups can be restated as the problem of deciding which Coxeter graphs define isomorphic Coxeter groups. This is indeed a nontrivial problem: it is a classical example that the following two Coxeter groups, the dihedral group $\mathcal{D}_6$ of order 12 (where the generators are two reflections in adjacent mirrors of symmetry of a regular

Figure 2: Coxeter graph of $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Z}) = \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$



$\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Z})$ is also a Coxeter group.

Here $s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $s_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $s_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

hexagon) and the direct product $S_2 \times S_3$ of two symmetric groups (cf. Figure 1), are isomorphic as abstract groups though the two Coxeter graphs are not isomorphic. Although the isomorphism problem is not necessarily solvable as is seen above, it is believed that the problem for Coxeter groups (at least the finitely generated ones) is solvable, because of the simplicity of the presentations of Coxeter groups.

2 History

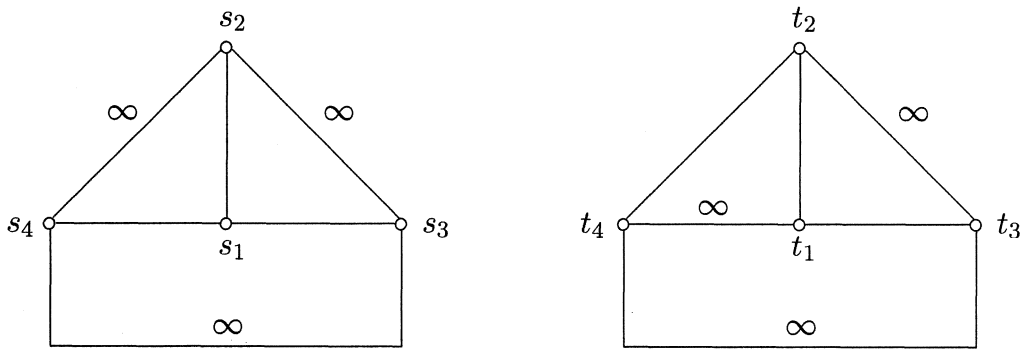
Now we survey the history of the isomorphism problem of Coxeter groups.

The study of the isomorphism problem of Coxeter groups began with the classification of the finite irreducible Coxeter groups in terms of their Coxeter graphs, given by Coxeter [Cox35] in 1935 (see also [Hum90, Chapter 2]). Here an *irreducible* Coxeter group signifies the one with connected Coxeter graph (note that this notion depends on the choice of the generating set S of the Coxeter group, but we abuse the terminology unless an ambiguity occurs). By Coxeter's result, it follows that two connected Coxeter graphs are isomorphic whenever these define isomorphic *finite* Coxeter groups. After his work, the structure of finite Coxeter groups have been well described; many of the researches arised from relationship to the theory of finite simple groups or of finite-dimensional semisimple Lie algebras.

In contrast with the development of the whole theory of Coxeter groups, the isomorphism problem had not been studied so actively during half a century after the above Coxeter's work. Then, in 1991, A. M. Cohen proposed in his lecture note [Coh91, Problem 6.5] a question whether two connected Coxeter graphs defining isomorphic Coxeter groups are always isomorphic; in other words, whether the isomorphism problem of *irreducible* Coxeter groups is trivial. Cohen's question had been left open in almost 10 years; in 2000, a one-page paper of B. Mühlherr [Muh00] answers to this question in the negative, by exhibiting an explicit counterexample (Figure 3). The author guesses that this result was a breakthrough for the problem.

On the other hand, the problem restricted to several subclasses of Coxeter groups are also observed in this decade. First, R. Charney and M. Davis gave the following result in a geometric point of view; here we say that a

Figure 3: Mühlherr's counterexample



These non-isomorphic graphs define isomorphic groups via an isomorphism $s_i \mapsto t_i$ $(1 \leq i \leq 3)$, $s_4 \mapsto t_2t_1t_4t_1t_2$.

subset I of the generating set S of a Coxeter group W is of *finite type* if the subgroup $W_I = \langle I \rangle$ of W generated by I (such a subgroup is called a *parabolic subgroup*) is finite.

Theorem 2 ([CD00, Main theorem]) *Let W be a finitely generated Coxeter group. Suppose that W is capable of acting effectively, properly and cocompactly on some contractible manifold. Then the Coxeter graph defining Coxeter groups isomorphic to W is unique up to isomorphism.*

This theorem says that the isomorphism problem of Coxeter groups of this type is trivial. It is also mentioned in [CD00] that all affine Coxeter groups satisfy this condition, and that the condition is equivalent to a certain homological property of the simplicial complex consisting of the subsets $I \subset S$ of finite type.

Some other subclasses are introduced by restricting the values of the order $m(s,t)$. A Coxeter group is called *right-angled* if $m(s,t) \in \{2, \infty\}$; *skew-angled* if $m(s,t) \neq 2$; *even* if $m(s,t)$ is either even or infinite; and 2-*spherical* if $m(s,t) < \infty$. The isomorphism problem of finitely generated Coxeter groups in these classes is well studied; see [Rad03], [MW02], [Bah05], and [Muh05], respectively. In particular, these results give certain conditions for the Coxeter graph of a Coxeter group in each class to be unique (up to isomorphism).

3 Toward the complete solution – finitely generated case

Owing to the recent development of this area, the isomorphism problem of finitely generated Coxeter groups is almost solved. The outline summarized here is found in Mühlherr's recent preprint [Muh05].

For a Coxeter system (W, S), a *reflection* in W with respect to S is an element of W conjugate to some element of S. The set of these reflections is denoted by S^W. These elements play an important role in the argument. Moreover, for a Coxeter graph Γ, let $(W(\Gamma), S(\Gamma))$ denote the Coxeter system corresponding to Γ.

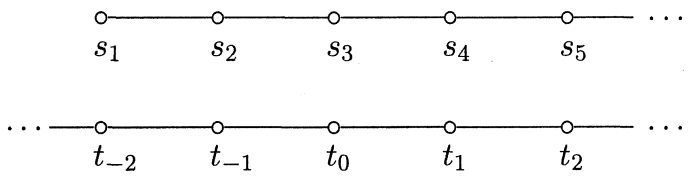
First we consider the reflection-preserving isomorphisms between Coxeter groups; namely, isomorphisms which send any reflection in one of the Coxeter groups to a reflection in the other. In [BMMN02], the four authors in that paper proposed the following important conjecture.

Conjecture 3 ([BMMN02, Conjecture 8.1]) *Let Γ and Γ' be two finite Coxeter graphs. Suppose that $W(\Gamma)$ and $W(\Gamma')$ are isomorphic via a reflection-preserving isomorphism. Then Γ would be convertible to Γ' by using finitely many certain specific operations, called "diagram twistings" (see* [BMMN02, Definition 4.4] *for their definition).*

For example, this conjecture is proved for finitely generated skew-angled Coxeter groups [MW02]. Note that the finiteness of the Coxeter graphs is not assumed in the original conjecture, but a counterexample exists when infinite graphs are allowed, as follows.

Example 4 *The infinite symmetric group $S_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ is a non-finitely generated Coxeter group, with two Coxeter graphs given in Figure 4. These two Coxeter graphs (and the identity map on S_∞) satisfy the hypothesis of Conjecture 3 except the finiteness, but it can be shown that these graphs are not convertible to each other by diagram twistings.*

Figure 4: Two Coxeter graphs of infinite symmetric group S_∞



The s_i are (1 2), (2 3), (3 4), (4 5), (5 6), ...,
the t_i are ..., (5 3), (3 1), (1 2), (2 4), (4 6), ...

Secondly, we reduce the problem for finitely generated Coxeter groups to the above reflection-preserving case, by using some "elementary transformations" acting on Coxeter graphs. These transformations, introduced in [Muh05], preserve (the isomorphism class of) the Coxeter group which the Coxeter graph defines, and the corresponding group isomorphisms are constructed explicitly. Then Mühlherr [Muh05] showed that for two finite Coxeter graphs Γ and Γ' and an isomorphism $f : W(\Gamma) \to W(\Gamma')$, there

exist combinations φ and φ' of some elementary transformations, with corresponding group isomorphisms g_φ and $g_{\varphi'}$, such that $g_\varphi \circ f \circ g_{\varphi'} : W(\varphi(\Gamma)) \to W(\varphi'(\Gamma'))$ is reflection-preserving. This means the following:

Theorem 5 (see [Muh05]) *The isomorphism problem of finitely generated Coxeter groups is reduced to Conjecture 3.*

4 On non-finitely generated Coxeter groups

We have seen in the previous section that the isomorphism problem of finitely generated Coxeter groups is almost solved. On the other hand, the problem for non-finitely generated Coxeter groups is much more difficult than the finitely-generated case, as Example 4 suggests. Indeed, it is crucial in most of the preceding arguments for finitely-generated case that a maximal finite subgroup containing a given element always exists in these cases; however, this property is not assured in general case. (Note that the preceding arguments still work in certain cases; see [MW02] and [Bah05] for instance.)

Some recent works of the author investigate the isomorphism problem for general Coxeter groups in different approaches; namely, by applying the structure of centralizers of some subgroups. The first result means that our problem is reduced to the isomorphism problem of infinite irreducible Coxeter groups. Here W_{fin} denotes the product of all finite irreducible components of a Coxeter group W, called the *finite part* of W.

Theorem 6 (see [Nui05-4, Theorem 3.4]) *The combination of the following two objects – the isomorphism class of the finite part W_{fin} and the multiset of isomorphism classes of the infinite irreducible components of W – is a complete invariant of isomorphism classes of Coxeter groups W.*

One of the main tools of the proof is a complete description of the centralizer of any normal subgroup of a Coxeter group which is generated by involutions; see [Nui05-4] for details.

The second result is on the reflection-independence condition for general Coxeter groups. Here a Coxeter group W is called *reflection-independent* if any isomorphism from W to another Coxeter group is reflection-preserving; or equivalently, the set S^W of reflections in W is uniquely determined by W only, independently on the choice of S. Moreover, for $s \in S$, let $W^{\perp s}$ be the subgroup of W generated by all reflections other than s itself which commute with s. It is shown that such a subgroup $W^{\perp s}$ is also a Coxeter group (see [Deo89] or [Dye90]); let ${W^{\perp s}}_{\mathrm{fin}}$ denote the finite part of $W^{\perp s}$.

Theorem 7 ([Nui05-1, Theorem 3.7]) *Suppose that, for any $s \in S$, the finite part ${W^{\perp s}}_{\mathrm{fin}}$ is either trivial or generated by a single reflection conjugate to s. Then W is reflection-independent.*

The explicit structure of these $W^{\perp s}{}_{\mathrm{fin}}$ is determined in [Nui05-2] by using a result of the author on the structure of centralizers of parabolic subgroups [Nui05-3]. As an immediate consequence of Theorem 7 and the result in [Nui05-2] mentioned above, we have the following:

Corollary 8 (see [Nui05-2]) *Suppose that an infinite irreducible Coxeter group W satisfies one of the two conditions:*

- *W is 2-spherical (see Section 2 for terminology);*
- *W is "odd-connected" (that is, all generators $s \in S$ are conjugate).*

Then W is reflection-independent.

For example, the infinite symmetric group S_∞ is reflection-independent. By using this result, it follows that any generating set of S_∞ as a Coxeter group is conjugate to one of the two generating sets given in Example 4, so the two Coxeter graphs are all the ones which define S_∞.

5 Related topics and applications

It is also shown in [Nui05-4, Theorem 3.3] that an infinite irreducible (not necessarily finitely-generated) Coxeter group is always directly indecomposable as an abstract group (see also [Par04] for finitely-generated cases). This result is indeed used in the proof of Theorem 6. Moreover, a relation between the structure of the automorphism groups of Coxeter groups and their irreducible components is also studied in [Nui05-4].

Although many worthy observations are obtained in the researches of the isomorphism problem, no direct applications of the (partial) solutions of the problem have been known yet. The author guesses that one of the hopeful directions will be a study of effects of isomorphisms between Coxeter groups to their associated objects, such as Bruhat orders and Hecke algebras, by using a decomposition into "elementary transformations". This will be done in a future research.

References

[Bah05] P. Bahls, *The Isomorphism Problem in Coxeter Groups*, Imperial Coll. Press, London, 2005.

[BMMN02] N. Brady, J. P. McCammond, B. Mühlherr, W. D. Neumann, *Rigidity of Coxeter groups and Artin groups*, Geom. Dedicata 94 (2002) 91–109.

[CD00] R. Charney, M. Davis, *When is a Coxeter system determined by its Coxeter group?*, J. London Math. Soc. (2) 61 (2000) 441–461.

[Coh91] A. M. Cohen, *Coxeter groups and three related topics*, in "Generators and Relations in Groups and Geometries" (A. Barlotti et al.), NATO ASI Series C: Math. and Phys. Sciences Vol. 333, Kluwer Acad. publ., Dordrecht, 1991, pp. 235–278.

[Cox34] H. S. M. Coxeter, *Discrete groups generated by reflections*, Ann. Math. 35 (1934) 588–621.

[Cox35] H. S. M. Coxeter, *The complete enumeration of finite groups of the form* $R_i^2 = (R_i R_j)^{k_{ij}} = 1$, J. London Math. Soc. 10 (1935) 21–25.

[Deo89] V. V. Deodhar, *A note on subgroups generated by reflections in Coxeter groups*, Arch. Math. (Basel) 53 (1989) 543–546.

[Dye90] M. Dyer, *Reflection subgroups of Coxeter systems*, J. Algebra 135 (1990) 57–73.

[Hum90] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[Muh00] B. Mühlherr, *On isomorphisms between Coxeter groups*, Des. Codes Cryptogr. 21 (2000) 189–189.

[Muh05] B. Mühlherr, *The isomorphism problem for Coxeter groups*, arXiv:math.GR/0506572.

[MW02] B. Mühlherr, R. Weidmann, *Rigidity of skew-angled Coxeter groups*, Adv. Geom. 2 (2002) 391–415.

[Nui05-1] K. Nuida, *Almost central involutions in split extensions of Coxeter groups by graph automorphisms*, arXiv:math.GR/0512210.

[Nui05-2] K. Nuida, *Centralizers of reflections and reflection-independence of Coxeter groups*, preprint.

[Nui05-3] K. Nuida, *On centralizers of parabolic subgroups in Coxeter groups*, arXiv:math.GR/0501061.

[Nui05-4] K. Nuida, *On the direct indecomposability of infinite irreducible Coxeter groups and the Isomorphism Problem of Coxeter groups*, arXiv:math.GR/0501276, to appear in Communications in Algebra.

[Par04] L. Paris, *Irreducible Coxeter groups*, arXiv:math.GR/0412214.

[Rad03] D. G. Radcliffe, *Rigidity of graph products of groups*, Algebr. Geom. Topol. 3 (2003) 1079–1088.

[Sti93] J. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory 2nd ed.*, Springer, New York, 1993.

極小曲面のガウス写像の除外値問題への新しい視点

A new perspective for a problem on the number of exceptional values of the Gauss map for minimal surfaces

名古屋大学多元数理科学研究科　川上　裕 (Kawakami Yu)

概 要

We refine Osserman's argument on the exceptional values of the Gauss map of algebraic minimal surfaces. This gives an effective estimate for the number of exceptional values and the totally ramified value number for a wider class of complete minimal surfaces that includes algebraic minimal surfaces. It also provides a new proof of Fujimoto's theorem for this class, which not only simplifies the proof but also reveals the geometric meaning behind it.

1　序

この研究は，名古屋大学の小林亮一先生，九州大学の宮岡礼子先生との共同研究に基づいている．この講演では，論文 [8] で得た $\mathbb{R}^3$ 内の擬代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値数と完全分岐値数の評価に関する結果とその意義について，問題の背景や歴史などを交えて紹介する．

$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面の Gauss 写像は開 Riemann 面上の有理型関数とみなすことができるので，複素解析の理論との対応から様々な問題や結果が生まれてきた．特に重要な問題として「Gauss 写像の除外値問題」が挙げられる．これは「平面でない完備極小曲面の Gauss 写像の除外値数の上限はいくつか？」という問題で，1988 年に藤本坦孝先生が論文 [2] で除外値数は高々4 であるという最良の結果を示した．一方，Osserman 先生は論文 [11] で平面でない代数的極小曲面（有限全曲率完備極小曲面のこと）の Gauss 写像の除外値数は高々3 であることを示した．しかし，この結果が最良であるかどうかは未解決である．実際，除外値数が 3 の代数的極小曲面の例は現在まで発見されていない．除外値数が 2 の例は "Catenoid" などいくつか知られているので，多くの研究者は「この場合の除外値数の上限の最良の評価は 2 ではないか？」と予想している．そこで我々はこれまで知られている結果を複素解析の値分布論の視点から改めて見直し，いくつか興味ある結果を得ることができた．その中で特に重要なのは Gauss 写像の完全分岐値数に関する結果である．除外値数の評価を調べるための最も有効な方法として，値分布論の諸結果を統一的に説明できる Nevanlinna 理論を適用することが考えられる．その際，除外値数を一般化した完全分岐値数という数が評価される．藤本先生は 1992 年に論文 [3] で平面でない完備極小曲面の Gauss 写像の完全分岐値数の上限は 4 であることを示した．これは除外値数の上限 "4" と一致している．この事実と多くの研究者の予想から，平面でない代数的極小曲面の Gauss 写像の完全分岐値数の上限は "2" であると予想されていた．しかし，我々は代数的極小曲面の Gauss 写像の完全分岐値数を調べた結果，完全分岐値数が "2.5" の例が存在することが分かった ([6])．この結果を受けて，我々は論文 [11] での Osserman 先生の除外値数に関する結果を完全分岐値数という視点で見直すことで，特殊な無限全曲率の例を含む "擬代数的極小曲面" に対して，完全分岐値数の最良の評価を得ることができた．

さらにこの評価式から，除外値数 “4” の幾何学的な意味や代数的極小曲面の場合に除外値数の上限が “3” になるメカニズムを理解することができた．次節以降このことに関して詳しく述べることにする．

2 準備

この節では，これから議論する上で必要な極小曲面論の基本事項といくつかの例を紹介する．平均曲率が恒等的に 0 となる $\mathbb{R}^3$ 内の曲面 $x\colon M \to \mathbb{R}^3$ のことを極小曲面 (minimal surface) という．複素座標を $z = u + iv$，$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v})$ とする．$\mathbb{R}^3$ 内の曲面が極小曲面であることと次の式は同値になる．

$$\bar{\partial}\partial x = 0 \tag{1}$$

(1) は，各成分関数が調和関数であることを意味しているので，このことから境界のない compact な極小曲面は存在しないことがわかる．また，曲面の各点をその点の有向接平面に対応させる写像

$$\partial x\colon M \ni p \mapsto [\partial x^1(p) : \partial x^2(p) : \partial x^3(p)] \in \mathbb{Q}^1(\mathbb{C}) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

は正則写像となる．ここで $\mathbb{Q}^1(\mathbb{C}) = \{[w] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) | < w, w >= 0\}$ ($<,>$ は複素線形な双 2 次形式) は $\mathbb{R}^3$ 内の有向 2 次元線形部分空間全体のなす空間であり，その単位法ベクトルを対応させることで，$S^2 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ と同一視される．このことから極小曲面を通常の Gauss 写像 $g\colon M \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ が正則写像になる曲面として特徴付けることができる．また，$\phi_i = \partial x^i$ として次の写像を考える．

$$\phi = \partial x = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)\colon M \to \mathbb{C}^3$$

この写像は次の 3 つの条件をみたす．
(C) 共形条件：$\sum \phi_i^2 = 0$
(R) 正則条件：$\sum |\phi_i|^2 > 0$
(P) 周期条件：任意の $\gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$ に対して，$Re \int_\gamma \phi = 0$
このとき，

$$hdz = \phi_1 - i\phi_2, \quad g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} \tag{2}$$

として与える (hdz, g) はそれぞれ M 上の正則 1-form，有理型関数であり，特に g は Gauss 写像となる．また，次の関係式が成り立つ．

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)hdz, \quad \phi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)hdz, \quad \phi_3 = ghdz \tag{3}$$

さらに，$\mathbb{R}^3$ からの誘導計量 ds^2 とその Gauss 曲率 K は

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^2|h|^2|dz|^2 \tag{4}$$

$$K = -\frac{4|g'|^2}{|h|^2(1 + |g|^2)^4} \tag{5}$$

と与えられ，特に $K \leq 0$ である．

逆に，M 上の正則 1-form と有理型関数の組 (hdz, g) が与えられたとき，(3) によって $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ を定義する．このとき，共形条件 (C) は自動的にみたされ，正則条件 (R) は (4) から「g の位数 k の極でのみ hdz は位数 $2k$ の零点をもつ」となることが分かる．もし，ϕ が周期条件 (P) をみたせば，極小曲面は次の式で得られる．

$$x(z) = 2Re \int^z \phi \tag{6}$$

周期条件 (P) がみたされないとき，曲面は M の普遍被覆面上で定義される．組 (hdz, g) を極小曲面の Weierstrass データ (W-data と略す) という．

曲面 M が誘導計量 ds^2 に関して完備 (complete) であるとは，M の任意の発散路を ds^2 で測った長さが無限大になるときをいう．極小曲面 M の全曲率 $\tau(M)$ (total curvature) は次の式で与えられる．

$$\tau(M) = \int_M KdA = -\int_M \frac{4|g'|^2}{(1+|g|^2)^2}|dz|^2 \tag{7}$$

その絶対値 $|\tau(M)|$ は Gauss 写像の像の Fubini-Study 計量による面積に他ならない．我々は有限全曲率をもつ完備極小曲面のことを代数的極小曲面 (algebraic minimal surface) と呼ぶことにする．代数的極小曲面に関しては次のことが成り立つ．

定理 2.1 (Huber-Osserman)

1. 代数的極小曲面 M は *compact Riemann* 面 $\overline{M}$ から有限個の点を除いたものと等角同値である．([5])

2. このとき *W-data* は $\overline{M}$ 上に有理型に拡張される．([12])

完備極小曲面の例をいくつか紹介する．ここで，Gauss 写像の除外値数 (the number of exceptional values) とは，$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ における Gauss 写像の像の補集合の元の個数，つまり Gauss 写像の値にならない $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 内の集合の元の個数である．

例 2.1 (Catenoid)

$M = \mathbb{P}^1\backslash\{0, \infty\}$ とし，*W-data* を次のように定める．

$$(hdz, g) = \left(\frac{1}{z^2}dz, z\right)$$

これは条件 $(R), (P)$ をみたすので，全曲率 -4π の代数的極小曲面となり，実際 *Catenoid* を生成する．*Gauss* 写像の除外値数は 2 である．

例 2.2

$M = \mathbb{P}^1\backslash\{\pm i, \infty\}$ とし，*W-data* を次のように定める．

$$(hdz, g) = \left(\frac{(z^2+t)^2}{(z^2+1)^2}dz, \sigma\frac{z^2+1+a(t-1)}{z^2+t}\right) \tag{8}$$

但し，a, t は $(a-1)(t-1) \neq 0$ をみたす実数で $\sigma^2 = \frac{t+3}{a\{(t-1)a+4\}} < 0$ とする．これは条件 $(R), (P)$ をみたす (詳しくは論文 [9] 参照) ので，全曲率 -8π の代数的極小曲面となる．*Gauss* 写像の除外値数は 2 である．

例 2.3 (Voss 曲面)

$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ を異なる 3 点とし，*W-data* を $M = \mathbb{C}\backslash\{a_1, a_2, a_3\}$ 上で次のように定める．

$$(hdz, g) = \left(\frac{dz}{\prod(z-a_i)}, z\right) \tag{9}$$

これは周期条件 (P) をみたさないので，M の普遍被覆面上で曲面を定義する．これは無限全曲率完備極小曲面となる．*Gauss* 写像の除外値数は 4 である．一般に $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ を異なる k 点とし，*W-data* を $M = \mathbb{C}\backslash\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ 上で (9) の形で定めたとき，完備性をみたすためには $k \leq 3$ である必要がある．つまり a_i は高々3 点しかとれない．

3 主結果とその証明

この節では，Gauss 写像の完全分岐値数を定義し，我々が得た結果とその証明を紹介する．まず，一般の有理型関数に対する完全分岐値数を次のように定義する．

定義 3.1 (R.Nevanlinna, [10])
M を *Riemann* 面，f を M 上の有理型関数とする．このとき値 $b \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ が f の完全分岐値 (*totally ramified value*) であるとは，b が f の除外値か，b の f による逆像の点がすべて f の分岐点になるときをいう．次に f の完全分岐値数を定義する．f の完全分岐値の集合を $\{a_1, \ldots, a_{r_0}, b_{r_0+1}, \ldots, b_{r_0+l_0}\}$ とする．ここで a_i は除外値，b_i は除外値でない完全分岐値とする．a_i については $\nu_i = \infty$, b_i については $f^{-1}(b_i)$ の各点における f の重複度の最小値を ν_i とする．特に，$\nu_i \geq 2$ である．このとき f の完全分岐値数 (*totally ramified value number*) ν_f を

$$\nu_f = \sum_{a_i, b_i} (1 - \frac{1}{\nu_i}) = r_0 + \sum_{i=1}^{l_0} (1 - \frac{1}{\nu_i}) \tag{10}$$

で定義する．

注意 3.1
f の除外値数を D_f とすると，定義より $D_f \leq \nu_f$ が成り立つ．つまり完全分岐値数の評価は除外値数の評価を含んでいる．

極小曲面の Gauss 写像は開 Riemann 面上の有理型関数とみなせるので，完全分岐値数が定義できる．一般の完備極小曲面の完全分岐値数に関しては次の結果がある．

定理 3.1 (Fujimoto, [3])
$x: M \to \mathbb{R}^3$ を平面でない完備極小曲面，g をその *Gauss* 写像とする．D_g を g の除外値数，ν_g を g の完全分岐値数とする．このとき次の式が成り立つ．

$$D_g \leq \nu_g \leq 4$$

我々は代数的極小曲面の Gauss 写像の完全分岐値数に関して次の結果を得た．

定理 3.2 ([6])
$\nu_g = 2.5$ となる代数的極小曲面が存在する．実際，例 *2.2* の曲面がその例である．

(証明) 例 2.2 の曲面の Gauss 写像は，除外値数が 2 で，次数が 2 より $z = 0$ での値 $g(0) = \sigma[\{1+a(t-1)\}/t]$ は完全分岐値で，重複度が 2 より (10) から $\nu = 2+1/2 = 2.5$ となる．□

完全分岐値に関する評価を，代数的極小曲面を含むより広いクラスの完備極小曲面について統一的に議論する．

定義 3.2 ([8])
完備極小曲面が 擬代数的極小曲面 (*pseudo-algebraic minimal surface*) であるとは，次を条件をみたす *W-data* で構成される完備極小曲面 $x: M$(または $\tilde{M}$) $\to \mathbb{R}^3$ のことである．

1. *W-data* (hdz, g) が穴あき *Riemann* 面 $M = \overline{M} \backslash \{p_1, \ldots, p_k\}$ 上で定義されている．ここで $\overline{M}$ は *compact Riemann* 面である．
2. (hdz, g) は $\overline{M}$ 上に有理型に拡張される．

ここで，このクラスの曲面は M またはその被覆面（普遍被覆面とは限らない）$\tilde{M}$ 上で定義されているものとする．このとき $M = \overline{M} \backslash \{p_1, \ldots, p_k\}$ を擬代数的極小曲面の基本領域ということにする．

この定義を標語的に述べれば,「擬代数的極小曲面とは，代数的極小曲面の構成で周期条件をみたさないものも含めたもの」ということである．第2節であげた3つの例 (例 2.1 ～ 例 2.3) はいずれも擬代数的極小曲面の例である．我々はこのクラスの完全分岐値数に関して次のような評価を得ることができた．

定理 3.3
基本領域 $M = \overline{M}\backslash\{p_1, \ldots, p_k\}$ をもつ擬代数的極小曲面を考える．$\overline{M}$ の種数を G, g を $\overline{M}$ 上の写像と考えたときの次数を d とする．このとき次の式が成り立つ．

$$D_g \leq \nu_g \leq 2 + \frac{2}{R}, \quad R = \frac{d}{G - 1 + k/2} \geq 1 \tag{11}$$

特に代数的極小曲面の場合は $R > 1$ が成り立つ．

上の結果より次の系が成り立つことはすぐに分かる．

系 3.1
平面でない擬代数的極小曲面の *Gauss* 写像の除外値数は高々4 である．特に代数的極小曲面の場合，除外値数は高々3 となる．

注意 3.2
代数的極小曲面の構成法として，*Klotz-Sario* の被覆法がある ([1])．$x\colon M \to \mathbb{R}^3$ は代数的極小曲面で，$\pi\colon \tilde{M} \to M$ が $M = \overline{M}\backslash\{p_1, \ldots, p_k\}$ の非分岐被覆であるとする．このとき $\tilde{x} = x \circ \pi\colon \tilde{M} \to \mathbb{R}^3$ は新たな代数的極小曲面になる．これは元のものと同じ曲面の像をもつが，定義域の $\tilde{M}$ は元のものとは異なる位相をもつ．しかし，比 R が不変であることは代数的議論で示すことができる．また，ν_g も不変である．

(定理 3.3 の証明) 曲面を空間内で適当に回転させることで，g は p_i では極でも零点でもなく，g の極と零点は単純としてよい．完備性から hdz は p_i で位数 $\mu_i \geq 1$ の極をもつ．周期条件 (P) は $\mu_i \geq 2$ を導くがここでは仮定しない．α_s を g の単純零点，β_t を単純極とする．共形条件 (C) より g , hdz , $ghdz$ の零点と極の関係は次の表のようになる．

z	α_s	β_t	p_j
g	0^1	∞^1	
hdz		0^2	∞^{μ_i}
$ghdz$	0^1	0^1	∞^{μ_i}

$\overline{M}$ 上の有理型 1-form hdz または $ghdz$ に Riemann-Roch の定理を適用することで

$$2d - \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 2G - 2$$

を得るから

$$d = G - 1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \mu_i \geq G - 1 + \frac{k}{2} \tag{12}$$

が成り立つ．この式から，

$$R = \frac{d}{G - 1 + k/2} \geq 1 \tag{13}$$

が成り立つ．ここで始めの等号は，g の零点と極の取り方に依存していることに注意する．M が代数的ならば必ず周期条件 (P) をみたすので，$\mu_i \geq 2$ より $R > 1$ となる．

(11) を示す．g の完全分岐値数の集合を $\{a_1, \ldots, a_{r_0}, b_{r_0+1}, \ldots, b_{r_0+l_0}\}$ とする．ここで a_i は除外値，b_i は除外値でない完全分岐値とする．n_0 を g の除外値における分岐指数の和とするとき，

$$k \geq dr_0 - n_0 \tag{14}$$

が成り立つ．n_r を g の除外値でない完全分岐値における分岐指数の和とし，ν_i を $\nu_i = min_{g_{b_{r_0+i}}}\{g(z) = b_{r_0+i}$ の重複度 $\}$ とすると，

$$dl_0 - n_r \leq \sum_{i=1}^{l_0} \frac{d}{\nu_i} \tag{15}$$

が成り立つ．そして n_1 を g の全分岐指数和とすると，Riemann-Hurwitz の定理から

$$n_1 = 2(d + G - 1) \tag{16}$$

を得る．(14), (15), (16) より，

$$\nu_g = r_0 + \sum_{i=1}^{l_0}(1 - \frac{1}{\nu_i}) \leq \frac{k + n_0}{d} + \frac{n_r}{d} \leq \frac{n_1 + k}{d} = 2 + \frac{2}{R} \quad .$$

よって，題意が示せた．□

次に (11) の等号が成り立つ場合を調べる．まず $(G, k, d) = (0, 2, 1)$ の場合，$R = \infty$ となり $2 + \frac{2}{R} = 2$ となるので $\nu_g \leq 2$ となる．よって，例 2.1 はこの場合における (11) の最良の例となる．次に $(G, k, d) = (0, 3, 2)$ の場合，$R = 4$ となり $2 + \frac{2}{R} = 2.5$ となるので $\nu_g \leq 2.5$ となる．よって，例 2.2 はこの場合における (11) の最良の例となる．そして $(G, k, d) = (0, 4, 1)$ の場合，$R = 1$ となり $2 + \frac{2}{R} = 4$ となるので $\nu_g \leq 4$ となる．よって，例 2.3 はこの場合における (11) の最良の例となる．以上より不等式 (11) は最良の評価であると考えられる．

比 R の幾何学的意味について述べる．M の普遍被覆面が単位円板 $\mathbb{D}$ と双正則になるとき，$A_{hyp}(M)$ を Gauss 曲率が -4π の双曲計量で測った M の面積，$A_{FS}(M)$ を Gauss 曲率が 4π の Fubini-Study 計量を g で引き戻した計量で測った M の面積とすると，次の式を示すことができる．

$$R = \frac{A_{FS}(M)}{A_{hyp}(M)} = \frac{d}{G - 1 + k/2} \quad . \tag{17}$$

但し，(11) は普遍被覆面が複素平面 $\mathbb{C}$ のときも成り立つ．

さらに，我々はこの曲面のクラスに対して，藤本先生が論文 [4] で得た Gauss 写像の一意化定理の特別な状況における別証を得ることができた．

定理 3.4
同じ基本領域 $M = \overline{M}\backslash\{p_1, \ldots, p_k\}$ をもつふたつの擬代数的極小曲面 M_1, M_2 を考える．$\overline{M}$ の種数を G として，M_1, M_2 の Gauss 写像をそれぞれ g_1, g_2 とする．g_1, g_2 は $\overline{M}$ から $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ への写像として同じ次数 d をもつが，$g_1 \neq g_2$ と仮定する．相異なる $c_1, \ldots, c_q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対して，$g_1^{-1}(c_j) = g_2^{-1}(c_j)$, $1 \leq j \leq q$ が成り立つとすると

$$q \leq 4 + \frac{2}{R}, \quad R = \frac{d}{G - 1 + k/2} \tag{18}$$

を得る．特に $q \leq 6$，また代数的極小曲面については $q \leq 5$ を得る．

(証明) $\sharp$ で点の個数を表し，

$$\delta_j = \sharp(g_1^{-1}(c_j) \cap M) = \sharp(g_2^{-1}(c_j) \cap M)$$

とおくと，定理 3.3 の証明における記号を用いて

$$qd \leq k + \sum_{j=1}^{q} \delta_j + n_1 \tag{19}$$

を得る．M 上の有理型関数 $\varphi = \frac{1}{g_1 - g_2}$ は $g_1^{-1}(c_j) \cap M$ の各点で極をもつが，φ の極の位数和は高々$2d$ である．よって，

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_j \leq 2d \tag{20}$$

となり，(19) と (20) から

$$qd \leq k + 2d + n_1$$

となり，

$$q \leq \frac{2d + n_1 + k}{d} = 4 + \frac{2}{R}$$

が成り立つ．□

注意 3.3
論文 [4] で $q = 6$ に対する *Gauss* 写像の相異なるふたつの擬代数的極小曲面の例を与えている．代数的極小曲面に対して，$q \leq 5$ が最良の評価であるかどうかは未解決である．

4 今後の課題

代数的極小曲面の Gauss 写像の除外値問題の予想は上の議論では解けない．重要な点は「周期条件」が $R > 1$ の他に Gauss 写像の値分布にどのような影響を与えるかである．我々が得た結果から次のよく知られた結果を容易に導くことができる．

定理 4.1 ([8])
代数的極小曲面 $x: \overline{M} \backslash \{p_1, \ldots, p_k\} \to \mathbb{R}^3$ に関して次のことが成り立つ．

1. $G = 0$ ならば $D_g \leq 2$
2. $G = 1$, $D_g = 3$ ならば，エンドはすべて埋め込みで $d = k$ が成り立ち，さらに g は M 上非分岐である．ここでエンドとは，穴あき円板と同相な曲面の一部のことで，穴に向かう円板上のすべての発散路が無限大の長さをもつときをいう．

さらに [8] では，Gauss 写像に Nevanlinna 理論を適用することで得られると思われるいくつかの結果についても述べている．また，$\mathbb{R}^4$ 内の擬代数的極小曲面についても同様の結果を得ることができる（論文 [7] 参照）．擬代数的極小曲面以外の一般の完備極小曲面の場合にも我々の方法が有効であるかどうか，そして代数的極小曲面の除外値問題の最終的な解決は今後の大きな研究課題である．

参考文献

[1] L. Barbosa and G. Colares, *Minimal Surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Lecture Notes in Math., 1195, Springer-Verlag, 1980

[2] H. Fujimoto, On the number of exceptional values of the Gauss map of minimal surfaces, J. Math. Soc. Japan, **40** (1988), 235 – 247.

[3] H. Fujimoto, On the Gauss curvature of minimal surfaces, J. Math. Soc. Japan, **44** (1992), 427–439.

[4] H. Fujimoto, Unicity theorems for the Gauss maps of complete minimal surfaces, J. Math. Soc. Japan, **45** (1993), 481 – 487.

[5] A. Huber, On subharmonic functions and differential geometry in the large, Comment. Math. Helv., **32** (1957), 13 – 72.

[6] Y. Kawakami, On the totally ramified value number of the Gauss map of minimal surfaces, to appear (2006).

[7] Y. Kawakami, On the Gauss map of a pseudo-algebraic minimal surface in $\mathbb{R}^4$, in preparation.

[8] Y. Kawakami, R. Kobayashi and R. Miyaoka, The Gauss map of pseudo-algebraic minimal surfaces, submitted, math.DG/0511543.

[9] R. Miyaoka and K. Sato, On complete minimal surfaces whose Gauss map misses two directions, Arch. Math., **63** (1994), 565–576.

[10] R. Nevanlinna, *Analytic Function*, Springer-Verlag, 1970.

[11] R. Osserman, Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n, Ann. of Math., **80** (1964), 340–364.

[12] R. Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover, 1986.

[13] F. Xavier, The Gauss map of a complete non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere, Ann. of Math., **113** (1981), 211–214.
Erratum, Ann. of Math., **115** (1982), 667.

Yu Kawakami
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya, 464-8602/JAPAN
E-mail Address: m02008w@math.nagoya-u.ac.jp

Canonical filtrations and stability of direct images by Frobenuis morphisms

Yukinori KITADAI

There is an important concept of stability for vector bundles or torsion free sheaves on algebraic varieties. In this talk, we introduce a problem about stability of direct images by Frobenius morphisms. This is a joint work with H. Sumihiro.

Let k be an algebraically closed field of characteristic $p > 0$, X a nonsingular projective variety over k of dimension n, $F = F_X$ the absolute Frobenius morphism of X and H be an ample divisor on X. Then one can define the *slope* of a torsion free sheaf $\mathscr{E}$ on X with respect to H by

$$\mu(\mathscr{E}) = \frac{c_1(\mathscr{E})H^{n-1}}{\mathrm{rk}(\mathscr{E})},$$

where $\mathrm{rk}(\mathscr{E})$ is the rank of $\mathscr{E}$. Then a torsion free sheaf $\mathscr{E}$ on X is called *semistable* (respectively, *stable*) with respect to H if for all nonzero torsion free subsheaf $\mathscr{F}$ of $\mathscr{E}$, $\mu(\mathscr{F}) \leq \mu(\mathscr{E})$ (respectively, $\mu(\mathscr{F}) < \mu(\mathscr{E})$).

H. Lange and C. Pauly proved the following theorem:

Theorem 1 (H. Lange, C. Pauly [4]). *Let X be a nonsingular projective curve over k of genus $g(X) \geq 2$ and $\mathscr{L}$ be a line bundle on X. Then $F_*\mathscr{L}$ is stable.*

Then we can consider following natural question:

Problem 2. *Let X be a nonsingular projective variety of general type over k of dimension $n \geq 2$, $\mathscr{L}$ be a line bundle on X, and H be an ample line bundle on X. Is $F_*\mathscr{L}$ semistable with respect to H?*

We compute the first Chern classes of direct images of vector bundles by Frobenius morphisms. K_X denotes the canonical divisor of X.

Theorem 3. *Let $\mathscr{E}$ be a vector bundle on X of rank r. Then*

$$c_1(F_*\mathscr{E}) \underset{\text{num}}{\equiv} \frac{p^n - p^{n-1}}{2} rK_X + p^{n-1}c_1(\mathscr{E}),$$

where $\underset{\text{num}}{\equiv}$ denotes numerical equivalence.

We introduce a useful filtration of $F^*F_*\mathscr{O}_X$. There is a natural surjection $F^*F_*\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X$. Let I be the kernel of this. Since $F^*F_*\mathscr{O}_X$ has the structure of $\mathscr{O}_X$-algebra, we get a filtration

$$F^*F_*\mathscr{O}_X \supset I \supset I^2 \supset I^3 \supset \cdots$$

of $F^*F_*\mathscr{O}_X$. Here, we call this filtration *canonical filtration* of $F^*F_*\mathscr{O}_X$.

Theorem 4. *Let X be a nonsingular projective surface over k and $I^\bullet$ be the canonical filtration of $F^*F_*\mathscr{O}_X$. Then*

$$F^*F_*\mathscr{O}_X \supset I \supset I^2 \supset \cdots \supset I^{2p-2} \supset I^{2p-1} = (0)$$

and

$$I^i/I^{i+1} = \begin{cases} S^i(\Omega^1_X) & (0 \leq i \leq p-1), \\ K_X^{\otimes(i-p+1)} \otimes S^{2p-2-i}(\Omega^1_X) & (p \leq i \leq 2p-2). \end{cases}$$

Using Theorem 4, we can prove following theorem.

Theorem 5. *Let X be a nonsingular projective surface over k and H be an ample line bundle on X. Assume that K_X is nef and big and Ω^1_X is semistable with respect to H. Then $F_*\mathscr{L}$ is semistable with respect to H for any line bundle $\mathscr{L}$ on X.*

Theorem 6. *Let X be a nonsingular projective surface over k and H be an ample line bundle on X. Assume that $K_X \underset{\text{num}}{\equiv} 0$ and Ω^1_X is semistable with respect to H. Then $F_*\mathscr{L}$ is semistable with respect to H for any line bundle $\mathscr{L}$ on X.*

Moreover, using this filtration, we can give another simple proof of The Lange and Pauly's Theorem.

Furthermore, using Theorem 5, we can prove a result of geography of surfaces of general type.

References

[1] D. HUYBRECHTS, M. LEHN, *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects of Mathematics **E31**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig (1997)

[2] S. ILANGOVAN, V. B. MEHTA, A. J. PARAMESWARAN, *Semistability and semisimplicity in representations of low height in positive characteristic*, A tribute to C. S. Seshadri (Chennai, 2002), 271–282, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2003

[3] N. M. KATZ, *Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of Turrittin*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **39** (1970), 175–232.

[4] H. LANGE, C. PAULY, *On Frobenuis-destabilized rank-2 vector bundles over curves*, math.AG/0309456

[5] A. LANGER, *Semistable sheaves in positive characteristic*, Ann. of Math. (2) **159** (2004), no. 1, 251–276.

[6] N. I. SHEPHERD-BARRON, *Geography for surfaces of general type in positive characteristic*, Invent. Math. **106** (1991), no. 2, 263–274.

[7] N. I. SHEPHERD-BARRON, *Semi-stability and reduction mod p*, Topology **37** (1998), no. 3, 659–664.

Decay property of regularity-loss type and application to some nonlinear hyperbolic-elliptic system

Takafumi Hosono (Graduate School of Mathematics, Kyushu University)

1 Introduction

We consider the Cauchy problem for the following hyperbolic-elliptic system:

$$u_t + (u^2/2)_x + q_x = 0, \tag{1.1}$$

$$\partial_x^4 q - \partial_x^2 q + q + u_x = 0, \tag{1.2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{1.3}$$

where $u = u(t,x)$ and $q = q(t,x)$ are unknown functions of $t > 0$ and $x \in \mathbb{R}$.

This system has a dissipative structure described by $\lambda(i\xi) = -\frac{\xi^2}{1+\xi^2+\xi^4}$, where $\lambda(i\xi)$ denotes the eigenvalue of the corresponding linearized system. A similar dissipative structure which is characterized by

$$\mathrm{Re}\lambda(i\xi) \le -\frac{c\xi^2}{(1+\xi^2)^2} \tag{1.4}$$

was observed in [3] and [1] for the dissipative Timoshenko system.

The main purpose is to prove the global existence and asymptotic decay of solutions to the Cauchy problem (1.1), (1.2), (1.3). For our system (1.1), (1.2) with the dissipative structure characterized by (1.4), we will observe that regularity-loss occurs not only in the dissipative part of the usual energy estimates but also in the decay estimates for the linearized system. Such a regularity-loss property causes a serious difficulty in showing the global a priori estimates of solutions to the nonlinear problem. To resolve this difficulty, we introduce a time-weighted energy method. This idea combined with the optimal decay estimates for lower order derivatives of solutions yields the desired global a priori estimates for the problem (1.1), (1.2), (1.3). We also prove that the global solution is asymptotic to the self-similar solution to the Burgers equation as time tends to infinity.

2 Main Theorems

Our first theorem is concerning the global existence and optimal decay of solutions to the Cauchy problem (1.1), (1.2), (1.3).

Theorem 2.1 *Let $s \ge 7$. Assume that $u_0 \in H^s(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ and put $E_0 = \|u_0\|_{H^s} + \|u_0\|_{L^1}$. Then there is a small positive constant δ_0 such that if $E_0 \le \delta_0$, then the Cauchy problem (1.1), (1.2), (1.3) has a unique global solution $(u,q)(t,x)$ with*

$$u \in C([0,\infty); H^s(\mathbb{R})) \cap C^1([0,\infty); H^{s-1}(\mathbb{R})), \quad q \in C([0,\infty); H^{s+3}(\mathbb{R})).$$

The solution verifies the following optimal decay estimates:

$$\|\partial_x^k u(t)\|_{L^2} \le CE_0(1+t)^{-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}} \tag{2.1}$$

for k with $0 \le k \le \left[\frac{s-1}{2}\right] - 1$ and

$$\|\partial_x^k q(t)\|_{H^4} \le CE_0(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}} \tag{2.2}$$

for k with $0 \le k \le \left[\frac{s-1}{2}\right] - 2$.

Nonlinear diffusion wave

It is well known that $\phi(t,x\,;M)$ which is the self-similar solution to the Burgers equation $\phi_t+(\phi^2/2)_x=\phi_{xx}$ with the integral condition $\int_{\mathbb{R}}\phi(t,x\,;M)dx=M$ is given explicitly as

$$\phi(t,x\,;M)=\frac{1}{\sqrt{t}}\Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\,;M\Big):=\frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{\big(e^{\frac{M}{2}}-1\big)e^{-\xi^2}}{\sqrt{\pi}+\big(e^{\frac{M}{2}}-1\big)\int_{\xi}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta}, \tag{2.3}$$

where $\xi=\frac{x}{\sqrt{4t}}$. Note that $v(t,x):=\phi(t+1,x\,;M)=\frac{1}{\sqrt{t+1}}\Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{t+1}}\,;M\Big)$ becomes a solution to the Cauchy problem for the Burgers equation:

$$\begin{cases} v_t+\big(v^2/2\big)_x=v_{xx}, & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R},\\ v(0,x)=v_0(x):=\Phi(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Our result on the asymptotic self-similar profile of the global solution constructed in Theorem 2.1 is then stated as follows.

Theorem 2.2 *Let $s\geq 7$. Assume that $u_0\in H^s(\mathbb{R})\cap L^1_1(\mathbb{R})$ and put $E_1=\|u_0\|_{H^s}+\|u_0\|_{L^1_1}$. Let $(u,q)(t,x)$ be the global solution to the problem (1.1), (1.2), (1.3) which was constructed in Theorem 2.1, and let $v(t,x)=\phi(t+1,x\,;M)$ be the self-similar solution to the Burgers equation that was given above with $M=\int_{\mathbb{R}}u_0(x)dx$. Then for any $\epsilon>0$, there is a small positive constant δ_1 such that if $E_1\leq\delta_1$, then we have the following asymptotic relations:*

$$\|\partial_x^k(u-v)(t)\|_{L^2}\leq CE_1(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}+\epsilon} \tag{2.5}$$

for k with $0\leq k\leq\big[\frac{s-1}{2}\big]-2$ and

$$\|\partial_x^k(q+v_x)(t)\|_{H^4}\leq CE_1(1+t)^{-\frac{5}{4}-\frac{k}{2}+\epsilon} \tag{2.6}$$

for k with $0\leq k\leq\big[\frac{s-1}{2}\big]-3$.

3 Decay estimates for linearized system

In this section, we study decay property of solutions to the linearized system

$$u_t+q_x=0, \tag{3.7}$$

$$\partial_x^4q-\partial_x^2q+q+u_x=0, \tag{3.8}$$

with the initial condition $u(0,x)=u_0(x)$. By taking the Fourier transform and eliminating $\hat{q}$, we arrive at the the expression $\hat{u}(t,\xi)=e^{-\rho(\xi)t}\hat{u}_0(\xi)$, where $\rho(\xi)=\frac{\xi^2}{1+\xi^2+\xi^4}$. We define the semigroup e^{tA} associated with the linearized system (3.7), (3.8) by

$$u(t)=e^{tA}u_0:=\mathcal{F}^{-1}e^{-\rho(\xi)t}\mathcal{F}u_0. \tag{3.9}$$

We also introduce the semigroup e^{tA_0} associated with the linear heat equation $u_t=u_{xx}$:

$$e^{tA_0}u_0:=\mathcal{F}^{-1}e^{-\xi^2t}\mathcal{F}u_0. \tag{3.10}$$

Note that the Duhamel principle implies that the solution $u(t)$ of the nonlinear system (1.1), (1.2) solves the integral equation

$$u(t)=e^{tA}u_0-\int_0^t e^{(t-\tau)A}(u^2/2)_x(\tau)d\tau. \tag{3.11}$$

Now we derive qualitative decay estimates for the semigroup e^{tA}.

Lemma 3.1 *Let e^{tA} be the semigroup for the linearized system (3.7), (3.8) defined in (3.9). Then we have*

$$\|\partial_x^k e^{tA}\phi\|_{L^2} \le C(1+t)^{-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}}\|\phi\|_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{l}{2}}\|\partial_x^{k+l}\phi\|_{L^2} \tag{3.12}$$

for $k, l \ge 0$. e^{tA} can be approximated by the semigroup e^{tA_0} in (3.10) in the following sense:

$$\|\partial_x^k\big(e^{tA} - e^{tA_0}\big)\phi\|_{L^2} \le C(1+t)^{-\frac{5}{4}-\frac{k}{2}}\|\phi\|_{L^1} + C(1+t)^{-\frac{l}{2}}\|\partial_x^{k+l}\phi\|_{L^2} \tag{3.13}$$

for $k, l \ge 0$.

Remark The second term on the right hand side of (3.12) shows that we can get the qualitative decay rate $t^{-\frac{l}{2}}$ at the consumption of the l-th order regularity on the initial data.

4 Proof of Theorem 2.1

We define a time-weighted energy norm $E(t)$ and the corresponding dissipation norm $D(t)$ by

$$E(t)^2 = \sum_{j=0}^{[\frac{s}{2}]} \sup_{0\le\tau\le t} (1+\tau)^{j-\frac{1}{2}}\|\partial_x^j u(\tau)\|^2_{H^{s-2j}},\ D(t)^2 = \sum_{j=0}^{[\frac{s}{2}]} \int_0^t (1+\tau)^{j-\frac{3}{2}}\|\partial_x^j u(\tau)\|^2_{H^{s-2j}}d\tau. \tag{4.1}$$

To obtain the optimal decay rate, we introduce

$$M(t) = \sum_{j=0}^{[\frac{s-1}{2}]-1} \sup_{0\le\tau\le t} (1+\tau)^{\frac{1}{4}+\frac{j}{2}}\|\partial_x^j u(\tau)\|_{L^2}. \tag{4.2}$$

STEP 1 We show that for $0 \le j \le [\frac{s}{2}]$,

$$(1+t)^{j-\frac{1}{2}}\|\partial_x^j u(t)\|^2_{H^{s-2j}} + \int_0^t (1+t)^{j-\frac{3}{2}}\|\partial_x^j u(t)\|^2_{H^{s-2j}}d\tau \le C\|u_0\|^2_{H^s} + CM(t)D(t)^2. \tag{4.3}$$

We apply ∂_x^k to (1.1) and (1.2) and multiply them by $\partial_x^k u$ and $\partial_x^k q$, respectively. After integrating with respect to x, we arrive at, using also the Gagliardo-Nirenberg type inequality,

$$\frac{d}{dt}\|\partial_x^k u\|^2_{L^2} + 2\|\partial_x^k q\|^2_{H^2} \le C\|u_x\|_{L^\infty}\|\partial_x^k u\|^2_{L^2}, \tag{4.4}$$

where $k \ge 0$. By multiplying (4.4) by $(1+t)^\alpha$ and integrating with respect to t, we get

$$\begin{aligned}&(1+t)^\alpha\|\partial_x^k u(t)\|^2_{L^2} + 2\int_0^t (1+\tau)^\alpha\|\partial_x^k q(\tau)\|^2_{H^2}d\tau \\ &\le \|\partial_x^k u_0\|^2_{L^2} + \alpha\int_0^t (1+\tau)^{\alpha-1}\|\partial_x^k u(\tau)\|^2_{L^2}d\tau + C\int_0^t (1+\tau)^\alpha\|u_x(\tau)\|_{L^\infty}\|\partial_x^k u(\tau)\|^2_{L^2}d\tau,\end{aligned} \tag{4.5}$$

where $k \ge 0$ and $\alpha \in \mathbb{R}$. Now we take $\alpha = -\frac{1}{2}$ (negative) in (4.5) and add for k with $0 \le k \le s$. This gives

$$\begin{aligned}&(1+t)^{-\frac{1}{2}}\|u(t)\|^2_{H^s} + 2\int_0^t (1+\tau)^{-\frac{1}{2}}\|q(\tau)\|^2_{H^{s+2}}d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t (1+\tau)^{-\frac{3}{2}}\|u(\tau)\|^2_{H^s}d\tau \\ &\le \|u_0\|^2_{H^s} + C\int_0^t (1+\tau)^{-\frac{1}{2}}\|u_x(\tau)\|_{L^\infty}\|u(\tau)\|^2_{H^s}d\tau,\end{aligned} \tag{4.6}$$

where the third term on the right hand side is an artificial dissipation term which was introduced by choosing $\alpha < 0$. Here the last term on the right hand side can be majorized by $CM(t)D(t)^2$. Thus we have shown (4.3) for $j = 0$. We have from (1.2) that $\|\partial_x u\|_{L^2} \le C\|q\|_{H^4}$, which together with (4.6) implies

$$\int_0^t (1+\tau)^{-\frac{1}{2}} \|\partial_x u(\tau)\|_{H^{s-2}}^2 d\tau \le C\|u_0\|_{H^s}^2 + CM(t)D(t)^2. \tag{4.7}$$

Next, we take $\alpha = \frac{1}{2}$ in (4.5) and add for k with $1 \le k \le s-1$. This gives

$$\begin{aligned}
&(1+t)^{\frac{1}{2}} \|\partial_x u(t)\|_{H^{s-2}}^2 + 2\int_0^t (1+\tau)^{\frac{1}{2}} \|\partial_x q(\tau)\|_{H^s}^2 d\tau \\
\le &\|\partial_x u_0\|_{H^{s-2}}^2 + C\int_0^t (1+\tau)^{-\frac{1}{2}} \|\partial_x u(\tau)\|_{H^{s-2}}^2 d\tau + C\int_0^t (1+\tau)^{\frac{1}{2}} \|u_x(\tau)\|_{L^\infty} \|\partial_x u(\tau)\|_{H^{s-2}}^2 d\tau.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Here the second term of the right hand side of (4.8) was estimated in (4.7), while the third term can be majorized by $CM(t)D(t)^2$. Thus we have proved (4.3) for $j = 1$. The general case can be shown by using induction argument.

STEP 2 Next we show that

$$M(t) \le C\left(\|u_0\|_{H^s} + \|u_0\|_{L^1}\right) + CM(t)^2 + CM(t)E(t). \tag{4.9}$$

Let $0 \le k \le \left[\frac{s-1}{2}\right] - 1$. We apply ∂_x^k to the integral equation (3.11) and take the L^2 norm. We have

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^k u(t)\|_{L^2} \le &\|\partial_x^k e^{tA} u_0\|_{L^2} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{t}{2}} \|\partial_x^{k+1} e^{(t-\tau)A}(u^2)(\tau)\|_{L^2} d\tau + \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\frac{t}{2}}^t \|\partial_x e^{(t-\tau)A} \partial_x^k (u^2)(\tau)\|_{L^2} d\tau =: I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Here we only give the estimate for I_2. By applying (3.12) with k replaced by $k+1$ and with $l = k+1$, $\phi = u^2$, we have

$$\begin{aligned}
I_2 \le &C\int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4}-\frac{k+1}{2}} \|(u^2)(\tau)\|_{L^1} d\tau + \\
&+ C\int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-\tau)^{-\frac{k+1}{2}} \|\partial_x^{2k+2}(u^2)(\tau)\|_{L^2} d\tau \\
\le &C\int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}} \|u(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau + \\
&+ C\int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}} \|u(\tau)\|_{L^\infty} \|\partial_x^{2k+2} u(\tau)\|_{L^2} d\tau.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Now, recalling the definitions of $M(t)$, we have $\|u(t)\|_{L^2} \le M(t)(1+t)^{-\frac{1}{4}}$ and $\|u(t)\|_{L^\infty} \le M(t)(1+t)^{-\frac{1}{2}}$. Also, we have from (4.1) that $\|\partial_x^{2k+2} u(t)\|_{L^2} \le E(t)(1+t)^{-\frac{1}{4}}$ because $2k+2 \le$

$s-1$ for $k \le \left[\frac{s-1}{2}\right] - 1$. Substituting these inequalities into (4.11), we can further estimate I_2 as

$$\begin{aligned} I_2 \le & CM(t)^2 \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-\tau)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}} (1+\tau)^{-\frac{1}{2}} d\tau + \\ & + CM(t)E(t) \int_0^{\frac{t}{2}} (1+t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}} (1+\tau)^{-\frac{3}{4}} d\tau \\ \le & CM(t)^2 (1+t)^{-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}} + CM(t)E(t)(1+t)^{-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}}. \end{aligned}$$

The other terms I_1 and I_2 can be estimated similarly. Consequently, we arrive at the inequality

$$(1+t)^{\frac{1}{4}+\frac{k}{2}} \|\partial_x^k u(t)\|_{L^2} \le C\left(\|u_0\|_{H^s} + \|u_0\|_{L^1}\right) + CM(t)^2 + CM(t)E(t)$$

for $0 \le k \le \left[\frac{s-1}{2}\right] - 1$, which shows the desired estimate (4.9).

Proof of Theorem 2.1. We have from (4.3) and (4.9) that

$$E(t)^2 + D(t)^2 \le CE_0^2 + CM(t)D(t)^2,$$

$$M(t) \le CE_0 + CM(t)^2 + CM(t)E(t),$$

where $E_0 = \|u_0\|_{H^s} + \|u_0\|_{L^1}$. Thus, setting $Y(t) := E(t) + D(t) + M(t)$, we arrive at the inequality $Y(t)^2 \le CE_0^2 + CY(t)^3 + CY(t)^4$, from which we can deduce that $Y(t) \le CE_0$, provided that E_0 is suitably small, say $E_0 \le \delta_0$. This gives the desired a priori estimates of solutions, by which we can continue a unique local solution globally in time. The global solution thus obtained verifies the decay estimate (2.1) for $0 \le k \le \left[\frac{s-1}{2}\right] - 1$ because we have shown that $M(t) \le CE_0$. The remaining decay estimate (2.2) for q easily follows from (1.2) and (2.1). If fact, we have

$$\|\partial_x^k q(t)\|_{H^4} \le C\|\partial_x^{k+1} u(t)\|_{L^2} \le CE_0(1+t)^{-\frac{3}{4}-\frac{k}{2}},$$

where $0 \le k \le \left[\frac{s-1}{2}\right] - 2$. Thus the proof of Theorem 2.1 is complete. □

References

[1] K. Haramoto, Asymptotic behavior of solutions to the dissipative Timoshenko system, Master thesis, Kyushu University, 2005 (Japanese).

[2] T. Iguchi, S. Kawashima, On space-time decay properties of solutions to hyperbolic-elliptic coupled systems, *Hiroshima Math. J.* **32** (2002) 229-308.

[3] J.E. Muñoz Rivera, R. Racke, Global stability for damped Timoshenko systems, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **9** (2003) 1625-1639.

[4] Y. Shizuta, S. Kawashima, Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzman equation, *Hokkaido Math. J.* **14** (1985) 249-275.

Evaluation representations of quantum affine algebras at roots of unity

阿部　友紀

（上智大・理工）

目的

1のベキ根におけるA型アフィン量子代数の表現に、evaluation表現と呼ばれるものが二種類ある。それらのDrinfel'd多項式を求めることや、Schnizer加群を用いて具体的に構成することが今回の目的である。また、この二種類の表現が同型になる条件についても議論したい。

The purpose of this talk is to compute the Drinfel'd polynomials of the two types evaluation representations of quantum affine algebras at roots of unity and construct those representations as the submodule of evaluation Schnizer modules. Moreover, we discuss the necessary and sufficient condition for which the two types evaluation representations are isomorphic.

1　1のベキ根でない量子代数の表現論とevaluation表現

$\mathfrak{g}$を$\mathbb{C}$上の階数nの有限次元単純リー代数とし、$U_q(\mathfrak{g})$ (resp. $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$)をその量子代数 (resp. ループ量子代数) とする。qが1のベキ根でない場合、$U_q(\mathfrak{g})$ (resp. $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$) の表現論は、$\mathfrak{g}$の普遍包絡環$U(\mathfrak{g})$ (resp. $U(\widetilde{\mathfrak{g}})$) の表現論と、ほぼ同じであることが知られている。すなわち、(**1**型) 有限次元既約$U_q(\mathfrak{g})$ (resp. $U_q(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群は、最高ウエイト加群と呼ばれる加群になり、その同値類全体と$\mathbb{Z}_+^n$ (resp. $\mathbb{C}_0[t]^n$) との間には自然な一対一対応が存在する。(ただし、$\mathbb{Z}_+ := \{0,1,2,\cdots\}$, $\mathbb{C}_0[t] := \{P \in \mathbb{C}[t] \mid P(0) \neq 0$ かつ P の最高次の係数は1$\}$)。ループ量子代数の有限次元加群の話は[4]等に書かれている。今、$\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$ (resp. $\mathbf{P} \in \mathbb{C}_0[t]^n$) に対応する加群を$V_q(\lambda)$ (resp. $\widetilde{V}_q(\mathbf{P})$) と書くことにする。$\widetilde{V}_q(\mathbf{P})$の多項式$\mathbf{P}$は、「Drinfel'd多項式」と呼ばれている。

$\mathfrak{g}$が$\mathfrak{sl}_{n+1}$の場合、任意の零でない複素数$\mathbf{a}$に対して、2種類の代数準同型$\mathrm{ev}_{\mathbf{a}}^{\pm} : U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1}) \longrightarrow U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$が存在する事が知られている ([8]及び[3]参照)。これらの準同型を使うことにより、$V_q(\lambda)$を$U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$加群とみなすことができる。それらを$V_q(\lambda)$の「evaluation表現」と呼び、$V_q(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$と書く。この時、$U_q(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$加群の分類定理により、$V_q(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$に対応するDrinfel'd多項式が存在する。そのような Drinfel'd多項式は、Chari-Pressleyらによって具体的に求められている ([3]参照)。そこで我々は、1のベキ根におけるevaluation表現について議論したい。

2　1のベキ根における量子代数の表現論 (制限型)

lを3以上の奇整数とし、εを1の原始l乗根とする。1のベキ根における量子代数には、通常の量子代数とは別に、Lusztigによって定義された「制限型」(もしくは「Lusztig型」) と呼ばれる量子代数が存在する ([9]参照)。制限型量子代数 (resp. 制限型ループ量子代数) を、

$U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) と書く。また、区別をつけるために、通常の量子代数 $U_\varepsilon(\mathfrak{g})$, $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{g}})$ は「非制限型」（もしくは「De Concini-Kac 型」）と呼ばれている（[7] 参照）。

$U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) は、「スモール量子代数」と呼ばれる部分代数 $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) を持つことが知られている。さらに、$U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) の有限次元既約加群は、スモール量子代数 $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) の有限次元既約加群と、普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ (resp. $U(\widetilde{\mathfrak{g}})$) の有限次元既約加群とを合わせたような構造をしているということも知られている（[9] (resp. [5]) 参照）。$U(\mathfrak{g})$ (resp. $U(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群の構造ははよく知られているため、有限次元既約 $U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{res}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群の理論は、実質的に有限次元既約 $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群の理論とみなすことができる。

q が 1 のベキ根でない場合と同様に、(**1** 型) 有限次元既約 $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群は、最高ウエイト加群になることが知られている。さらに、その同値類全体と $\mathbb{Z}_l^n$ (resp. $\mathbb{C}_l[t]^n$) との間には自然な一対一対応が存在することが [9] (resp. [5]) 等で紹介されている（ただし、$\mathbb{Z}_l := \{0, 1, \cdots l-1\}$, $\mathbb{C}_l[t] := \{P \in \mathbb{C}_0[t] \mid$ 任意の零でない複素数 c に対して、$(1-ct^l)$ で P を割れない$\}$)。$\lambda \in \mathbb{Z}_l^n$ (resp. $\mathbf{P} \in \mathbb{C}_l[t]^n$) に対応する $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群を $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$ (resp. $\widetilde{V}_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathbf{P})$) と書くことにする。

3 1のベキ根における量子代数の表現論（非制限型）

制限型とは異なり、非制限型量子代数 $U_\varepsilon(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{g}})$) の有限次元既約加群は、最高ウエイト加群とも最低ウエイト加群とも限らず、制限型の時のような分類定理も成立しない（[7], [2] 参照）。有限次元 $U_\varepsilon(\mathfrak{g})$ 加群（既約とは限らない）の例として、$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ の場合、「極大巡回表現」と呼ばれる複数の複素パラメーターを含むような表現が存在することが知られている（[6] 参照）。特に、この表現は、基底に対する生成元の作用が完全に記述されている。同様に、任意の $\mathfrak{g}$ に対しても、「Schnizer 加群」と呼ばれる極大巡回表現と似たような性質を持つ加群が存在することが知られている（[11], [12] 参照）。この加群もまた、基底に対する生成元の作用が完全に記述されている。

しかし、$U_\varepsilon(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群の中でも、「ベキ零加群」と呼ばれるものに関しては、すべて最高ウエイト加群となることが知られている。実は、$U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\widetilde{\mathfrak{g}})$) は、$U_\varepsilon(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{g}})$) のある両側イデアル I_ε (resp. $\widetilde{I}_\varepsilon$) による商代数 $U_\varepsilon(\mathfrak{g})/I_\varepsilon$ (resp. $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{g}})/\widetilde{I}_\varepsilon$) と、代数として同型になることが知られている。ベキ零加群とは、I_ε (resp. $\widetilde{I}_\varepsilon$) が零で作用するような $U_\varepsilon(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群のことである。よって、制限型の理論より、(**1** 型) 有限次元既約ベキ零 $U_\varepsilon(\mathfrak{g})$ (resp. $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{g}})$) 加群は、最高ウエイト加群になり、それらの同値類全体と $\mathbb{Z}_l^n$ (resp. $\mathbb{C}_l[t]^n$) との間には自然な一対一対応が存在することが分かる。

4 1のベキ根における量子代数の evaluation 表現

§1 で挙げた evaluation 準同型は $U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ にも存在し、それにより $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$ の evaluation 表現を定義することができる。それらを $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ と書くことにする。この時 [3] と同様の方法で、これらの Drinfel'd 多項式を求めることができる。

定理 1. $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{Z}_l^n$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^\times$ とする。この時、$V_\varepsilon^{fin}(\lambda)_{\boldsymbol{a}}^{\pm}$ に対応する *Drinfel'd* 多項式 $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{a}}^{\pm} = (P_{i,\boldsymbol{a}}^{\pm})_{i=1}^n \in \mathbb{C}_l[t]^n$ は以下で与えられる。$P_{i,\boldsymbol{a}}^{\pm} \neq 1$ である i に対し、

$$P_{i,\boldsymbol{a}}^{\pm} = \prod_{k=1}^{\lambda_i} (t - \boldsymbol{a}^{-1}\varepsilon^{\lambda_i - 2k + 1 \pm \lambda[i]}) \quad (\text{ただし、} \lambda[i] := \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k - \sum_{k=i+1}^{n} \lambda_k + i).$$

また、次のような命題も得ることができた。

命題 1. $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{Z}_l^n$, $\boldsymbol{a}_\pm \in \mathbb{C}^\times$ とする。この時、$V_\varepsilon^{fin}(\lambda)_{\boldsymbol{a}_+}^{+}$ と $V_\varepsilon^{fin}(\lambda)_{\boldsymbol{a}_-}^{-}$ とが同型になる必要十分条件は、任意の $i \in supp(\lambda)$ に対し、$\boldsymbol{a}_+ = \boldsymbol{a}_-\varepsilon^{2\lambda[i]}$ が成立することである（ただし、$supp(\lambda) := \{1 \leq i \leq n \,|\, \lambda_i \neq 0\}$）。

この命題は、$V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)^+_{\mathbf{a}_+}$ と $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)^-_{\mathbf{a}_-}$ との Drinfel'd 多項式を見比べることによって得られる。

q が 1 のベキ根でない場合、$\#(\mathrm{supp}(\lambda)) > 1$ なら $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)^+_{\mathbf{a}_+}$ と $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)^-_{\mathbf{a}_-}$ とが同型になるような $\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$ と $\mathbf{a}_\pm \in \mathbb{C}^\times$ は存在しない。しかし、q が 1 のベキ根の場合、$\#(\mathrm{supp}(\lambda)) > 1$ であっても、そのような $\lambda \in \mathbb{Z}_l^n$, $\mathbf{a}_\pm \in \mathbb{C}^\times$ が存在することが、次の命題から分かる。

命題 2. $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^n \in \mathbb{Z}_l^n$ $(\lambda \neq 0)$, $\boldsymbol{a}_\pm \in \mathbb{C}^\times$ とし、$supp(\lambda) = \{i_1, \cdots, i_m\}$ (ただし、$(i_1 < \cdots < i_m)$ とする。この時、$V_\varepsilon^{fin}(\lambda)^+_{a_+}$ と $V_\varepsilon^{fin}(\lambda)^-_{a_-}$ とが同型になる必要十分条件は、以下の *(a)* と *(b)* を満たすことである。

(a) 任意の $2 \leq r \leq m$ に対して

$$\lambda_{i_r} \equiv (-1)^{r-1}\lambda_{i_1} + (-1)^r i_1 - i_r + 2\sum_{k=2}^{r-1}(-1)^{r-1+k} i_k \neq 0 \quad (mod\ l).$$

(b)

$$\boldsymbol{a}_+ = \begin{cases} \boldsymbol{a}_-\varepsilon^{2\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} i_k} & if\ m\ is\ odd, \\ \boldsymbol{a}_-\varepsilon^{2(\lambda_{i_1} + \sum_{k=2}^m (-1)^k i_k)} & if\ m\ is\ even. \end{cases}$$

5 Schnizer 加群と evaluation 表現

§4 の命題 1 は、Drinfel'd 多項式の理論を使わずとも証明することができる。それは、§3 で紹介した Schnizer 加群を利用する方法である。$U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ に対しても、evaluation 準同型は存在し、それを利用することにより、Shnizer 加群の evaluation 表現を考えることが出来る。一方、我々は以前、Schnizer 加群のパラメーターを特殊化することにより、$U_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{sl}_{n+1})$ 加群 $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$ を Schnizer 加群の部分加群として具体的に実現できるということを発見した（[1] 及び [10] 参照）。この結果を利用することにより、我々は $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$ の evaluation 表現 $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)^\pm_{\mathbf{a}}$ を、Schnizer 加群の evaluation の部分加群として具体的に構成することができた。それを用い、Drinfel'd 多項式の理論を使わず、直接的な方法で命題 1 を得られるということが分かった。

以下、その方法を示す。そのために、まず記号を定め、（パラメーターが特殊化された）Schnizer 加群の evaluation 表現を紹介する。

$I := \{1, 2, \cdots, n\}$, $\quad \widetilde{I} := I \sqcup \{0\}$, $\quad [r]_\varepsilon := \dfrac{\varepsilon^r - \varepsilon^{-r}}{\varepsilon - \varepsilon^{-1}}$ $(r \in \mathbb{Z})$: 量子整数、

$\{E_i, F_i, K_j \,|\, i \in \widetilde{I}, j \in I\}$: $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ の生成元、

$N := \dfrac{1}{2}n(n+1)$: $\mathfrak{sl}_{n+1}$ の正ルートの個数、

V_N: l^N 次元複素ベクトル空間、 $\quad \{v(m) \in V_N \,|\, m = (m_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n} \in \mathbb{Z}_l^N\}$: V_N の基底、

（任意の $m \in \mathbb{Z}_l^N, m' \in \mathbb{Z}^N$ に対し、$v(m + lm') := v(m)$ とする。）

$\epsilon_{i,j}$: (i,j) 成分のみ 1 で他は 0 である $\mathbb{Z}_l^N$ の元、

$$\alpha_{i,j} := \sum_{k=j+1}^{i} \epsilon_{k-1,n-i+k} - \sum_{k=j}^{i} \epsilon_{k,n-i+k} \quad (1 \leq j \leq i \leq n),$$

$$R_s := \{r^s = (r_1^s, \cdots, r_n^s) \in I^n \,|\, r_1^s \geq \cdots \geq r_{s-1}^s \geq r_s^s < r_{s+1}^s < \cdots < r_n^s\},$$

$$R_s^F := \{r^s = (r_1^s, \cdots, r_n^s) \in R_s \,|\, \text{任意の } k \in I \text{ に対し、} k \leq r_k^s \leq n\},$$

$$R_s^E := \{r^s = (r_1^s, \cdots, r_n^s) \in R_s \,|\, \text{任意の } k \in I \text{ に対し、} 1 \leq r_k^s \leq k\},$$

$$R^F := \bigsqcup_{s=1}^n R_s^F, \quad R^E := \bigsqcup_{s=1}^n R_s^E.$$

定理 2. 任意の $\lambda=(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{Z}_l^n$ と $\boldsymbol{a}\in\mathbb{C}^\times$ に対して、次のような代数準同型 $\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}}^{\pm}:=\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}}^{\pm}(\lambda):U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})\longrightarrow End(V_N)$ が存在する:

$$\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}}^{\pm}(E_i)(v(m))=\sum_{j=1}^{i}[m_{j-1,n-i+j}-m_{j,n-i+j}]_\varepsilon v(m+\alpha_{i,j}),$$

$$\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}}^{\pm}(F_i)(v(m))=\sum_{j=i}^{n}[\sum_{k=i-1}^{j-1}(m_{i,k}-m_{i-1,k})+\sum_{k=i}^{j}(m_{i,k}-m_{i+1,k})-\lambda_i]_\varepsilon v(m+\epsilon_{i,j}),$$

$$\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}}^{\pm}(K_i)(v(m))=\varepsilon^{\sum_{k=i-1}^{n}m_{i-1,k}-2\sum_{k=i}^{n}m_{i,k}+\sum_{k=i+1}^{n}m_{i+1,k}+\lambda_i}v(m),$$

$$\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}}^{\pm}(E_0)(v(m))=\boldsymbol{a}\sum_{r^s\in R^F}(-1)^{s+n}\varepsilon^{\pm(C(m,r^s)-\lambda[s])+n}$$

$$[-m_{s-1,s-1}+m_{s,s}-\lambda_s]_\varepsilon v(m+\sum_{k=1}^{n}\epsilon_{k,r_k^s}),$$

$$\widetilde{ev}_{\boldsymbol{a}}^{\pm}(F_0)(v(m))=\boldsymbol{a}^{-1}\sum_{r^s\in R^E}(-1)^{s}\varepsilon^{\pm(D(m,r^s)-s+n+1)-n}[m_{1,n-s+1}]_\varepsilon v(m+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k,r_k^s}),$$

($i\in I$, $m=(m_{i,j})_{1\le i\le j\le n}\in\mathbb{Z}_l^N$)。ただし、

$$C(m,r^s):=m_{s-1,s-1}+\sum_{k=1}^{s}\sum_{p=r_k^s+1}^{r_{k-1}^s}(m_{k-1,p-1}-m_{k,p}),$$

$$D(m,r^s):=-m_{n,n}+\sum_{k=1}^{n-s+1}m_{1,k}-\sum_{k=s+1}^{n}(m_{r_k^s-1,n-k+r_k^s}-m_{r_k^s,n-k+r_k^s}).$$

今、$U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 表現 $(\widetilde{ev}_{\mathbf{a}}^{\pm}(\lambda),V_N)$ に対応する $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 加群を $V_N(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ と書き、$v(0)$ によって生成される $V_N(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ の $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 部分加群を $L_\varepsilon^{\mathrm{nil}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ と書く。この時、$v(0)$ は $L_\varepsilon^{\mathrm{nil}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ の最高ウエイトベクトルになる。また、$V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)_{\mathbf{a}}^{\pm}$ を §4 で紹介した $V_\varepsilon^{\mathrm{fin}}(\lambda)$ の evaluation 表現とすると、以下の定理が得られる。

定理 3. *(a)* $L_\varepsilon^{nil}(\lambda)_{\boldsymbol{a}}^{\pm}$ はベキ零 $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 加群になる。

(b) ベキ零 $U_\varepsilon(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 加群 $L_\varepsilon^{nil}(\lambda)_{\boldsymbol{a}}^{\pm}$ を $U_\varepsilon^{fin}(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 加群とみなしたとき（§3 参照）、$L_\varepsilon^{nil}(\lambda)_{\boldsymbol{a}}^{\pm}$ は $V_\varepsilon^{fin}(\lambda)_{\boldsymbol{a}}^{\pm}$ と、$U_\varepsilon^{fin}(\widetilde{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ 加群として同型になる。

この定理 2 と定理 3 を用いることにより、命題 1 を Drinfel'd 多項式の理論を使わずに証明することが出来る。以下、その概要を示す。

命題 1 の別証. $\lambda=(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbb{Z}_l^n$, $\boldsymbol{a}_\pm\in\mathbb{C}^\times$ とする。今、$L_\varepsilon^{nil}(\lambda)_{a_+}^{+}\cong L_\varepsilon^{nil}(\lambda)_{a_-}^{-}$ と仮定し、ϕ をその同型写像とすると、原始ベクトルの一意性（*[10], [1]* 参照）により、ϕ はスカラー写像であることが分かる。よって、任意の $m\in\mathbb{Z}_l^N$ に対して $\widetilde{ev}_{a_+}^{+}(E_0)(v(m))=\widetilde{ev}_{a_-}^{-}(E_0)(v(m))$ となることが分かる。特に、互いの $v(0)$ における作用を見比べることにより、$\boldsymbol{a}_+=\boldsymbol{a}_-\varepsilon^{2\lambda[i]}$ $(i\in supp(\lambda))$ を得る。

逆に、今、$\boldsymbol{a}_+=\boldsymbol{a}_-\varepsilon^{2\lambda[i]}$ $(i\in supp(\lambda))$ と仮定する。$\widetilde{ev}_{a_\pm}^{\pm}$ の定義より、任意の $i\in I$ に対して（$L_\varepsilon^{nil}(\lambda)$ 上）、$\widetilde{ev}_{a_+}^{+}(E_i)=\widetilde{ev}_{a_-}^{-}(E_i)$, $\widetilde{ev}_{a_+}^{+}(F_i)=\widetilde{ev}_{a_-}^{-}(F_i)$, $\widetilde{ev}_{a_+}^{+}(K_i)=\widetilde{ev}_{a_-}^{-}(K_i)$ となるので、$\widetilde{ev}_{a_+}^{+}(E_0)=\widetilde{ev}_{a_-}^{-}(E_0)$ 及び $\widetilde{ev}_{a_+}^{+}(F_0)=\widetilde{ev}_{a_-}^{-}(F_0)$ を示せばよい。このことは、以下のようにして示すことが出来る。

まず、仮定より $\widetilde{ev}_{a_+}^{+}(E_0)(v(0))=\widetilde{ev}_{a_-}^{-}(E_0)(v(0))$ ということが分かる。一方、$v(0)$ が最高ベクトルであることと既約性より、$L_\varepsilon^{nil}(\lambda)$ は $\{F_{i_1}\cdots F_{i_r}v(0)\,|\,i_1,\cdots i_r\in I,r\in\mathbb{Z}_+\}$ という形のベクトルによって生成されている。$i\neq 0$ であれば $E_0F_i=F_iE_0$ なので、$v(0)$ への作用が等しければ、$\widetilde{ev}_{a_+}^{+}(E_0)$ と $\widetilde{ev}_{a_-}^{-}(E_0)$ とは $L_\varepsilon^{nil}(\lambda)$ 上で等しくなる。

同様に、最低ウエイトベクトルを利用することにより、F_0 の場合を示すことが出来る。今、$\mathbb{Z}_l^N$ の元 $m^\lambda = (m_{i,j}^\lambda)_{1\le i\le j\le n}$ を次のように定義する：

$$m_{i,j}^\lambda \equiv \sum_{k=1}^{i} \lambda_{j-k+1} \quad (mod\ l).$$

この時、$v(m_\lambda)$ は $L_\varepsilon^{nil}(\lambda)$ の最低ウエイトベクトルとなり、仮定より $\widetilde{ev}_{a_+}^+(F_0)(v(m^\lambda)) = \widetilde{ev}_{a_-}^-(F_0)(v(m^\lambda))$ となることが分かる。よって、E_0 の場合と同様の理由により、$L_\varepsilon^{nil}(\lambda)$ 上で $\widetilde{ev}_{a_+}^+(F_0) = \widetilde{ev}_{a_-}^-(F_0)$ となることが分かる。 □

References

[1] Abe, Y., Nakashima, T. (2004). Nilpotent representations of classical quantum groups at roots of unity. arXiv: math.QA/0411401.

[2] Beck, J., Kac, V.G. (1994). Finite-dimensional representations of quantum algebras. Comm. Math. Phys. 165(1):193-199.

[3] Chari, V., Pressley, A. (1994). Small representations of quantum affine algebras. Lett. Math. Phys. 30:131-145.

[4] Chari, V., Pressley, A. (1995). Quantum affine algebras and their representations. Amer. Math. Soc. vol.16:59-78.

[5] Chari, V., Pressley, A. (1997). Quantum algebras at roots of unity. J. Amer. Math. Soc. vol 1:280-328.

[6] Date, E., Jimbo, M., Miki, K., Miwa, T. (1991). Cyclic Representations of $U_q(sl(n+1,\mathbb{C}))$ at $q^N = 1$. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 27:366-437.

[7] De Concini, C., Kac, V.G. (1990). Actes du Colloque en I'honneur de Jacques Diximier, edited by A.Connes, M Duflo, A. Joseph and R.Rentschler (Prog. Math. Birkhauser.), vol 92:471-506.

[8] Jimbo, M. (1986). A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Heck algebra and Yang-Baxter equation. Lett. Math. Phys. 11: 247-252.

[9] Lusztig, G. (1989). Modular representations and quantum groups. Contemp. Math 82:59-77.

[10] Nakashima, T. (2002). Irreducible modules of finite dimensional quantum algebras of type A at roots of unity. J.Math.Phys. vol.43, No.4:2000-2014.

[11] Schnizer, W.A. (1993). Roots of unity: Representations for symplectic and orthogonal quantum groups. J.Math. Phys. 34:4340-4363.

[12] Schnizer, W.A. (1994) Roots of unity: Representations of Quantum Group. Commun. Math. Phys. 163:293-306.

Geometric method in Virtual Knot Theory

Teruhisa KADOKAMI
Osaka City University Advanced Mathematical Institute
kadokami@sci.osaka-cu.ac.jp

Abstract

We explain some geometric methods in Virtual Knot Theory. In 1996, Louis Kauffman introduced Virtual Knot Theory to realize every Gauss code geometrically. Since there has already been many algebraic tools in Knot Theory, they are also applied in Virtual Knot Theory. Though Kauffman introduced that any virtual link is realized as a link diagram on a closed surface, geometric methods have not been developed like algebraic ones. We call the realization *surface realization*. Naoko Kamada and Seiichi Kamada defined *abstract link diagram*, and Scott Carter, Seiichi Kamada and Masahiko Saito showed equivalence relation among surface realizations. They are basic tools to study virtual links geometrically. By using them, we proved non-triviality of Kishino's knot, classified closed 2-string virtual braids completely, defined connected sum of virtual links and proved uniqueness of prime decomposition of a virtual link.

1 Introduction

1996年、Louis Kauffman [9] は、任意のGauss codeを幾何的対象として実現化するものとして、*virtual knot*を提唱した. 例えば、Gauss code (1 2 1 2) は通常のknotでは実現できない (Figure 1). 当初のVirtual Knot Theoryは、既にKnot Theoryにおいて代数的道具が充実している事情から、virtual linkにおいても不変量を定義して、分類を試みる研究が進んでいった. 現在もその方向の研究は進んでいる. 例えば、基本群、Sawollek polynomial [15] (Alexander polynomialのアナロジーと見なせる)、Kauffman bracket polynomial (Jones polynomialと同値) などが定義されている. 最近では、Miyazawa polynomial [13]、surface bracket polynomial [2, 3] が定義されている. 岸野敏昌 [10] は、

Figure 2 のような virtual knot (*Kishino's knot* と呼ばれている) の基本群、Sawollek polynomial、Kauffman bracket polynomial が自明な knot のそれらと同じであることを発見した. つまり、virtual knot の世界においては、割と簡単なものでも invariant による判定がしにくい場合がある. 彼はこの virtual knot の非自明性を、3-parallel 化したものの Kauffman bracket polynomial を計算することにより示した ([11] も参照せよ). ただこの計算は、手計算でするには大変な労力が必要で、実際 computer の助けを借りている. この事実に直面すると、次の 2 通りの考えにたどり着く.

(1) もっといい invariant を開発しないと！

(2) 幾何的な手法が必要だ！

どちらの考えももっともで、(1) の方向での進展が [2, 3, 13] で、実際 Miyazawa polynomial や surface bracket polynomial によって Kishino's knot の非自明性を割と容易に示すことができる. 他にその方向では、Manturov 氏の研究も参考になる. 我々が今回説明するのは、(2) の方向の進展である.

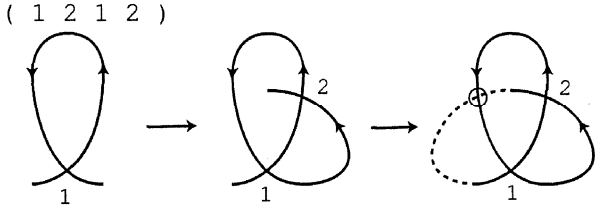


Figure 1: Gauss code (1 2 1 2)

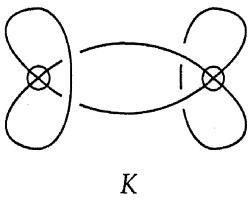


Figure 2: Kishino's knot

Kauffman [9] において既に、virtual link diagram を closed surface 上に乗せる手法が紹介されているが、詳しく追求されたとは言えない. 我々はこの手法を *surface realization* と呼ぶ. 鎌田直子-鎌田聖一 [8] において、*abstract link diagram* が定義されて調べられたのが、この方面の研究の始まりと筆者は見ている. Scott Carter-鎌田聖一-斎藤昌彦 [1] が、surface realization 間の

基本変形を明確にしてようやくvirtual linkを幾何的に研究する地盤が整ったと言える. 我々の成果は、幾何的手法により

(1) Kishino's knotの非自明性を示したこと ([4]; 次章のTheorem 1)

(2) virtual link（正確にはflat virtual link）のnumericalなinvariantを定義したこと ([5])

(3) Greg Kuperberg [12] の手法を援用して、closed 2-string virtual braidsを完全に分類したこと ([6]; 次章のTheorem 2)

(4) やはりKuperberg [12] の手法を援用して、virtual linkのconnected sumを定義し、virtual linkのprime decompositionの存在と、その一意性を示したこと ([7])

が挙げられる. (2) に関連して、flat virtual link（2章で定義する）の観点での研究は、Vladimir Turaev [17] でもなされている. (3) は、村井美咲 [14]、辻和典 [16] の結果の一般化である.

2 Virtual link

扱う対象は、向き付けられたn個のS^1からS^2や$\mathbf{R}^2$へのimmersionの像で、3重以上の点はなく、各2重点にFigure 3のような情報を持たせたものとする. 2重点は、左から順に *positive, negative, virtual crossing* といい、positiveやnegative crossingの上下を無視したものを、*flat crossing* という. *n-component virtual link diagram* とは、2重点が前3者のときをいい、*n-component flat virtual link diagram* とは、後2者のときをいう.

Virtual link diagramの間の基本変形をFigure 4のように定義し、それらの有限列で移り合うときを同値として、その同値類を *virtual link* とする. 必要に応じて向きを考えたり、考えなかったりする.

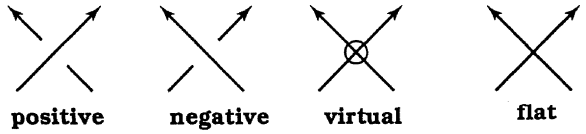


Figure 3: crossings

Virtual link diagram D の近傍を少し変化させることによって、compact surfaceとその上のdiagramの空間対を得る. これを *abstract link diagram*

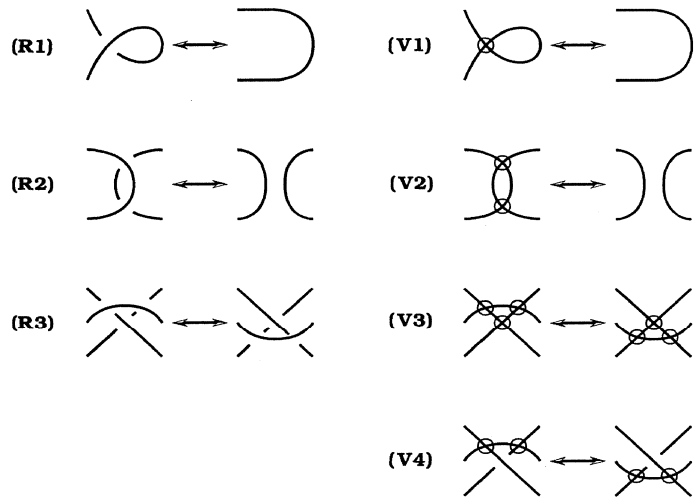


Figure 4: virtual Reidemeister move

[8] といい、$(N(\tilde{D}), \tilde{D})$ と表す. $\partial N(\tilde{D})$ を compact surface で埋めて closed surface F としたものを *surface realization* といい、$(F, \tilde{D})$ と表す (Figure 5). virtual link L のあらゆる surface realization の surface の genus の最小値を *supporting genus* といい、$sg(L)$ と表す. L が classical link、特に trivial link のとき、$sg(L) = 0$.

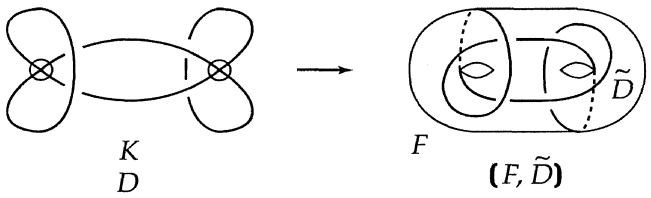


Figure 5: Surface realization (of Kishino's knot, and it is minimal)

これら基本的道具から我々が示した結果を 2 つ挙げておく.

Theorem 1 ([4]) *Let K be a Kishino's knot. Then $sg(K) = 2$.*

これは Kishino's knot の non-triviality, non-classicality を示している. 我々は flat 化した Kishino's knot の supporting genus が 2 であることを示した. H. A. Dye and L. H. Kauffman [3] では、surface bracket polynomial を計算することにより同じ結果を得ている.

以下のFigure 6のようなbraid $K_{p_1,\cdots,p_n}$ を *closed 2-string virtual braid* という．ここで、$n \geq 1, p_i \neq 0$ $(i = 1, \cdots, n)$ を仮定する．

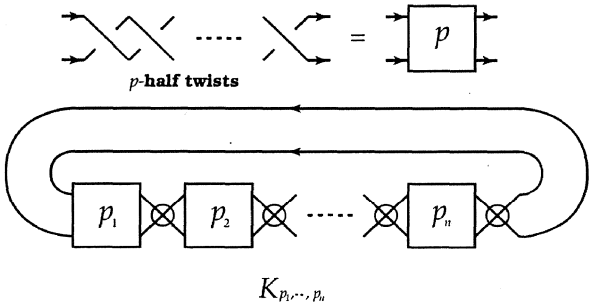


Figure 6: closed 2-string virtual braid

このとき、

Theorem 2 ([6]) *Let* $K_{p_1,\cdots,p_n}$ *and* $K_{p'_1,\cdots,p'_{n'}}$ *be two closed 2-string virtual braids. Then they are equivalent if and only if* (1) $n = n'$ *and* (2) *there exists an integer* k *such that* $i' \equiv i + k \pmod{n}$ *and* $p'_{i'} = p_i$ $(i = 1, \cdots, n)$.

surface bracket polynomialのみでは証明はできない（$n = 1, 2$ では可能だが、$n = 3$ では無理）が、情報は利用した（例えば、$n = n'$ や $sg(K_{p_1,\cdots,p_n}) = 1$ であること）．また、surface realizationだけでは足りず、一般にvirtual linkを、surfaceと閉区間の直積空間内のlinkと見なす *space realization* を用いて、3-string braid groupのある部分群と関連付けて示した．

今後の展望：virtual linkが、surfaceと閉区間の直積空間内のlinkと見なせることを利用すると、任意のoriented compact 3-manifold M 内のlinkをvirtual linkで記述することができる．M のHeegaard surfaceの近傍にlinkを集めることでそれが可能である．ただし、同値関係はFigure 4以外に生じるのが一般的な状況である．その際、M のKauffman bracket skein moduleのrelationを明確にすることが重要になってくる．

References

[1] J. S. Carter, S. Kamada and M. Saito, *Stable equivalence of knots on surfaces and virtual knot cobordisms,* Journal of Knot Theory and its Ramifications **11** (2002) 311–322.

[2] H. A. Dye, *Virtual knots undetected by 1 and 2-starnd bracket polynomials,* math.GT/0402308.

[3] H. A. Dye and L. H. Kauffman, *Minimal surface representations of virtual knots and links,* math.GT/0401035, Algebr. Geom. Topol. **5** (2005) 509–535.

[4] T. Kadokami, *Detecting non-triviality of virtual links,* Journal of Knot Theory and its Ramifications **12** (2003) 781–803.

[5] ———, *Some numerical invariants of flat virtual links are always realized by reduced diagrams,* preprint.

[6] ———, *A classification of closed 2-string virtual braids,* preprint.

[7] ———, *Connected sum and prime decomposition of virtual links,* preprint.

[8] N. Kamada and S. Kamada, *Abstract link diagrams and virtual knots,* Journal of Knot Theory and its Ramifications **9** (2000) 93–106.

[9] L. H. Kauffman, *Virtual Knot Theory,* Europ. J. Combinatorics **20** (1999) 663–690.

[10] T. Kishino, *6 kouten ika no kasou musubime no bunrui ni tuite* (in Japanese) (On the classification of virtual knots with crossing number up to six), Master Thesis, Osaka City University (2001) 1–85.

[11] T. Kishino and S. Satoh, *A note on non-classical virtual knots,* Journal of Knot Theory and its Ramifications **13** (2004) 845–856.

[12] G. Kuperberg, *What is a virtual link?,* math.GT/0208039, Algebr. Geom. Topol. **3** (2003) 587–591.

[13] Y. Miyazawa, *Magnetic graphs and an invariant for virtual links,* preprint.

[14] M. Murai, *virtual crossing 2ko no 2-braid virtual knot no bunrui* (in Japanese) (*Classification of 2-braid virtual knot with two virtual crossings*), Master Thesis, Osaka City University (2002) 1–100.

[15] J. Sawollek, *On Alexander-Conway polynomials for virtual knots and links,* math.GT/9912173.

[16] K. Tsuji, *2-braid virtual knots with 3 virtual crossings,* Master Thesis, Osaka City University (2005) 1–40.

[17] V. G. Turaev, *Virtual strings,* math.GT/0311185, Ann. Inst. Fourier **54** (2004) 2455–2525.

A sharp bilinear estimates related with the Schrödinger-improved Boussinesq system

Takafumi Akahori

Mathematical Institute, Tohoku University *
Sendai 980-8578, Japan
E-mail: sa3d01@math.tohoku.ac.jp †

We consider the Schrödinger-improved Boussinesq system:

$$\begin{cases} (i\partial_t + \Delta)u &= vu, \\ (\partial_t^2 - \Delta - \Delta\partial_t^2)v &= \Delta|u|^2, \end{cases} \tag{1}$$

where u and v are complex and real valued on $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, respectively.

The system (1) is a substitute for the Zakharov system (cf. [2] and references therein). We prescribe the data (u_0, v_0, v_1) for $(u, v, \partial_t v)$ at the initial time $t = 0$. We are interested in the existence of the solution to (1).

Our main result is the following.

Theorem 1 *Let $n \leq 3$. If $s_1 > -1/4$ and $s_2 > -1/2$, then (1) has a solution for data $(u_0, v_0, v_1) \in H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \times H^{s_2}(\mathbb{R}^n) \times H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$.*

Recently, Ozawa and Tsutaya [2] studied the Cauchy problem for (1) and proved the existence of the unique solution for the data $(u_0, v_0, v_1) \in L^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$ for $n \leq 3$. Thus our theorem is an improvement of their result.

The proof of Theorem 1 is based on the argument of Bourgain [3]. To illustrate the argument of Bourgain, we consider the following abstract nonlinear equation

$$(i\partial_t - H)u(t,x) = u^2(t,x), \tag{2}$$

where $u = u(t,x)\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ and H is a linear operator in the class of tempered distributions on $\mathbb{R}^n$. In the case where $H = \Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$, (2) is a nonlinear Schrödinger equation, where ∂_j denotes the partial differential operator with respect to the j-th component of x.

*Current address: Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan.
†E-mail: akahori@math.kyoto-u.ac.jp

We are interested in the existence of the solution to (2). We prescribe a datum f for u at the initial time $t = 0$. We formally have the integral equation associated to (2):

$$u(t) = e^{itH} f - i \int_0^t e^{i(t-t')H} u^2(t')\, dt', \tag{3}$$

where e^{itH} is the solution map of the corresponding linear equation $(i\partial_t - H)u = 0$.

Now we introduce the several notations. We use $C(\cdot, \dots, \cdot)$ to denote various constants depending on the quantities in the parentheses, which may vary from line to line. We use $\mathcal{F}_t$ and $\mathcal{F}_x$ to denote the Fourier transform in t and x, respectively. Moreover, we set $\mathcal{F} = \mathcal{F}_t \mathcal{F}_x$. For a real valued function h on $\mathbb{R}^n$, we use $h(\nabla)$ to denote the operator defined by $\mathcal{F}_x[h(\nabla)u] = h\mathcal{F}_x[u]$, thus we have $\Delta = -|\nabla|^2$. Also we use $w(\partial_t)$ to denote the operator defined by $\mathcal{F}_t[w(\partial_t)u] = w\mathcal{F}_t[u]$ for a real valued function w on $\mathbb{R}$. We write the convolution of the functions F and G on $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ as follows:

$$\int_{\substack{\tau=\tau_1+\tau_2 \\ \xi=\xi_1+\xi_2}} F(\tau_1, \xi_1) G(\tau_2, \xi_2) d\tau_1 d\xi_1.$$

We consider (2) in a special case $H = h(\nabla)$ for a real valued function h on $\mathbb{R}^n$. Then we introduce the quantity

$$\|u\|_{X^{s,b}_{h(\nabla)}} = \|\langle\nabla\rangle^s \langle\partial_t\rangle^b e^{-ith(\nabla))} u\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)}. \tag{4}$$

We note that, by the Plancherel theorem, (4) is rewritten in the form

$$\|u\|_{X^{s,b}_{h(\nabla)}} = \|\langle\xi\rangle^s \langle\tau + h(\xi)\rangle^b \mathcal{F}u\|_{L^2(\mathbb{R}_\tau\times\mathbb{R}^n_\xi)}. \tag{5}$$

We define the Bourgain space $X^{s,b}_{h(\nabla)}$ as the completion of the space of Schwartz functions by $\|\cdot\|_{X^{s,b}_{h(\nabla)}}$. For an interval I in $\mathbb{R}$, we define

$$X^{s,b}_{h(\nabla)}(I) = \{u : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \exists \widetilde{u} \in X^{s,b}_{h(\nabla)} \text{ s.t. } u = \widetilde{u}|_I\}$$

which is equipped with the norm

$$\|u\|_{X^{s,b}_{h(\nabla)}(I)} = \inf\{\|\widetilde{u}\|_{X^{s,b}_{h(\nabla)}} : \widetilde{u} \in X^{s,b}_{h(\nabla)} \text{ s.t. } u = \widetilde{u}|_I\}.$$

We seek for a (time-local) solution u of (2) with $H = h(\nabla)$ by the fixed point theorem. For this, we define the map S by

$$S(u)(t) = e^{ith(\nabla)} f - i \int_0^t e^{i(t-t')h(\nabla)} u^2(t')\, dt'.$$

Clearly the fixed point $u = S(u)$ is a solution of (2). Note that $u \in X^{s,b}_{h(\nabla)}([-T,T])$ implies that $u \in C([-T,T], H^s)$, if $b > 1/2$.

Let $B_R(T)$ be the ball in $X^{s,b}_{h(\nabla)}([-T,T])$ with radius R. We first show that S maps $B_R(T)$ into itself for sufficiently large R and sufficiently small T. What we have to show is $\|S(u)\|_{X^{s,b}_{h(\nabla)}([-T,T])} \leq R$ for all $u \in B_R(T)$. Assume that $0 < T < 1$. Let ρ be a smooth cut off function on $\mathbb{R}$ such that $\rho = 1$ on $[-1,1]$ and $\rho = 0$ outside of $[-2,2]$. We set $\rho_T(t) = \rho(t/T)$. Take any $\widetilde{u} \in X^{s,b}_{h(\nabla)}$ such that $\widetilde{u} = u$ on $[-T,T]$. Then we have

$$\|S(u)\|_{X^{s,b}_{h(\nabla)}([-T,T])} \leq \|\rho e^{ith(\nabla)} f\|_{X^{s,b}_{h(\nabla)}} + \|\rho_T \int_0^t e^{i(t-t')h(\nabla)} \widetilde{u}^2(t')\, dt'\|_{X^{s,b}_{h(\nabla)}}. \tag{6}$$

By the definition (4), the first term on the R.H.S. of (6) is equal to

$$\|\langle \partial_t \rangle^b \rho \langle \nabla \rangle^s f\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} = \|\rho\|_{H^b(\mathbb{R})} \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \tag{7}$$

On the other hand, the second term on the R.H.S. of (6) is bounded by (cf. [1])

$$C(\rho, b)\|\widetilde{u}^2\|_{X^{s,b-1}_{h(\nabla)}}. \tag{8}$$

By (5) and the duality, the factor $\|\widetilde{u}^2\|_{X^{s,b-1}_{h(\nabla)}}$ in (8) is rewritten in the form

$$\sup_{\substack{F\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \\ \|F\|_{L^2}=1}} \left| \int d\tau d\xi \int_{\substack{\tau=\tau_1+\tau_2 \\ \xi=\xi_1+\xi_2}} d\tau_1 d\xi_1 \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau + \xi \rangle^{1-b}} F(\tau,\xi) \mathcal{F}[\widetilde{u}](\tau_1,\xi_1) \mathcal{F}[\widetilde{u}](\tau_2,\xi_2) \right|. \tag{9}$$

We set $G = \langle \xi \rangle^s \langle \tau + h(\xi) \rangle^b \mathcal{F}[\widetilde{u}]$. Note that $\|G\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)} = \|\widetilde{u}\|_{X^{s,b-1}_{h(\nabla)}}$. Then (9) is bounded by

$$\sup_{\substack{F\in L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n) \\ \|F\|_{L^2}=1}} \int d\tau d\xi \int_{\substack{\tau=\tau_1+\tau_2 \\ \xi=\xi_1+\xi_2}} d\tau_1 d\xi_1 \frac{\langle \xi \rangle^s \langle \xi_1 \rangle^{-s} \langle \xi_2 \rangle^{-s} |F(\tau,\xi)||G(\tau_1,\xi_1)||G(\tau_2,\xi_2)|}{\langle \tau + h(\xi) \rangle^{1-b} \langle \tau_1 + h(\xi_1) \rangle^b \langle \tau_2 + h(\xi_2) \rangle^b}. \tag{10}$$

The main part of the argument is to bound (10) by

$$T^\theta \|F\|_{L^2} \|G\|^2_{L^2} = T^\theta \|\widetilde{u}\|^2_{X^{s,b-1}_{h(\nabla)}}$$

for some $\theta > 0$. Then, since $\widetilde{u}$ is arbitrary, we obtain the bound

$$T^\theta C(\rho, b)\|u\|^2_{X^{s,b-1}_{h(\nabla)}([-T,T])} \leq T^\theta C(\rho, b) R^2$$

for the term (8). Combining this bound and (7), we have

$$\|S(u)\|_{X^{s,b}_{h(\nabla)}([-T,T])} \leq \|\rho\|_{H^b} \|f\|_{H^s} + C(\rho, b) T^\theta R^2.$$

Finally, we choose $R = 2\|\rho\|_{H^b}\|f\|_{H^s}$ and take T so small that $T^\theta C(\rho, b)R^2 \leq R/2$. Then we have $\|S(u)\|_{X^{s,b}_{h(\nabla)}([-T,T])} \leq R$. Thus S is the map in $X^{s,b}_{h(\nabla)}([-T,T])$.

By a way similar to the above, we show that S is a contraction map in $B_R(T)$, if we take T sufficiently small. Thus we see the existence of the solution.

We comment on the estimate for (10). We set $\lambda = \tau + h(\xi)$, $\lambda_1 = \tau_1 + h(\xi_1)$ and $\lambda_2 = \tau_2 + h(\xi_2)$ in (10). We easily see that

$$\begin{aligned} |h(\xi) - h(\xi_1) - h(\xi_2)| &= |\tau - \tau_1 - \tau_2 + h(\xi) - h(\xi_1) - h(\xi_2)| \\ &\leq 3\max\{|\lambda|, |\lambda_1|, |\lambda_2|\}. \end{aligned} \tag{11}$$

for (τ, τ_1, τ_2) with $\tau = \tau_1 + \tau_2$. The relation (11) plays an important role to estimate (10). In particular, in the case where $h(\xi) = \xi^3$ ($\xi \in \mathbb{R}$), we have

$$|\xi||\xi_1||\xi_2| \leq \max\{|\lambda|, |\lambda_1|, |\lambda_2|\}.$$

The key estimates for the proof of Theorem 1 are the following bilinear estimates which correspond to the estimate for (8).

Theorem 2 *Let $n \leq 3$, $s_1, s_2 < 0$ and $0 < b < 1/2$.*
(i) If $s_1, s_2 > -1/2$, then we have

$$\|\psi\phi\|_{X^{s_1,-b}_{|\nabla|^2}} \leq C(s_1, s_2, b, n)\|\psi\|_{X^{s_1,b}_{|\nabla|^2}}\|\phi\|_{X^{s_2,b}_{\omega(\nabla)}} \tag{12}$$

for some b sufficiently close to $1/2$, where we may replace ϕ with $\overline{\phi}$ on the L.H.S. of (12).
(ii) If $s_1 > -1/4$ and $s_2 > -1$, then we have

$$\||\psi|^2\|_{X^{s_1,-b}_{\omega(\nabla)}} \leq C(s_1, s_2, b, n)\|\psi\|^2_{X^{s_1,b}_{|\nabla|^2}} \tag{13}$$

for some b sufficiently close to $1/2$.

References

[1] J. Ginibre, Y. Tsutsumi and G. Velo, On the Cauchy Problem for the Zakharov System, J. Funct. Anal. **151** (1997) 384–436.

[2] T.Ozawa and K.Tsutaya, On the Cauchy problems for Schrödinger-improved Boussinesq equations, preprint.

[3] J. Bourgain, Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, part I: Schrödinger equations, part II: the KdV-equation, Geom. Funct. Anal. **3** (1993) 107-156, 209–262.

Large time behavior of solutions to a semilinear hyperbolic system with relaxation

Yoshihiro UEDA *

1 Introduction

We consider a nonlinear relaxation system of the form:

$$\begin{cases} u_t + v_x = 0, \\ v_t + u_x = f(u) - v. \end{cases} \tag{1.1}$$

The system (1.1) describes many physical phenomena such as nonequilibrium gas dynamics, magnetohyrodynamics, viscoelasticity, flood flow with friction, etc.

If we eliminate v from (1.1), we can obtain the following dumped wave equation with nonlinear convection term:

$$u_{tt} - u_{xx} + u_t + f(u)_x = 0. \tag{1.2}$$

We consider the initial value problem for (1.2) with the initial conditions $u(0,x) = u_0(x)$, $u_t(0,x) = u_1(x)$. Our purpose is to show the global existence and asymptotic decay of solutions. Moreover, we show the asymptotic convergence of solutions toward nonlinear diffusion waves as $t \to \infty$. Orive-Zuazua [1] studied the case $f'(0) = 0$ and developed L^2 theory. We generalize their result and develop L^p theory in the general case where $|f'(0)| < 1$.

At first we state a result about the existence of global solutions in time.

Theorem 1.1 *Let $1 \le p < \infty$ and assume that $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,p}(\mathbb{R})$ and $u_1 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$. Put*

$$E_0 := \|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{W^{1,p}} + \|u_1\|_{L^1} + \|u_1\|_{L^p}.$$

Then if E_0 is sufficiently small, then the initial problem for (1.2) has a unique global solution u with

$$u \in C([0,\infty);\, L^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,p}(\mathbb{R})).$$

Moreover, the solution satisfies

$$\|u(t)\|_{L^q} \le CE_0(1+t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})} \qquad (1 \le \forall q \le \infty), \tag{1.3}$$

$$\|u_x(t)\|_{L^p} \le CE_0(1+t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}, \tag{1.4}$$

where C is a constant.

Remark. When $p = \infty$, we have a similar global exitence result in the space $L^\infty([0,\infty);\, L^1(\mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$.

*Graduate School of Mathematics, Kyushu University, Fukuoka 812-8581, Japan
ma204002@math.kyushu-u.ac.jp

Nonlinear diffusion wave:

Next, we define a nonlinear diffusion wave which describes large-time behavior of solution constructed in Theorem 1.1. To this end, we apply the Chapman-Enskog expansion to the relaxation system (1.1). At the second order approximation of the expansion, we have the following viscous conservation law:

$$w_t + f(w)_x = (\mu(w)w_x)_x\,, \qquad \mu(w) = 1 - (f'(w))^2. \tag{1.5}$$

It is known that the solution of such a viscos conservation law is asymptotically described by the nonlinear diffusion wave expressed in terms of the self-similar solution to the Burgers equation:

$$z_t + \Big(\frac{z^2}{2}\Big)_x = \mu z_{xx}, \qquad \mu = \mu(0) = 1 - (f'(0))^2. \tag{1.6}$$

Therefore, it is expected that the solution of our equation (1.2) is also asymptotic to the same diffusion wave.

For the Burgers equation (1.6), the self-similar solution z is a solution which is invariant under the scale transformation $z^\lambda(t,x) := z(\lambda^2 t, \lambda x)$ $(\lambda > 0)$, so that it takes the form $z = t^{-\frac{1}{2}}\phi(\frac{x}{\sqrt{t}})$. We denote by $z = Z(t,x;\,\mu,M)$ the self-similar solution for (1.6) which satisfies the integral condition $\int z\,dx = M$. This self-similar solution is given explicitly as

$$Z(t,x;\,\mu,M) = \sqrt{\frac{\mu}{t}}\,\frac{(e^{\frac{M}{2\mu}}-1)e^{-y^2}}{\sqrt{\pi} + (e^{\frac{M}{2\mu}}-1)\displaystyle\int_y^\infty e^{-\xi^2}d\xi}\,, \qquad y = \frac{x}{\sqrt{4\mu t}}\,. \tag{1.7}$$

The nonlinear diffusion wave $w = W(t,x)$ for (1.2) is then defined by

$$W(t,x) = \beta^{-1}Z(t, x-\alpha t;\,\mu,\beta M)\,, \qquad M := \int (u_0 + u_1)\,dx, \tag{1.8}$$

where $\mu = 1 - (f'(0))^2$, $\alpha = f'(0)$, $\beta = f''(0)$. We note that this diffusion wave $w = W(t,x)$ has the conserved quantity $\int w\,dx = M = \int(u_0 + u_1)dx$ and satisfies

$$w_t + \Big(\alpha w + \frac{\beta}{2}w^2\Big)_x = \mu w_{xx}, \tag{1.9}$$

which is an approximation to (1.5).

We show that the global solution in Theorem 1.1 is asymptotic to the nonlinear diffusion wave defined above. We use the space L^1_1 which consists of functions f satisfying $(1+|x|)f \in L^1$.

Theorem 1.2 *Let $1 \le p < \infty$ and assume that $u_0 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap W^{1,p}(\mathbb{R})$ and $u_1 \in L^1_1(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$. Let $u(t,x)$ be the corresponding global solution of (1.2) constructed in Theorem 1.1, and let $W(t,x)$ be the nonlinear diffusion wave defined by (1.8). Put $w(t,x) = W(t+1,x)$ and*

$$E_1 := \|u_0\|_{L^1_1} + \|u_0\|_{W^{1,p}} + \|u_1\|_{L^1_1} + \|u_1\|_{L^p}.$$

Then, for any $\epsilon > 0$, there is a positive constant δ_1 such that if $E_1 \le \delta_1$, then we have the following asymptotic relations:

$$\|(u-w)(t)\|_{L^q} \le CE_1(1+t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}+\epsilon} \qquad (1 \le \forall q \le \infty), \tag{1.10}$$

$$\|(u-w)_x(t)\|_{L^p} \le CE_1 t^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}+\epsilon}, \tag{1.11}$$

where C is a constant.

The key to the proof of these theorems is the derivation of detailed pointwise estimates of fundamental solutions to the linearized equation for (1.2). Pointwise estimates are derived by using the technique of Liu-Zeng [2], and the optimal decay estimates in L^p space are based on the pointwise estimates.

2 Fundamental solutions in Fourier space

We consider the linearized equation of (1.2):

$$u_{tt} - u_{xx} + u_t + \alpha u_x = 0, \tag{2.1}$$

with the initial conditions $u(0,x) = u_0(x)$, $u_t(0,x) = u_1(x)$. Taking the Fourier transform, we have

$$\hat{u}_{tt} + \hat{u}_t + (\xi^2 + \alpha i\xi)\hat{u} = 0, \tag{2.2}$$

with the corresponding initial conditions $\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi)$, $\hat{u}_t(0,\xi) = \hat{u}_1(\xi)$. The characteristic equation of (2.2) becomes $\lambda^2 + \lambda + (\xi^2 + \alpha i\xi) = 0$, and the eigenvalues are given by $\lambda_1(\xi) = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 - 4(\xi^2 + \alpha i\xi)}\,)$, $\lambda_2(\xi) = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1 - 4(\xi^2 + \alpha i\xi)}\,)$. Then the solution of (2.2) can be expressed as

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{G}(t,\xi)(\hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi)) + \hat{H}(t,\xi)\hat{u}_0(\xi), \tag{2.3}$$

where

$$\hat{G}(t,\xi) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}), \quad \hat{H}(t,\xi) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\big((1+\lambda_1)e^{\lambda_2 t} - (1+\lambda_2)e^{\lambda_1 t}\big).$$

The functions $G(t,x)$ and $H(t,x)$ are called fundamental solutions of (2.1).

We give asymptotic expressions of $\hat{G}(t,\xi)$ for $|\xi| \to 0$ and $|\xi| \to \infty$. Similar expressions for $\hat{H}(t,\xi)$ are omitted here.

Case 1. In the low frequency region where $\xi \in \mathbb{C}$ and $|\xi| \to 0$, we have an expression $\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{R}_0$ with

$$\hat{G}_0 = e^{-(\alpha i\xi + \mu\xi^2)t}, \qquad \hat{R}_0 = e^{-(\alpha i\xi + \mu\xi^2)t}\hat{R}_{0,1} + e^{-t}\hat{R}_{0,2},$$

where

$$|\hat{R}_{0,1}| \le C|\xi|(|\xi|^2 t + 1)e^{C|\xi|^3 t}, \quad |\hat{R}_{0,2}| \le Ce^{C|\xi|t}.$$

Also, we have another expression of the form

$$\hat{G} = e^{-(\alpha i\xi + \mu\xi^2)t}\hat{G}_1 + e^{-t}\hat{G}_2, \qquad |\hat{G}_1| \le Ce^{C|\xi|^3 t}, \quad |\hat{G}_2| \le Ce^{C|\xi|t}.$$

Case 2. In the high frequency region where $\xi \in \mathbb{C}$ and $|\xi| \to \infty$, we have an expression $\hat{G} = \hat{G}_\infty^{(l)} + \hat{R}_\infty^{(l)}$ with $\hat{G}_\infty^{(l)} = 0$ $(l = 0)$ and

$$\hat{G}_\infty^{(l)} = \sum_{k=0}^{l-1}\{e^{-(\kappa - i\xi)t}P_k(t) + e^{-(\nu + i\xi)t}Q_k(t)\}(i\xi)^{-k-1} \quad (l \ge 1),$$
$$\hat{R}_\infty^{(l)} = \{e^{-(\kappa - i\xi)t}P_l(t) + e^{-(\nu + i\xi)t}Q_l(t)\}(i\xi)^{-l-1} + e^{-(\kappa - i\xi)t}\hat{R}_{\infty,1}^{(l)} + e^{-(\nu + i\xi)t}\hat{R}_{\infty,2}^{(l)} \quad (l \ge 0),$$

where $P_k(t)$, $Q_k(t)$ are polynomials of t with degree k and

$$|\hat{R}_{\infty,1}^{(l)}| + |\hat{R}_{\infty,2}^{(l)}| \le C|\xi|^{-l-2}(1+t)^{l+1}e^{C|\xi|^{-1}t}.$$

3 Fundamental solutions

We give expressions of the fundamental solution $G(t,x)$ with detailed pointwise estimates.

Proposition 3.1 *G can be expressed as $G = G_0 + G_\infty^{(l)} + R^{(l)} = G_\infty^{(l)} + R_\infty^{(l)}$. Here*

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi\mu t}} e^{-\frac{(x-\alpha t)^2}{4\mu t}}, \qquad G_\infty^{(l)} = 0 \quad (l = 0),$$
$$\partial_x^l G_\infty^{(l)} = \sum_{k=0}^{l-1} \{e^{-\kappa t} P_k(t) \partial_x^{l-k-1} \delta(x+t) + e^{-\nu t} Q_k(t) \partial_x^{l-k-1} \delta(x-t)\} \quad (l \geq 1),$$

where $P_k(t)$, $Q_k(t)$ are the polynomials of t appeared in the previous section and δ is the Dirac delta function. The remainder terms satisfy the following pointwise estimates:

$$|\partial_x^l R^{(l)}| \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{l+1}{2}} e^{-c\frac{(x-\alpha t)^2}{t}} + Ce^{-c(t+|x|)},$$
$$|\partial_x^l R_\infty^{(l)}| \leq C(1+t)^{-\frac{l+1}{2}} e^{-c\frac{(x-\alpha t)^2}{t}} + Ce^{-c(t+|x|)}.$$

This result implies that the fundamental solution G can be well approximated by the heat kernel G_0 as $t \to \infty$. We have a similar expression also for H.

Proposition 3.2 *We can express H as $H = H_\infty^{(l)} + S_\infty^{(l)}$. Here*

$$\partial_x^l H_\infty^{(l)} = \sum_{k=0}^{l} \{e^{-\kappa t} \tilde{P}_k(t) \partial_x^{l-k} \delta(x+t) + e^{-\nu t} \tilde{Q}_k(t) \partial_x^{l-k} \delta(x-t)\},$$

where $\tilde{P}_k(t)$, $\tilde{Q}_k(t)$ are some polynomials of t with degree k and δ denotes the Dirac delta function. The remainder term satisfies the following pointwise estimate:

$$|\partial_x^l S_\infty^{(l)}| \leq C(1+t)^{-\frac{l+2}{2}} e^{-c\frac{(x-\alpha t)^2}{t}} + Ce^{-c(t+|x|)}.$$

As a corollary of the above pointwise estimates of the fundamental solutions, we have the following $L^p - L^q$ estimates for solutions to the linearized equation (2.1).

Proposition 3.3 *Let $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Then we have the following $L^p - L^q$ estimates:*

$$\|\partial_x^l G(t) * f\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{l}{2}} \|f\|_{L^q} + Ce^{-ct} \|f\|_{W^{l-1,p}} \quad (l \geq 1),$$
$$\|\partial_x^l G(t) * f\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \|f\|_{L^q} \quad (l = 0),$$
$$\|\partial_x^l H(t) * f\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{l+1}{2}} \|f\|_{L^q} + Ce^{-ct} \|f\|_{W^{l,p}} \quad (l \geq 0).$$

Moreover, G is approximated by G_0 in the following sense:

$$\|\partial_x^l (G - G_0)(t) * f\|_{L^p} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})-\frac{l}{2}} (1+t)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^q} + Ce^{-ct} \|f\|_{W^{l-1,p}} \quad (l \geq 1),$$
$$\|\partial_x^l (G - G_0)(t) * f\|_{L^p} \leq Ct^{-\frac{1}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} (1+t)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^q} \quad (l = 0).$$

4 Outline of proof of Theorem 1.1

By the Duhamel principle, we see that the solution to the nonlinear equation (1.2) satisfies

$$u(t) = G(t) * (u_0 + u_1) + H(t) * u_0 - \int_0^t G(t-s) * g(u)_x(s) ds, \tag{4.1}$$

where $g(u) := f(u) - f(0) - f'(0)u$. We introduce a mapping Φ by

$$\Phi[u](t) := G(t) * (u_0 + u_1) + H(t) * u_0 - \int_0^t G(t-s) * g(u)_x(s) ds, \tag{4.2}$$

and solve the integral equation (4.1) by applying the contraction mapping principle. To this end, we consider the Banach space $X := C([0,\infty); L^1 \cap W^{1,p})$ $(1 \le p < \infty)$ with the norm

$$\|u\|_X := \sup_{0\le s\le t} \{\|u\|_{L^1} + (1+s)^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^\infty} + (1+s)^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}}\|\partial_x u\|_{L^p}\},$$

and also a closed convex subset $S := \{u \in X;\ \|u\|_X \le 2C_0E_0\}$. Then, applying the $L^p - L^q$ estimates in Proposition 3.3 to (4.2), we have:

Claim: There are positive constants δ_0 and C_0 such that if $E_0 \le \delta_0$, then Φ is a contraction mapping of S into S.

Consequently, we find a unique fixed point $u \in S$ of Φ, and this fixed point is the desired global solution to (1.2).

5 Outline of proof of Theorem 1.2

The diffusion wave w solves (1.9) and hence the integral equation

$$w(t) = G_0(t) * w_0 - \frac{\beta}{2}\int_0^t G_0(t-s) * (w^2)_x(s)ds, \tag{5.1}$$

where $w_0(x) = W(1,x)$. Subtract (5.1) from (4.1), we have

$$\begin{aligned} u(t) - w(t) =& \{G(t) - G_0(t)\} * (u_0 + u_1) + G_0(t) * (u_0 + u_1 - w_0) \\ &+ H(t) * u_0 - \frac{\beta}{2}\int_0^t \{G(t-s) - G_0(t-s)\} * (u^2)_x(s)ds \\ &- \frac{\beta}{2}\int_0^t G_0(t-s) * (u^2 - w^2)_x(s)ds - \int_0^t G(t-s) * \{g(u) - \frac{\beta}{2}u^2\}_x(s)ds. \end{aligned} \tag{5.2}$$

We can show the desired inequalities (1.10) and (1.11) by estimating (5.2) in the same way as in the proof of Theorem 1.1.

References

[1] R. Orive and E. Zuazua, Long-time behaivior of solutions to a non-linear hyperbolic relaxation system, (preprint 2003).

[2] T.-P. Liu and Y. Zeng, Large time behabior of solutions for general quasilinear hyperbolic-parabolic systems of conservation laws, Memoirs 599, AMS, 1997.

[3] T. Iguchi and S. Kawashima, On space-time decay properties of solutions to hyperbolic-elliptic coupled systems, Hiroshima Math. J., 32 (2002), 119–308.

A new example of supergroups

January 16, 2006

Daisuke Kato
Department of Mathematics, Keio University
e-mail: y11535@educ.cc.keio.ac.jp

1 Introduction

The ground field is fixed to $\mathbb{C}$ in this talk.

The notion of supergroups arises in the middle of 1960's in the study of the Hamiltonian formalism of spin systems ([1]), and it is applied for supersymmetric (SUSY) quantum field theory, especially supergravity (SUGRA).

There is many applications of supergroups for physics, though we restrict our interest to purely mathematical aspects in this talk.

Supergroups are groups and they are roughly separated to two classes, algebraic supergroups and Lie supergroups. We can consider that algebraic supergroups are a type of generalization of algebraic groups, and Lie supergroups are a type of generalization of Lie groups. Many methods to study algebraic groups or Lie groups is available for also supergroups. A Lie supergroup $D(2,1;i)$ $(i=\sqrt{-1})$ is dealt in this talk.

In this section, we see where this $D(2,1;i)$ stands in whole theory of Lie supergroups. Like as Lie groups and Lie algebras, we can consider Lie correspondence. For each Lie supergroups, the corresponding infinitesimal object is called its Lie superalgebra.

The classification of finite–dimensional complex simple Lie superalgebras is accompliched by Kac[4], and he roughly classified them to four types, classical, exceptional, Cartan type, and queer type.

$D(2,1;a)$ is a family of exceptional Lie superalgebras parametrized $a \in \mathbb{C}$, and a Lie supergroups corresponding to $D(2,1;a)$ is the topics of this talk.

A maximal solvable subgroup is called a Borel subuspergroup. The purpose of this talk is to determine the exponential mapping of a Borel subuspergroup of G such that $\mathrm{Lie}(G) = D(2,1;i)$.

2 Lie superalgebra $D(2,1;a)$

The definition of Lie superalgebras is the following

Definition 1 Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ be a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$–graded vector space. We denote the grading of $v \in \mathfrak{g}_0 \coprod \mathfrak{g}_1$ by $\tilde{v}$. In other words, $\tilde{v} = 0$ if and only if $v \in \mathfrak{g}_0$, and $\tilde{v} = 1$ if and only if $v \in \mathfrak{g}_1$. We should remark $\tilde{v} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. If a bilinear form $[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ satisfy three following conditions

(1)
$$\widetilde{[u,v]} = \tilde{u} + \tilde{v}.$$

(2)
$$[u,v] = -(-1)^{\tilde{u}\tilde{v}}[v,u].$$

(3)
$$[u,[v,w]] + (-1)^{(\tilde{u}+\tilde{v})\tilde{w}}[w,[u,v]] + (-1)^{\tilde{u}(\tilde{v}+\tilde{w})}[v,[w,u]] = 0,$$

$[\ ,\ ]$ is called a Lie superbracket and $\mathfrak{g}$ is called a Lie superalgebra.

The notion of roots has meanings also in the theory of Lie superalgebras. And a simple Lie superalgebra can be identified with Dynkin diagrams and Cartan matrices. The differenct point is the correspondence between Lie superalgebras and Dynkin diagrams (and also Cartan matrices) is not generally 1 to 1.

A standard Cantan matrix of $D(2,1;a)$ is

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -a \\ 0 & -a & 2a \end{pmatrix}. \tag{1}$$

The construction of the simple Lie superalgebra whose Cartan matirix is (1) is the following. Prepare generators $h_1, h_2, h_3, e_1, e_2, e_3, f_1, f_2, f_3$ (only e_2 and f_2 are odd elements) and asuume a relation

$$\begin{aligned} [h_i, h_j] &= 0 \\ [h_i, e_j] &= a_{ij} e_j \\ [h_i, f_j] &= a_{ij} f_j \\ [e_i, f_j] &= \delta_{ij} h_j \end{aligned}$$

where a_{ij} are elements of Cartan matrix and δ_{ij} is the Kronecker delta. Then a vector space spanned by

$$\begin{aligned} &\{h_i, h_j, h_k; 1 \leq i,j,k \leq 3\} \cup \\ &\quad \{[e_{i_1}, [e_{i_2}, [\cdots, [e_{i_{k-1}}, e_{i_k}]]\cdots]]; 1 \leq i_1, \cdots, i_k \leq 3, k \in \mathbb{N}\} \cup \\ &\quad\quad \{[f_{i_1}, [f_{i_2}, [\cdots, [f_{i_{l-1}}, f_{i_l}]]\cdots]]; 1 \leq i_1, \cdots, i_l \leq 3, l \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

is a Lie superalgebra, and we denote it by $\widetilde{D(2,1;a)}$. We denote

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &:= < h_1, h_2, h_3 > \\ \tilde{\mathfrak{n}_+} &:= < e_1, e_2, e_3, [e_1, e_2], \cdots, [e_{i_1}, [e_{i_2}, [\cdots, [e_{i_{k-1}}, e_{i_k}]]\cdots], \cdots > \\ \tilde{\mathfrak{n}_-} &:= < f_1, f_2, f_3, [f_1, f_2], \cdots, [f_{i_1}, [f_{i_2}, [\cdots, [f_{i_{l-1}}, f_{i_l}]]\cdots]], \cdots > \end{aligned}$$

$\widetilde{D(2,1;a)}$ is not a simple Lie superalgebra, and we need to take the quotient algebra by a maximal ideal contained in $\tilde{\mathfrak{n}_+} \cup \tilde{\mathfrak{n}_-}$ in order to construct a simple Lie superalgebra. A maximal ideal like such is

$$J = < [e_1, e_3], [e_2, e_2], [e_1, [e_1, e_2]], [e_2, [e_1, e_2]], [e_2, [e_2, e_3]], [e_3, [e_2, e_3]],$$
$$[e_1, [e_1, [e_2, e_3]]], [e_3, [e_1, [e_2, e_3]]], [e_1, [e_2, [e_1, [e_2, e_3]]]], [e_3, [e_2, [e_1, [e_2, e_3]]]] >$$
$$\oplus < [f_1, f_3], [f_2, f_2], [f_1, [f_1, f_2]], [f_2, [f_1, f_2]], [f_2, [f_2, f_3]], [f_3, [f_2, f_3]],$$
$$[f_1, [f_1, [f_2, f_3]]], [f_3, [f_1, [f_2, f_3]]], [f_1, [f_2, [f_1, [f_2, f_3]]]], [f_3, [f_2, [f_1, [f_2, f_3]]]] >$$

We define

$$D(2,1;a) := \widetilde{D(2,1;a)}/J, \quad \mathfrak{n}_+ := \tilde{\mathfrak{n}_+}/(J \cap \tilde{\mathfrak{n}_+}), \quad \mathfrak{n}_- := \tilde{\mathfrak{n}_-}/(J \cap \tilde{\mathfrak{n}_-})$$

and

$$e_4 := [e_1, e_2], \quad e_5 := [e_2, e_3], \quad e_6 := [e_3, [e_2, e_1]], \quad e_7 := [e_2, [e_3, [e_2, e_1]]]$$

$$f_4 := [f_1, f_2], \quad f_5 := [f_2, f_3], \quad f_6 := [f_3, [f_2, f_1]], \quad f_7 := [f_2, [f_3, [f_2, f_1]]].$$

$\{e_1, \cdots, e_7\}$ form a basis of $\mathfrak{n}_+$ and $\{f_1, \cdots, f_7\}$ form a basis of $\mathfrak{n}_-$, so $D(2,1;a)$ is a 9|8–dimensional Lie superalgebra.

3 An irreducible representation of $D(2,1;i)$

In order to construct a finite dimensional irreducuble representation of $D(2,1;i)$, we use a type of infinite dimesnional representation— called Verma module, and its quotient module. The construction of Verma module does not depend on $a \in \mathbb{C}$, though we construct an irreducible representation in the situation a is fixed to i. For this reason, we deal with the case of general $a \in \mathbb{C}$ in the first half of this section, and deal with the case of $a = i$ in the latter half of this section.

Like as Lie algebras, we can consider objects like universal enveloping algebras, and it is called universal enveloping superalgebras ([5]). For Lie superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$(Gel'fand–Naimark decomposition), its Verma module M_Λ depends on $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$. Its representaion space is defined by

$$M_\Lambda := \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) \otimes \mathbb{C}v_\Lambda$$

(v_Λ is a non–zero vector of 1–dimensional vector space $\mathbb{C}v_\Lambda$), and the action of $\mathfrak{g}$ on M_Λ is defined by

$$h_i(1 \otimes v_\Lambda) := \Lambda(h_i) \otimes v_\Lambda$$
$$e_i(1 \otimes v_\Lambda) := 0$$
$$f_i(1 \otimes v_\Lambda) := f_i \otimes v_\Lambda$$

There is a nice class in Lie superalgebras called generalized Kac–Moody superalgebras , and representation theory on it is well–studied. On the other

hand, $D(2,1;a)$ is not a generalized Kac–Moody superalgebra if $a \neq 1$, so we cannot apply this theory directly to $D(2,1;i)$. However, we can get the following results in the $D(2,1;i)$ case.

Proposition 1 *If* $\mathfrak{g} = D(2,1;i)$ *and* $\Lambda(h_3) = 0$,

(1)

$$U_0 := \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) f_1^{\Lambda(h_1)+1} \oplus \mathcal{U}(\mathfrak{n}_-) f_3$$

is a submodule of M_Λ.

(2) If a submodule U *of* M_Λ *contains* U_0, *then the quotient module* M_Λ/U *is an integrable representation.*

Proposition 2 *If* $\Lambda(h_1) = 1, \Lambda(h_2) = 0, \Lambda(h_3) = 0$,

(1) There are 8 different integrable representaions and 7 of them are reducible.

(2)

$$\begin{aligned} U :=< f_2, f_3, f_1f_2f_1, f_1f_3f_2f_1, f_3^2f_2f_1, f_3f_2f_3f_2f_1, f_1^2f_2f_3f_2f_1, \\ f_3f_1f_2f_3f_2f_1, f_3f_2f_1f_2f_3f_2f_1, f_1f_2f_1f_2f_3f_2f_1 > \end{aligned}$$

is the maximal proper submodule such that $U \supset U_0$ *and* M_Λ/U *is a* $4|3$*–dimesnional irreducible representation.*

4 The exponential of a Borel subsuperalgebra of $D(2,1;i)$

Roughly speaking, Lie supergroups are supermanifolds with groups structure and we regard them as a type of generalization of Lie groups. See [2] for general theory of supermanifolds and Lie supergroups. Like as Lie groups and Lie algebras, there is Lie correspondence between Lie supergroups and Lie superalgebras, and it is given by the exponential mapping.

We have found $4|3$–dimensional representation of $D(2,1;i)$, and we can consider

$$\mathrm{Exp}(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \tag{2}$$

where $A \in \pi(D(2,1;i))$ (Here we denote π the representation got in the previous section.). (2) will be got by solving a system of inhomogeneous linear ODEs, so it is possible that we will get the explicit form. However, the solution of the system of ODEs defining (2) is very complicated, and it is hard to calculate. For this reason, the author determined $\mathrm{Exp}(A)$ for $A \in \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h}$.

Berezin–Kac proved the exponential mapping is a local isomorphism in the category of supermanifolds, so determining the explicit form of the exponential mapping has the meaning as a local coordinate function near the unit element as a Lie supergroup.

References

[1] F.A.Berezin, *The method of second quantization*, Pure and Applied Physics 24, Academic Press, 1966.

[2] F.A.Berezin, *Introduction to superanalysis*, Mathematical Physics and Applied Mathematics 9, Reidel, 1991.

[3] F.A.Berezin, G.I.Kac, Lie groups with commuting and anticommuting parameters (in Russian), Mat. Sbornik Novaya Serie **82** (1970) 343–359.

[4] V.G.Kac, Lie superalgebras, Adv.Math. **26** (1977) 8–96.

[5] L.E.Ross, Representations of graded Lie algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965) 17–23.

On subriemannian contact manifolds

by
Yumiko Kitagawa

Division of Integrated Sciences
Graduate School of Human Culture
Nara Women's University

Subriemannian geometry has recently attracted a great deal of attention by new phenomena never arising in riemannian geometry but peculiar to subriemannian geometry. A subriemannian manifold (M, D, g) is a differential manifold M endowed with a subbundle D of the tangent bundle TM and a riemannian metric g on D. (A *riemannian metric* on a bundle D is a smooth section $p \to g_p$ of the bundle $D^* \otimes D^*$ such that for each $p \in M$ the bilinear form $D(p) \times D(p) \ni (v, w) \to g_p(v, w) \in \mathbf{R}$ is symmetric and strictly positive definite. It is clear that one can always construct a riemannian metric on any subbundle D of TM by just taking a riemannian metric on TM and restricting it to D. Conversely, every riemannian metric on a smooth distribution D on M arises in this way, as can be shown by using partitions of unity.) We say that a subriemannian manifold (M, D, g) is isomorphic to (M', D', g') if there exists a diffeomorphism $\varphi : M \to M'$ such that $\varphi_* D = D'$, $\varphi^* g' = g$. Contrary to riemannian geometry, it is not a priori clear whether the automorphism group $\mathrm{Aut}(M, D, g)$ of a subriemannian manifold (M, D, g) makes a finite dimensional Lie group.

A local vector field X on M is called an infinitesimal automorphism of (M, D, g) if $L_X D \subset D$ and $L_X g = 0$. Let $\mathcal{L}$ be the sheaf of germs of infinitesimal automorphisms of (M, D, g) and $\mathcal{L}_a$ the stalk of $\mathcal{L}$ at $a \in M$.

If the evaluation map $\mathcal{L}_a \ni [X]_a \mapsto X_a \in T_aM$ is surjective for all $a \in M$ (where we denote by $[X]_a$ the germ of X at a and by X_a the value of X at a), we say that $\mathcal{L}$ is transitive or that (M, D, g) is homogeneous. Note that if M is connected and if $\mathcal{L}$ is transitive then $\mathrm{Aut}(M, D, g)$ is transitive and all stalks of $\mathcal{L}$ are isomorphic to each other.

Simple but non-trivial and interesting class of subriemannian manifolds may be that of the subriemannian contact manifolds: A subriemannian manifold (M, D, g) is called a subriemannian contact manifold if D is a contact structure, that is, of codimension 1 and non-degenerate.

In this talk we study the structure of the Lie algebra $\mathcal{L}_a$ for a point a of a homogeneous subriemannian contact manifold (M, D, g) of dimension $2n+1$ through the viewpoint of nilpotent geometry ([3], [4]).

We first introduce the contact filtration $\{\mathcal{L}_a^p\}_{p\in\mathbf{Z}}$ of $\mathcal{L}_a$. Then, passing to the projective limit: $L = \varprojlim_k \mathcal{L}_a/\mathcal{L}_a^k$, $L^p = \varprojlim_k \mathcal{L}_a^p/\mathcal{L}_a^k$, we obtain a Lie algebra L and its filtration $\{L^p\}_{k\in\mathbf{Z}}$. The filtered Lie algebra $(L, \{L^p\})$ is called the formal algebra of $\mathcal{L}$ at a and is a transitive filtered Lie algebra (TFLA) of depth 2 in the sense of Morimoto [3]. In fact, the formal algebras L arising from the homogeneous subriemannian contact manifolds form a special class of TFLA's and are called the subriemannian contact TFLA's.

We study structures of subriemannian contact TFLA's, following the general theory for TFLA's developed in [3]. We first show that any subriemannian contact TFLA L is finite dimensional and of dimension not greater than $(n+1)^2$. Moreover, if L is maximal, that is, L attains the maximal dimension $(n+1)^2$, then the associated graded Lie algebra grL is isomorphic to a unique transitive graded Lie algebra $\mathfrak{k} = \oplus\mathfrak{k}_p$.

Next we shall determine concretely the structures of maximal subriemannian contact TFLA's K. In order to do this, we first examine the cohomology group associated with the graded Lie algebra $\mathfrak{k}$. Then, on the basis of these results, we obtain our main theorem. In particular, we shall show: *If K is a maximal subriemannian contact TFLA, then K is isomorphic to the graded Lie algebra* $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{u}(n+1)$, *or* $\mathfrak{u}(n,1)$.

It is shown by Morimoto [5] that there exists a canonical Cartan connection associated with a subriemannian manifold satisfying certain regularity

conditions. Using this Cartan connection, we see, in particular, that the stalk $\mathcal{L}_a$ is isomorphic to its formal algebra L. Thus the above results for the formal algebras L also hold for $\mathcal{L}_a$.

References

[1] Y. Kitagawa, The infinitesimal automorphisms of a homogeneous subriemannian contact manifold, memoirs of Nara Women's University, No.20, (2005), pp. 147–163.

[2] R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications, American Mathematical Society (Mathematical Surveys and Monographs Volume 91), 2000.

[3] T. Morimoto, Transitive Lie algebras admitting differential systems, Hokkaido Math. J. vol.17 (1988), pp. 45–81.

[4] T. Morimoto, Lie algebras, geometric structures and differential equations on filtered manifolds, Advance Studies in Pure Mathematics 37 (2002), pp. 205–252.

[5] T. Morimoto, The curvatures of a subriemannian manifold (in Japanese), RIMS Kokyuroku (2004), pp. 109–113.

A CHARACTERIZATION OF PSEUDO-EINSTEIN REAL HYPERSURFACES

MAYUKO KON

Let M be a Kähler manifold with almost complex structure J and metric g. Holomorphic sectional curvature is defined by $K(p) = g(R(X, JX)JX, X)$ where a unit vector X in $p \in T_x(M)$. If $K(p)$ is a constant for all J-invariant planes $p \in T_x(M)$ and for all points $x \in M$, then M is called a complex space form. We study real hypersurfaces of complex space forms with nonzero constant holomorphic sectional curvature under some condition on the Ricci tensor.

In 1968, Nomizu studied hypersurfaces in Euclidean spaces so that the curvature tensor R satisfies $R(X, Y)R = 0$ (locally semi-symmetric), which is a condition weaker than $\nabla R = 0$ (locally symmetric). The relationship between this condition and the condition $R(X, Y)S = 0$ (Ricci semi symmetric) was studied by Ryan [7] for hypersurfaces in real space forms, where S denotes the Ricci tensor. For real hypersurfaces of complex space forms, Kimura and Maeda [3] (see also [2]) proved that there are no Ricci semi symmetric real hypersurfaces in CP^n, $n \geq 3$.

In this talk, we study a real hypersurface M satisfying the condition that

$$g((R(X, Y)S)Z, W) = 0 \text{ for any tangent vector fields } X, Y, Z \text{ and } W \text{ orthogonal to } \xi := JN, \qquad (*)$$

where N is the unit normal of M in a complex space form $M^n(c)$ with complex structure J.

Let g be the induced metric of M. We define a tensor field ϕ of type (1,1) and a 1-form η by

$$JX = \phi X + \eta(X)N,$$

where ϕX is the tangential part of JX. (ϕ, ξ, η, g) defines an almost contact metric structure on M.

We denote by $\tilde{\nabla}$ the operator of covariant differentiation in $M^n(c)$, and by ∇ the one induced on M. Then the Gauss and Weingarten formulas are given by

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y)N, \qquad \tilde{\nabla}_X N = -AX,$$

where A is the shape operator of M.

The equation of Gauss is given by

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(\phi Y,Z)\phi X \\ &\quad -g(\phi X,Z)\phi Y - 2g(\phi X,Y)\phi Z\} \\ &\quad +g(AY,Z)AX - g(AX,Z)AY, \end{aligned}$$

which implies that the Ricci tensor S of M is given by

$$SX = (2n+1)cX - 3c\eta(X)\xi + hAX - A^2X, \tag{1}$$

where $h(:= \mathrm{trA})$ is the mean curvature of M. Moreover, the scalar curvature $r(:= \mathrm{trS})$ of M is given by

$$r = 4c(n^2-1) + h^2 - \mathrm{tr}A^2.$$

If the Ricci tensor S of M satisfies $g(SX,Y) = ag(X,Y)$ where a is a constant, then M is called an Einstein real hypersurface. If S satisfies $g(SX,Y) = ag(X,Y) + b\eta(X)\eta(Y)$ for some constants a and b, then M is called a pseudo-Einstein real hypersurface. Kon [4] classified pseudo-Einstein real hypersurfaces of a complex projective space and proved that any real hypersurface of a complex projective space is not Einstein, which is improved by Cecil and Ryan [1] in case that a and b are functions. Montiel [5] proved the corresponding results in the case that the ambient manifold is a complex hyperbolic space.

Lemma. *Let M be a real hypersurface satisfying the condition (*) of a complex space form $M^n(c)$, $c \neq 0$, $n \geq 3$. Then we have*

$$g(SX,Y) = \frac{1}{2n-2}(r - g(S\xi,\xi))g(X,Y),$$

for any vector fields X and Y orthogonal to ξ.

Using this, we prove the following

Theorem. *Let M be a real hypersurface of $M^n(c)$, $c \neq 0$, $n \geq 3$. M satisfies $g((R(X,Y)S)Z,W) = 0$ for any tangent vector fields X, Y, Z and W orthogonal to ξ if and only if M is pseudo-Einstein.*

Proof. We suppose that M satisfies the condition (*). We can choose a local field of orthonormal frames $\{X_1, \cdots, X_{2n-2}, \xi\}$ of M such that the shape operator A is represented by a matrix form

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 & h_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{2n-2} & h_{2n-2} \\ h_1 & \cdots & h_{2n-2} & \alpha \end{bmatrix}.$$

Using Lemma, we see that at most one h_i does not vanish. Thus we can assume that $h_i = 0$ for $i \geq 2$. We set $a = g(SX_i, X_i)$. Then we have

$$\begin{aligned} &SX_1 = aX_1 + h_1(h - \lambda_1 - \alpha)\xi, \\ &SX_i = aX_i \quad (i = 2, \cdots, 2n-2), \\ &S\xi = h_1(h - \lambda_1 - \alpha)X_1 + ((2n-2)c + \alpha h - h_1^2 - \alpha^2)\xi. \end{aligned}$$

From these equations and the equation of Gauss, for any $j \geq 2$, we obtain

$$\begin{aligned} 0 &= g(R(X_1, X_j)SX_1, X_j) - g(SR(X_1, X_j)X_1, X_j) \\ &= h_1(h - \lambda_1 - \alpha)g(R(X_1, X_j)\xi, X_j). \end{aligned}$$

By the equation of Gauss, we have

$$g(R(X_1, X_j)\xi, X_j) = -h_1\lambda_j.$$

These equations imply that $h_1(h - \lambda_1 - \alpha) = 0$. So we see that M is pseudo-Einstein.

Conversely, if M is pseudo-Einstein, we have $SZ = aZ + b\eta(Z)\xi = aZ$ and $SW = aW$ for any tangent vectors Z and W orthogonal to ξ. Then we have

$$g((R(X,Y)S)Z, W) = g(R(X,Y)SZ, W) - g(SR(X,Y)Z, W) = 0.$$

q.e.d.

References

[1] T. E. Cecil and P. J. Ryan, *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. **269** (1982), 481-499.

[2] U-H. Ki, H. Nakagawa and Y. J. Suh, *Real hypersurfaces with harmonic Weyl tensor of a complex space form*, Hiroshima Math. J. **20** (1990), 93-102.

[3] M. Kimura and S. Maeda, *On real hypersurfaces of a complex projective space III*, Hokkaido Math. J. **22** (1993), 63-78.

[4] M. Kon, *Pseudo-Einstein real hyprersurfaces in complex space forms*, J. Differential Geom. **14** (1979), 339-354.

[5] S. Montiel, *Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space*, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 515-535.

[6] K. Nomizu, *On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor*, Tohoku Math. J. **20** (1968), 46-59.

[7] P. J. Ryan, *Hypersurfaces with parallel Ricci tensor*, Osaka J. Math. **8** (1971), 251-259.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Hokkaido University, Sapporo 060-0810, Japan.
E-mail: mayuko_k13@math.sci.hokudai.ac.jp

Overview on the theory of currents

Norifumi Sato (Hokkaido University)

1 Introduction

Geometric measure theory (GMT) is, so to speak, differential geometry generalized by the measure theory in order to deal with maps and surfaces which are not necessarily smooth. GMT is used mainly for the variational problem (for example, area-minimizing problem). In this abstract, we outline the theory of currents which is a basic notion of GMT.

2 Preliminarities

2.1 Multivectors and Covectors

Let V be a n-dimensional vector space over $\mathbb{R}$ and V^* be its dual space. For k, $0 \leq k \leq n$, we define

$$I(k,n) := \{\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)\ ; \alpha_i \in \mathbb{Z},\ 1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq n\}$$

as a set of *ordered multi-indices* and for convenience we set

$$I(0,n) = \{0\}.$$

For $v_1, \cdots, v_k \in V$, $1 \leq k \leq n$, these wedge product

$$\xi := v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$$

is called *k-vector*. The linear space of k-vectors is denoted by $\Lambda_k V$. Similarly for $v^1, \cdots, v^k \in V^*$, $1 \leq k \leq n$, these wedge product

$$\omega := v^1 \wedge \cdots \wedge v^k$$

is called *k-covector*. The linear space of k-covectors is denoted by $\Lambda^k V$. This space coincides with a dual space of $\Lambda_k V$, i.e. $\Lambda^k V = (\Lambda_k V)^*$. A k-vector

$\xi \in \Lambda_k V$ is called *simple* if it can be written as a single wedge product of vectors,

$$\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$$

for some $v_1, \cdots, v_k \in V$. The *comass norm* of $\omega \in \Lambda^k V$ is defined by

$$||\omega|| := \sup\{< \xi, \omega > ;\ \xi \in \Lambda_k V,\ |\xi| \leq 1,\ \xi \text{ simple}\},$$

where $< \cdot, \cdot >$ is the coupling of duality between $\Lambda_k V$ and $\Lambda^k V$ and $|\cdot|$ is the norm of k-vectors. The *mass norm* of $\xi \in \Lambda_k V$ is defined by

$$||\xi|| := \sup\{< \xi, \omega > ;\ \omega \in \Lambda^k V,\ ||\omega|| \leq 1\}.$$

2.2 Differential forms

Let $U \subset \mathbb{R}^n$ be an open set. We denote by $\mathcal{D}^k(U)$ the space of all infinitely differentiable and compactly supported k-forms in U topologized by the usual topology which is characterized by the assertion that

$$\omega^i := \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega^i_\alpha dx^\alpha \longrightarrow \omega := \sum_{\alpha \in I(k,n)} \omega_\alpha dx^\alpha \qquad (i \to \infty),$$

if there is a fixed compact set $K \subset U$ such that

(i) $\operatorname{spt} \omega^i_\alpha \subset K$ for $^\forall \alpha \in I(k,n)$ and $^\forall i \in \mathbb{N}$

(ii) $\lim_{i \to \infty} D^\beta \omega^i_\alpha = D^\beta \omega_\alpha$ for $^\forall \alpha \in I(k,n)$ and every multi-index β.

We remark that k-form $\omega \in \mathcal{D}^k(U)$ is a map from U into $\Lambda^k \mathbb{R}^n$.

2.3 Rectifiable sets

A set $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+N}$ is said to be *countably n-rectifiable* if there exist n-dimensional embedded submanifolds $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \cdots$ and $\mathcal{N}_0 \subset \mathbb{R}^{n+N}$ with $\mathcal{H}^n(\mathcal{N}_0) = 0$ such that

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{N}_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_k.$$

Countably rectifiable sets are characterized by the property of being countable union of Lipschitz images of n-dimensional sets. More precisely, a set $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+N}$ is countably n-rectifiable if and only if

$$\mathcal{M} \subset A_0 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} f_k(A_k)$$

where $\mathcal{H}^n(A_0) = 0$ and $f_k : A_k \to \mathbb{R}^{n+N}$ are Lipschitz maps, $A_k \subset \mathbb{R}^n$. Rectifiable sets are also characterized by the property of possessing *approximate tangent space*. Roughly, approximate tangent space is a tangent space in the sense of the measure theory.

3 Currents

Definition 3.1 (Definition of currents). *A k-dimensional current in U is a continuous linear functional on $\mathcal{D}^k(U)$. The space of k-dimensional currents in U is denoted by $\mathcal{D}_k(U)$.*

Definition 3.2 (Weak convergence of currents). *Let $T_j, T \in \mathcal{D}_k(U)$. We say that the sequence $\{T_j\}_{j=1}^{\infty}$ converges weakly to T,*

$$T_j \rightharpoonup T \qquad (j \to \infty),$$

if

$$T_j(\omega) \longrightarrow T(\omega) \qquad \text{for } {}^\forall\omega \in \mathcal{D}^k(U).$$

Definition 3.3 (Boundary of currents). *The* boundary *of $T \in \mathcal{D}_k(U)$ is defined as the $(k-1)$-current*

$$\partial T(\eta) := T(d\eta) \qquad \text{for } {}^\forall\eta \in \mathcal{D}^{k-1}(U),$$

where $d\eta$ is an exterior differential of η. And we set

$$\partial T = 0 \qquad \text{if } T \in \mathcal{D}_0(U).$$

Definition 3.4 (Mass norm). *Let $U \subset \mathbb{R}^n$ and $V \subset U$ be an open sets, and let $T \in \mathcal{D}_k(U)$. The* mass norm *of T in V is defined by*

$$\mathbf{M}_V(T) := \sup\{T(\omega)\ ;\ \omega \in \mathcal{D}^k(U),\ \operatorname{spt}\omega \subset V,\ ||\omega|| \le 1 \text{ for } {}^\forall x \in U\}.$$

If $V = U$ we shall simply write $\mathbf{M}(T)$ instead of $\mathbf{M}_V(T)$, and we set

$$\mathcal{M}_k(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U)\ ;\ \mathbf{M}(T) < \infty\}$$
$$\mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}(U) := \{T \in \mathcal{D}_k(U)\ ;\ \mathbf{M}_V(T) < \infty \text{ for } {}^\forall V \subset\subset U\}.$$

From the definition of mass norm we readily infer

Proposition 3.5 (Lower semicontinuity of the mass norm). *Let $T_j, T \in \mathcal{D}_k(U)$. If $T_j \rightharpoonup T$ then for any $V \subset U$, V open,*

$$\mathbf{M}_V(T) \le \liminf_{j\to\infty} \mathbf{M}_V(T_j).$$

And from the compactness theorem for Radon measures

Proposition 3.6 (Compactness-closure theorem). *Let* $\{T_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}(U)$ *be a sequence satisfying*

$$\sup_j \mathbf{M}_V(T_j) < \infty \qquad \text{for } {}^\forall V \subset\subset U.$$

Then there exists a subsequence $\{T_{j'}\}_{j'=1}^{\infty} \subset \{T_j\}$ *and* $T \in \mathcal{M}_{k,\mathrm{loc}}(U)$ *such that*

$$T_{j'} \rightharpoonup T \qquad (j' \to \infty).$$

Moreover

$$\mathbf{M}(T) \leq \liminf_{j' \to \infty} \mathbf{M}(T_{j'}) < \infty$$

if the mass norms of $T_{j'}$ *are equibounded.*

We define the class of *integer multiplicity rectifiable currents.* This class is very important in the theory of currents.

Definition 3.7 (Rectifiable currents). *Let* U *be a open set in* $\mathbb{R}^n$. *We say that a current* $T \in \mathcal{D}_k(U)$ *is* rectifiable *if and only if there exists an* $\mathcal{H}^k$*-measurable and countably* k*-rectifiable set* $\mathcal{M} \subset U$, *an* $\mathcal{H}^k$*-measurable and locally* $\mathcal{H}^k \lfloor_{\mathcal{M}}$*-summable function* $\theta : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, *and an* $\mathcal{H}^k$*-measurable map* $\xi : \mathcal{M} \to \Lambda_k \mathbb{R}^n$ *with* $||\xi(x)|| = 1$ $\mathcal{H}^k \lfloor_{\mathcal{M}}$-a.e.$x$ *such that*

$$T(\omega) = \int_{\mathcal{M}} < \xi(x), \omega(x) > \theta(x)\, d\mathcal{H}^k(x)$$

and moreover $\xi(x)$ *is a* k*-vector associated to the approximate tangent space of* $\mathcal{M}$ *for* $\mathcal{H}^k$-a.e.x. *If moreover* θ *is integer-valued, then we say that* T *is* integer multiplicity rectifiable. *The class of integer multiplicity rectifiable* k*-currents in* U *is denoted by* $\mathcal{R}_k(U)$.

4 Important theorems for currents

For integer multiplicity rectifiable currents it holds that

Theorem 4.1 (Closure theorem). *Let* $\{T_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}_k(U)$ *be a sequence of integer multiplicity rectifiable* k*-currents in some open set* $U \subset \mathbb{R}^n$ *satisfying*

$$\sup_j \{\mathbf{M}_V(T_j) + \mathbf{M}_V(\partial T_j)\} < \infty \qquad \text{for } {}^\forall V \subset\subset U : \textit{open}$$

and weakly converging to some current $T \in \mathcal{D}_k(U)$, $T_j \rightharpoonup T$. *Then* $T \in \mathcal{R}_k(U)$.

This theorem together with the compactness theorem for general currents (Proposition 3.6) yields

Theorem 4.2 (Compactness Theorem). *Let* $\{T_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}_k(U)$ *be a sequence satisfying*

$$\sup_j \{\mathbf{M}_V(T_j) + \mathbf{M}_V(\partial T_j)\} < \infty \qquad \text{for } {}^{\forall}V \subset\subset U : \textit{open}.$$

Then there exists a subsequence $\{T_{j'}\}_{j'=1}^{\infty}$ *of* $\{T_j\}$ *and* $T \in \mathcal{R}_k(U)$ *such that*

$$T_{j'} \rightharpoonup T \qquad (j' \to \infty)$$

References

[1] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, 1969.

[2] M. Giaquinta, G. Modica, and J. Soucek, *Cartesian Currents in the Calculus of Variations I*, Springer-Verlag, 1998.

[3] L. Simon, *Lectures on Geometric Measure Theory*, Australian National Univ., 1983

About the Black Hole Information Paradox:

A Review of S. W. Hawking, *Information Loss in Black Holes*, hep-th/0507171

Norihiro Tanahashi
Department of Physics, Kyoto University

December 26, 2005

Abstract

The information paradox of black holes was raised in 1975 by S. W. Hawking. His argument was based on the fact that particle emission from a black hole, so called the Hawking radiation, cannot convey any information from its interior region. This problem has no definite solution even now.

This year Hawking submitted a paper in which he investigates this problem of information loss in black hole from the view point of quantum gravity using Euclidean path integrals in asymptotically anti-de Sitter (AdS) spacetimes. As a result, it is shown that the path integration over topologically trivial metrics are unitary and information preserving. It implies that quantum gravity preserves information.

I will review this paper introducing some key ingredients of his argument.

1 Introduction

The question of information loss in the black holes was raised by Stephen W. Hawking in 1975 [1]. He claimed that the information locked inside the black hole is lost from this universe after the evaporation of the black hole. His argument was based on the fact that the quantum emission from a black hole, the Hawking radiation [2] is completely random and uncorrelated. This information loss phenomenon in general relativity violates the principle of quantum mechanics in which the time evolution is a reversible process. So this problem was called the information paradox, which shows a serious conflicts between the two theories of physics.

However, from the view point of the the AdS/CFT correspondence [3, 4], the string theory in the AdS_5 spacetime should be unitary because the conformal field theory on the boundary of the AdS spacetime is manifestly unitary. Then no information should be lost.

This year Hawking submitted a paper [5] which shows that the theory of quantum gravity should be also unitary and no information will be lost. I will review this paper introducing some key ingredients of his argument.

2 The Hawking Radiation and the Information Loss

In 1975 Hawking showed that a black hole creates and emits particles as if it is a hot body of temperature $\frac{\hbar\kappa}{2\pi G} \approx 10^{-6} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)$ °K, where κ is the surface gravity of the black hole and $M_\odot$ is the solar mass [2]. Because this particle radiation is completely thermal and determined only by the mass M, the angular momentum J and the charge Q of the black hole. So this radiation cannot convey any information from the black hole. This radiation is called the Hawking radiation.

Due to this radiation a black hole lose its mass and eventually evaporates. Here the information of the matter which composed of the black hole is lost from this universe because this information does not come out through the Hawking radiation.

However, this Hawking's argument is based on the quantum field theory on a fixed background spacetime of a black hole, which is only an approximation. According to the precise treatment by Banks et al. [6], this information loss results in serious violation of fundamental laws for physics such as energy conservation, implying that there may be some errors in Hawking's argument.

This information loss problem has been a controversial issue since its appearance, and there was no definite answer for years.

3 AdS/CFT Correspondence and Unitarity

By Maldacena it was conjectured that the theory of superstring on $AdS_5 \times S^5$ spacetime is the same as $\mathcal{N} = 4$ U(N) Super-Yang-Mills theory, which is one of a conformal field theory, on the 3+1 dimensional boundary of $AdS_5 \times S^5$ spacetime [4]. Here $AdS_5 \times S^5$ spacetime is a certain solution of superstring theory, which is a quantum theory of gravity in ten dimensional spacetime.

This correspondence is shown to be valid in some limiting cases. The conjecture is that this correspondence is generally valid and those two theories are exactly same. It has not been proofed yet.

Here the conformal theory is a kind of quantum field theory, and it generally gives a unitary time evolution of states, i.e. the reversible time evolution. However it is not trivial whether the theory of gravity in $AdS_5 \times S^5$ spacetime is also unitary or not, but this correspondence suggests that it is unitary. Assuming it to be valid, Hawking argues on the information loss in black holes.

4 Euclidean Quantum Gravity

4.1 Procedure

A complete quantum theory of gravity has not been emerged. There are several approaches such as covariant perturbation method and the canonical quantization method, but no one is successful by now.

One of such approaches is the Euclidean quantum gravity [7, 8]. Hawking thinks that this approach is the only sane way to do quantum gravity, and then he applies it to black hole formation and evaporation phenomenon in this research. In this theory the probability amplitude of a state

$$\langle\, g_2, \phi_2, S_2 \mid g_1, \phi_1, S_1 \,\rangle \tag{1}$$

to go from a state with a metric g_1 and matter fields ϕ_1 on the initial surface S_1 to a state with a metric g_2 and matter fields ϕ_2 on the final surface S_2, is obtained as a sum over all field configurations g and ϕ which take the given values on the surfaces S_1 and S_2:

$$\langle\, g_2, \phi_2, S_2 \mid g_1, \phi_1, S_1 \,\rangle = \int D[g, \phi] \exp(iI[g, \phi]), \tag{2}$$

where $D[G, \phi]$ is a measure on the space of all field configurations g and ϕ. $I[g, \phi]$ is the action of the fields:

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int R\sqrt{-g}\, d^4x + \frac{1}{8\pi G} \oint K\sqrt{\pm h}\, d^3x + \int L_m \sqrt{-g}\, d^4x, \tag{3}$$

where R is the scalar curvature of the spacetime, g is the determinant of the metric. The second integral is done over the boundary surface of the spacetime. K is the extrinsic curvature of the boundary, and h is the induced metric on the boundary. L_m is the Lagrangian of the matter fields. Units are taken to be $c = \hbar = k = 1$.

This action I is real and so the path integral will oscillate and will not converge. One can solve this difficulty by analytically continuing this function to the imaginary time coordinate: rotate the time axis 90° clockwise in the complex plane and replace t by $-i\tau$. This introduces a factor of i into the volume integral of I. Thus the path integral becomes

$$\int D[g, \phi] \exp(-\hat{I}[g, \phi]) \tag{4}$$

where $\hat{I} = -iI$ is the the Euclidean action. The integral with this action is exponentially damped and should therefore converge. The physical amplitude is obtained by rotating back the axis of τ to the Lorentzian time axis of t.

As the boundary condition of this integral, one can take a periodic boundary condition by identifying surfaces of constant time which is separated by an imaginary time interval β. By this procedure the path integral gives the partition function for gravity at temperature β^{-1}, where β is the Euclidean distance between the initial and final surface:

$$Z(\beta) = \int D[g, \phi] \ \exp(-\hat{I}[g, \phi]) = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}), \tag{5}$$

where H is the Hamiltonian of the system.

However, for an asymptotically flat space this partition function is infinite because the volume of 3-space is infinite. This problem can be solved by adding a small negative cosmological constant Λ to the integrand. It will change the infinity of the spacetime into AdS spacetime. The effective volume of the 3-space reduces to the order of $\Lambda^{-3/2}$ and thus the partition function becomes finite. This change does not affect the formation and evaporation of black holes which is smaller than that 3-space.

4.2 Application to Black Hole Formation and Evaporation

From now we think about the black hole formation and evaporation in this AdS spacetime. In quantum gravity the only observable quantities are the values of fields at infinity, because there is quantum uncertainty in the position of an observation if the observer is in the middle region of the spacetime where the fields are not sufficiently weak. So we focus on the process of the observation of this event from infinity of the spacetime. In this view point this event is thought of as a scattering process: one sends in particles and radiation from infinity and measures what comes out to the infinity. In this research the information is shown to be preserved in this process.

The probability of observing a specific state is given by the path integral over the all metrics of all topologies that fit inside this boundary. Now the boundary at infinity has topology of $S^1 \times S^2$. The simplest topology that fits inside the boundary is the trivial topology $S^1 \times D^3$ where D^3 is the 3-disk. This topology is of the vacuum spacetime metric. The next simplest topology is the first non-trivial topology $S^2 \times D^2$ of the Schwarzschild AdS metric. In this spacetime only one black hole is there and it exists forever. There are other possible topologies that fit into the boundary and summed in the path integral, but these two are the most important cases.

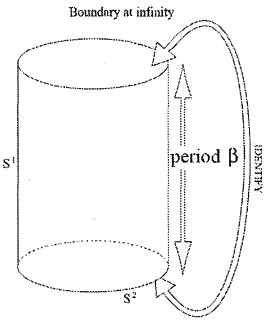
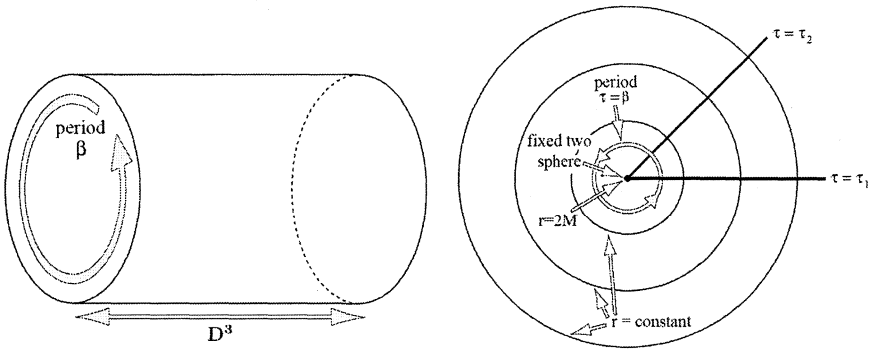


Figure 1: The schematical diagram of the path integral region, asymptotically AdS spacetime. Its boundary has the topology of $S_1 \times S_2$, because the imaginary time coordinate is identified with a period β.

The trivial topology can be foliated by a family of surfaces of constant time each of which has topology of D^3. In this case one can apply the path integral method of the ordinary quantum field theory in flat spacetime, which gives a unitary mapping between the initial and final quantum states. Then the time evolution in the spacetime of the trivial topology becomes reversible and the information of the initial state is preserved.

This argument does not apply to the non-trivial topology because the spacetime cannot be foliated by such family of surfaces of constant time in this case. An example for this case is the Schwarzschild spacetime, which can be foliated by the family of surfaces each of which has the topology of D^3 with a hole inside of it. They have the black hole horizon as one of their boundary. In this spacetime the correlation function between two points decay exponentially to zero according to the separation between them. This phenomenon can be understood that some portion of the disturbance at the initial point falls into the black hole and the effect of it does not reach to the final point. It is not proofed yet but It is therefore very plausible for the path integral over this topology gives a correlation functions that decay to zero at late Lorentzian times. The proof for this proposition should be given by explicit calculations.



(a) $S^1 \times D^3$ (b) $S^2 \times D^2$

Figure 2: The two simplest spacetime geometry which fit into the boundary of $S^1 \times S^2$. (a) is the topology of vacuum spacetime. (b) is the topology of AdS-Schwarzschild spacetime, which contains an eternal black hole. Radial lines are D^2, circles and the center point are S^2.

5 Black Holes in AdS and Information Preservation

For $\beta \ll \lambda$ there are three classical solutions which fit inside the boundary: periodically identified AdS, a small black hole and a giant black hole. Hawking considers each of these black hole solutions.

For giant black holes Maldacena calculated the two point correlation functions in AdS spacetime with an eternal black hole [9]. His calculation showed that the correlation function does not decay to zero in this setting. According to Hawking, this remaining value came from the integration over the metrics of topologically trivial spacetimes, in which the states evolve unitarily. However, in topologically non-trivial spacetimes the states does not evolve unitarily, but the path integration over these metrics gives a correlation function which decays to zero. Based on this fact, Hawking claims that only the unitary path integral will contribute to the correlation function at late time, and thus the information on the initial state will be preserved. In other words, the information of the initial state is preserved in the path integral contribution of topologically trivial metrics, and thus the total process become information preserving, while in the contribution of the topologically non-trivial metrics, like black hole metrics, the information is lost.

Now we move on to the case of small black holes. The giant black holes considered above have very low temperature because they are very massive, then they are stable against the Hawking radiation and will not evapolate away. On the other hand the small black holes, whose mass M satisfy $M \ll \lambda^{-1/2}$, are unstable and eventually evaporate [10]. However, in the setting of now the direct observation of the black hole formation and evaporation is impossible: one can obtain only the correlation function between points at infinity.

According to Hawking, there is no Euclidean geometry which can represent the formation and evaporation of a single black hole, and thus this process should be represented by a superposition of trivial metrics and the metrics of eternal black holes. If this argument is correct, the similar discussion of correlation functions on the boundary applies to this small black hole case. The information is preserved in the contribution from the topologically trivial metrics.

6 Conclusion

Hawking made an argument that quantum gravity is unitary and information of the initial states is preserved in black hole formation and evaporation. Here the only observable quantities are correlation functions between pairs of points at infinity, and they are given by the Euclidean path integrals over metrics of all topologies. In order to define finite and well-defined path integrals,

the integral region is taken to be an asymptotically AdS spacetime.

The integral over topologically trivial metrics can be done by dividing the spacetime into the thin slices of constant time. The integral over each slice will be unitary so the whole path integral will be unitary.

On the other hand the path integral over topologically non-trivial metrics will give a decaying correlation function. In topologically non-trivial spacetimes the path integral will not be unitary, but this effect cannot affect the unitarity of the total process because the contribution to the correlation function from this integral decays to zero.

Then only the information-preserving path integral will contribute to the correlation function, so the total path integral will be unitary.

The proof that the correlation functions decay in topologically non-trivial metrics has not obtained. It is now studied by a Hawking's student, C. Galfard.

References

[1] S. W. Hawking, *Break Down of Predictability in Gravitational Collapse*, Phys. Rev. **D 14**, 2460 (1976)

[2] S. W. Hawking, *Particle Creation by Black Holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975)

[3] O.Aharony, J.Maldacena, S. Gubser, H.OOguri and Y.Oz, *Large N Field Theories, String Theory and Gravity*, Phys. Rept. **323**, 183 (2000) [hep-th/9905111]

[4] J. M. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theory and Supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [hep-th/9711200]

[5] S. W. Hawking, *Information Loss in Black Holes*, hep-th/0507171 (2005)

[6] T. Banks, L. Susskind and M. E. Peskin, *Difficulties for the Evolution of Pure States into Mixed States*, Nucl. Phys. **B 244**, 125 (1984)

[7] S. W. Hawking, *Quantum Black Holes*, the section two of hep-th/9409195 (1994)

[8] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, *Euclidean Quantum Gravity* (World Scientific, Singapore, 1993)

[9] J. Maldacena, *Eternal black holes in anti-de Sitter*, J. High Energy Phys. **04** 021 (2003) [hep-th/0106112]

[10] S. W. Hawking and D. N. Page, *Thermodynamics of Black Holes in Anti-de Sitter Space*, Commun. Math. Phys. 87, 577 (1983)

THE ARONSON ESTIMATES FOR THE FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF THE PERTURBED HEAT EQUATIONS

YASUNORI MAEKAWA[1]

ここでは次の輸送項つきの熱方程式について考える。

$$\partial_t \omega - \Delta \omega + (u, \nabla)\omega = 0,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

ここで $\omega = \omega(t,x)$ はスカラー値の未知関数であり、$u = u(t,x) = (u^1(t,x), \cdots, u^n(t,x))$ は与えられたベクトル値関数である。また、$\partial_t \omega = \frac{\partial \omega}{\partial t}$, $\Delta \omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i^2}$, $(u, \nabla)\omega = \sum_{i=1}^n u^i \frac{\partial \omega}{\partial x_i}$ である。輸送項の u に対しては次の条件をつける。

(u の仮定)

$u \in C^1((0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ であり、

$$\nabla \cdot u = 0,\ t > 0, \tag{2}$$

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}} ||u(t,\cdot)||_\infty = M < \infty. \tag{3}$$

ここで、$\nabla \cdot u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u^i}{\partial x_i}$, $||u(t,\cdot)||_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(t,x)|$ である。上の条件について少し解説しておこう。正数 $k > 0$ にたいして、スケール変換 $\omega_k(t,x) := k^n \omega(k^2 t, kx)$, $u_k(t,x) := ku(k^2 t, kx)$ を考える。もし、ω が方程式 (1) を満たすならば、ω_k は (1) で u を u_k におきかえた方程式を満たす。さらに、上の条件はこのスケール変換に対して不変である事に注意する。つまり、u が条件 (2), (3) を満たすならば、u_k も $\nabla \cdot u_k = 0$, $\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}} ||u_k(t,\cdot)||_\infty = M$ を満たす。ここで上の定数 M が k によらないことに注意する。つまり、上の二つの条件は方程式に対して不変なスケール変換に対し、不変な条件と言える。このようなスケール変換不変性は経験的に重要である事が知られていて、例えば非圧縮性粘性流体の運動を記述する Navier-Stokes 方程式や、Navier-Stokes 方程式に rotation を作用させて得られる渦度方程式などにおいて上のような条件や評価がしばしば現れる。とくに方程式 (1) は二次元渦度方程式の線形化方程式として見なせることを付け加えておく。

今回述べる結果は方程式 (1) の基本解に対する Aronson 評価とよばれる各点評価についてである。主結果を正確に述べるためにいくつかの定

[1]Department of Mathematics, Hokkaido University, Sapporo, 060-0810, Japan.
E-mail: yasunori@math.sci.hokudai.ac.jp

義を述べる。ここでは方程式 (1) の初期値問題の解として対応する積分方程式の解を考える。

(定義1)
$s \geq 0$, $\omega_s \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とする。関数 $\omega \in C((s,\infty); L^1(\mathbb{R}^n))$ が初期値問題

$$(H_s) \qquad \begin{cases} \partial_t \omega - \Delta\omega + (u, \nabla)\omega = 0, \ t > s, \ x \in \mathbb{R}^n, \\ \omega(s,x) = \omega_s(x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

の mild solution であるとは、ω が積分方程式

$$\omega(t) = e^{(t-s)\Delta}\omega_s - \int_s^t \nabla \cdot e^{(t-\tau)\Delta} u(\tau)\omega(\tau) d\tau, \ t > s \tag{4}$$

を満たすことをいう。ここで、$e^{t\Delta}$ は熱半群であり、熱核

$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \tag{5}$$

を用いて

$$e^{t\Delta} f = \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y) f(y) dy \tag{6}$$

と表される作用素である。

(定義2)
$s_0 \geq 0$, $A_{s_0} := \{(t,s,x,y); x, y \in \mathbb{R}^n, t > s \geq s_0\}$ とする。関数 $\Gamma_u(t,x;s,y)$ が方程式 (1) の A_{s_0} 上の基本解であるとは、Γ_u が A_{s_0} 上の関数で $\int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma_u(t,x;s,y)| dx$, $\int_{\mathbb{R}^n} |\Gamma_u(t,x;s,y)| dy < \infty$ を満たし、さらに

$$\omega(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_u(t,x;s,y)\omega_s(y) dy \tag{7}$$

が初期値問題 (H_s) の mild solution であることをいう。

輸送項の u が恒等的に 0 であるとき、基本解は熱核 $G_{t-s}(x-y)$ である。なお、条件 (2), (3) のもとでの積分方程式の解、および基本解の存在と一意性については、$s > 0$ のときは容易であるが、$s = 0$ のときは輸送項の u の時刻 0 における特異性によってこれまで未知であった ([4] 参照)。しかし、今回述べる結果を応用することで証明することができる。

さて、この基本解はどのような形状をしているのだろうか。あるいは、どのような振舞いをするのだろうか。とくに熱核 ($u = 0$ のときの基本解) との対応が重要である。これについて次のような上からの各点評価が知られている。

$s_0 > 0$ とする。A_{s_0} 上の基本解 Γ_u に対して、M と n にのみ依存するある定数 C_1, C_2 が存在し、

$$\Gamma_u(t,x;s,y) \leq \frac{C_1}{(t-s)^{\frac{n}{2}}} e^{-C_2 \frac{|x-y|^2}{t-s}} \tag{8}$$

が任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t > s \geq s_0$ に対して成り立つ。ここで C_1, C_2 は s_0 にも依存しない定数である。

この評価は基本解 Γ_u が $u = 0$ のときの基本解である熱核 type の関数で評価できることを示している。この結果は E.A.Carlen and M.Loss [2] および S.Matsui and S.Tokuno [5] によって得られている。基本解は正値であることが知られているが、実は、この上からの評価のように、熱核 type の関数で下からも評価することができる。これが今回述べる主結果である。

(主結果)

$s_0 > 0$ とする。A_{s_0} 上の基本解 Γ_u に対して、M と n にのみ依存するある定数 C_3, C_4 が存在し、

$$\Gamma_u(t, x; s, y) \geq \frac{C_3}{(t-s)^{\frac{n}{2}}} \exp(-C_4 \frac{|x-y|^2}{t-s}) \tag{9}$$

が任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$, $t > s \geq s_0$ に対して成り立つ。ここで C_3, C_4 は s_0 にも依存しない定数である。

これら熱核 type の関数による上からと下からの各点評価は Aronson 評価と呼ばれており、古典的な結果としては D.G.Aronson [1] による発散形２階放物型線形偏微分作用素

$$\partial_t - \sum_{1 \leq i,j \leq n} \partial_i a_{i,j}(t, x) \partial_j \tag{10}$$

の基本解に対する各点評価が知られている。評価の定数 $C_1, \cdots, C_4$ が時間によらないときは global な Aronson 評価と呼ばれている。この global な Aronson 評価は H.Osada [7] によって次のような、より一般の発散形２階放物型線形偏微分作用素の場合にも示されている。

$$\begin{cases} \partial_t - \sum_{1 \leq i,j \leq n} \partial_i a_{ij}(t, x) \partial_j + \sum_{1 \leq i \leq n} b_i(t, x) \partial_i \\ \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i b_i = 0 \\ b_i = \sum_{1 \leq j \leq n} \partial_j c_{ij}(t, x). \end{cases} \tag{11}$$

ここで、$(a_{ij})_{i,j}$ は一様楕円条件を満たし、さらに c_{ij} は (時間と空間両方について) 有界な関数とする。なお、今回我々の考える作用素は輸送項が必ずしも上のような仮定を満たさないことに注意する。

この global な Aronson 評価を示す上で、輸送項の u に対するスケール変換不変なノルムの条件 (3) は本質的である。これを見るために次の簡単な例を考えてみる。

(例)

$n = 1$, $\alpha \in (0, 1)$ とし、$K \in \mathbb{R}$ とする。今、$u(t, x) = (1-\alpha) t^{-\alpha} K$ とすると、条件 (3) を満たすのは $\alpha = \frac{1}{2}$ のときだけである。簡単な計算に

より、関数

$$\frac{1}{\{4\pi(t-s)\}^{\frac{n}{2}}}\exp(-\frac{(x-y-t^{1-\alpha}K)^2}{4(t-s)})$$

は対応する方程式の基本解であることがわかる。この具体的な表現から、global な Aronson 評価が成り立つのは $\alpha=\frac{1}{2}$ のときに限ることが容易にわかる。なお、(11) の作用素もまた、(3) と本質的に同様なスケール変換不変なノルムの条件を満たすことを付け加えておく。

u に対する divergence free の条件 (2) もまた、方程式が

$$\partial_t\omega-\nabla\cdot(\nabla\omega-u\omega)=0$$

となり、発散形の構造を持つという点で重要であり、Aronson 評価の証明でも用いられる。

さて、global な Aronson 評価は解の挙動をコントロールできるという点で有効であるだけでなく、解の正則性を示す上でも重要である。基本解に対する評価をもとに解の正則性を示す方法は J.Nash [6] による先駆的な仕事が知られている。Nash は作用素 (10) の基本解に対し、Aronson 評価のような各点評価ではなく、より rough な評価をもとにその Hölder 連続性を示した。この方法は E.B.Fabes and D.W.Stroock [3] により簡潔にされている。Nash の議論は今回の作用素にも適用でき、主結果の系として、次の定理を得る。

(系 1)
$s_0>0$ とする。Γ_u を A_{s_0} 上の基本解とする。このとき、ある $\beta\in(0,1)$ と定数 $C_5>0$ が存在して、

$$\begin{aligned}(12)\qquad &|\Gamma_u(t_1,x_1;s_1,y_1)-\Gamma_u(t_2,x_2;s_2,y_2)|\\ \leq\ & C_5(|x_1-x_2|^\beta+|y_1-y_2|^\beta+|t_1-t_2|^{\frac{\beta}{2}}+|s_1-s_2|^{\frac{\beta}{2}})\end{aligned}$$

が $|t_1-s_1|,|t_2-s_2|\geq d>0$ を満たす任意の $t_1>s_1\geq s_0$, $t_2>s_2\geq s_0$, x_1, x_2, y_1, $y_2\in\mathbb{R}^n$ に対して成り立つ。ここで、C_5 は M と d, n のみに依存する。とくに、C_5 は $s_0>0$ によらないことが重要である。$s_0>0$ のときは基本解の一意存在がわかっているので、上の s に対する Hölder 連続性をもとに、各 t,x,y に対して、関数 $\Gamma_u(t,x;0,y)$ を

$$(13)\qquad \Gamma_u(t,x;0,y):=\lim_{s\to0}\Gamma_u(t,x;s,y)$$

と定義できる。このように定義した $\Gamma_u(t,x;0,y)$ に対し、$\omega_0\in L^1(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\omega(t,x):=\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma_u(t,x;0,y)\omega_0(y)dy$$

とおくと、ω が (H_0) の mild solution となることがわかる。こうして A_0 上の基本解が構成される。さて、基本解の一意性、および初期値問題 (H_0) の mild solution の一意性についてであるが、これも基本解の Hölder 連続性と Aronson 評価から示すことができる。

(系2)
$\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とする。このとき、ω_0 を初期値とする (H_0) の mild solution は一意に存在する。特に、A_0 上の基本解は一意に存在する。

主結果の証明については、鍵となる次の補題を述べるにとどめることにする。

(補題)
次を満たす正数 $\kappa \in (0,1)$ が存在する。
任意の $\theta > 0$ に対し、$\kappa\theta \leq s < t < \theta$ および $|x-y| \leq (t-s)^{\frac{1}{2}}$ を満たす $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\Gamma_u(1+t,x;1+s,y) \geq \frac{C_0}{(t-s)^{\frac{n}{2}}} \tag{14}$$

が成り立つ。ここで C_0 は $\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{4}}$ ととれる. また、上の κ は M, n にのみ依存する。

(補題の証明)
まず、$\Gamma_u(1+t,x;1+s,y)$ の満たす次の積分方程式を考える.

$$\begin{aligned} & \Gamma_u(1+t,x;1+s,y) \\ = \; & G_{t-s}(x-y) \\ - \; & \int_{1+s}^{1+t}\int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x \cdot G_{1+t-\tau}(x-\xi)u(\tau,\xi)\Gamma_u(\tau,\xi;1+s,y)d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{15}$$

先に述べたように [5] と [2] により, すでに $\Gamma_u(t,x;s,y)$ に対する上からの各点評価があることに注意する。特に、彼らの結果から実は M, n にのみ依存する定数 C_M が存在して、

$$\Gamma_u(t,x;s,y) \leq \frac{C_M}{(t-s)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{8(t-s)}}, \; x,y \in \mathbb{R}^n, \; t > s > 0. \tag{16}$$

が成り立つ。

まず (15) の第二項を評価する. (16) と u の仮定より、

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_{1+s}^{1+t}\int_{\mathbb{R}^n}\nabla_x\cdot G_{1+\theta-\tau}(x-\xi)u(\tau,\xi)\Gamma_u(\tau,\xi;1+s,y)d\xi d\tau\Big| \\
\le\ & \int_{1+s}^{1+t}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|x-\xi|}{8\pi(1+t-\tau)^{\frac{n}{2}+1}}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(1+t-\tau)}}|u(\tau,\xi)|\Gamma_u(\tau,\xi;1+s,y)d\xi d\tau \\
\le\ & MC_M\int_{1+s}^{1+t}\frac{1}{8\pi(1+t-\tau)^{\frac{n}{2}+1}(\tau-1-s)^{\frac{n}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^2}|x-\xi|e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(1+t-\tau)}}e^{-\frac{|y-\xi|^2}{8\tau-1-s}}d\xi d\tau \\
\le\ & MC_M\int_{1+s}^{1+t}\frac{C}{8\pi(1+t-\tau)^{\frac{n+1}{2}}(\tau-1-s)^{\frac{n}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{8(1+t-\tau)}}e^{-\frac{|y-\xi|^2}{8\tau-1-s}}d\xi d\tau \\
\le\ & \frac{CMC_M}{(t-s)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x-y|^2}{8(t-s)}}\int_{1+s}^{1+t}\frac{1}{(1+t-\tau)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}}d\tau \\
\le\ & \frac{CMC_M}{(1+s)^{\frac{1}{2}}(t-s)^{\frac{n-1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

ここで C は n にのみ依存する定数。よって、$|x-y|\le(t-s)^{\frac{1}{2}}$ ならば

$$
\begin{aligned}
\Gamma_u(1+t,x;1+s,y) &\ge \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}-\frac{CMC_M}{(1+s)^{\frac{1}{2}}(t-s)^{\frac{n-1}{2}}} \\
&\ge \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{4}}-\frac{CMC_M}{(1+s)^{\frac{1}{2}}(t-s)^{\frac{n-1}{2}}}. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

ここで $K_M:=(8\pi CMC_Me^{\frac{1}{4}})^2$、$\kappa=\frac{K_M}{1+K_M}$ とおく。簡単な計算により、$\kappa\theta\le s<t\le\theta$ ならば

$$
\frac{1}{(8\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{4}}\ge\frac{CMC_M}{(1+s)^{\frac{1}{2}}(t-s)^{\frac{n-1}{2}}}.
$$

よって

$$
\Gamma_u(1+t,x;1+s,y)\ge\frac{1}{(8\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{4}} \qquad (18)
$$

が $|x-y|\le(t-s)^{\frac{1}{2}}$ を満たす $x,y\in\mathbb{R}^n$ について成り立つ。(証明終り)

上の補題を用いるとスケール変換、基本解の半群の性質、total mass の保存 $\int_{\mathbb{R}^n}\Gamma_u(t,x;s,y)dx=1$ などの性質を用いて主結果を証明できる。この証明の利点は perturbation よる簡単な議論で下からの各点評価を得ることができるということである。なお、少し議論は複雑になるものの、E.B.Fabes and D.W.Stroock [3] の議論を参考にすることで、H.Osada [7] の結果を包含する、より一般の発散形2階放物型線形偏微分作用素に対しても Aronson 評価を証明できることを付け加えておく。

References

[1] Aronson, D. G. Bounds for fundamental solutions of a parabolic equation. Bull. Amer. Math. Soc. **1968**, 73, 890-896.

[2] Carlen, E. A.; Loss, M. Optimal smoothing and decay estimates for viscously damped conservation laws, with applications to the 2-D Navier-Stokes equation. Duke Math. J. **1996**, 81, 135-157.
[3] Fabes, E. B.; Strook, D. W. A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality using the old idea of Nash. Arcj. Rational Mech. Anal. **1986**, 96, 327-338.
[4] Giga, Y.; Giga, M.-H. *Nonlinear Partial Differential Equation, Self-similar solutions and asymptotic behavior*; Kyoritsu: 1999 (in Japanese), English version to be published by Birkhäuser
[5] Matsui, S.; Tokuno, S. Remark on fundamental solutions for vorticity equation of two dimensional Navier-Stokes flows, Hokkaido Math. J. **1997**, 26, 529-539.
[6] Nash, J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math. **1958**, 80, 931-954.
[7] Osada, H. Diffusion processes with generators of generalized divergence form. J. Math. Kyoto Univ. **1987**, 27, 597-619.

A REMARK ON LAPLACE EIGENFUNCTIONS ON M_A^3

YOSIHISA MIYANISI

Department of Mathematics, Faculty of Science
Tokyo Institute of Technology
2-12-1 Oh-okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152-8551, Japan

ABSTRACT. M_A^3 is a compact 3-dimensional solvable manifolds without boundary. In this talk, we shall review the specturm and the eigenfunctions of the corresponding Laplacian (See [Bo-Du-Ve]). First we would like to see that the geodesic flow on M_A^3 is completely integrable, but the level spacing distribution for the spectrum of M_A^3 is not Poisson. Hence Berry-Tabor conjecture does not hold in this case. Finally we introduce the equi-distributed eigenfunctions and the concentrated eigenfunctions on M_A^3.

1. INTRODUCTION AND RESULTS.

It has been known since the nineteenth century that in dimension two there is a close relationship between geometry and topology. Namely each compact orientable manifolds admits a metric of constant curvature: positive if it is a topologicalsphere, zero if it is a torus and negative if it has genus more than 1.

In dimension three the situation is much more sophisticated. Thurston [Th] put forward the famous Geometriation conjecture: any compact orientable 3-manifolds can be cut by disjoint embeddedd 2-spheres and tori into pieces, which after glueing 3-balls to all boundary spheres, admit one of 8 special geometric structures. These special 3-dimensional geometries are the standard Euclidean $\mathbf{R}^3$, spherical S^3 and Hyperbolic $\mathbf{H}^3$ geometries, the product geometries $S^2 \times \mathbf{R}$ and $H^2 \times \mathbf{R}$ and three geometries related to the Lie groups $SL_2(\mathbf{R})$, Nil and Sol. In this talk we restrict our concern to the main class of Sol-manifolds M_A^3.

On the other hand, in the asymptotic theory of high-frequency eigefunctions u_k of Laplace operator the most attention was paid to the quasiclassic eigenfunctions. They are associated with the simplest invariant sets of the geodesic flow, namely stable closed orbits and invariant tori.

The following examples are typical:

Example 1. *If the geodesic flow on the cosphere bundle S^*M is ergodic, there exists a subsequence satisfying* $|u_{k_j}(x)|^2 d\,vol_M \to \dfrac{d\,vol_M}{vol_M}$ *as* $j \to \infty$. (See [Co],[Sc],[Ze]).

Example 2. *Let τ be a closed geodesic curve on the standard sphere S^2, there exists a subsequence satisfying* $|u_{k_j}(x)|^2 d\,vol_M \to \delta_\tau$ *as* $j \to \infty$, *where δ_τ denotes a measure distributed uniformly along τ.*

Date: January 25, 2006.
Key words and phrases. Sol-manifolds M_A^3.
The author would like to thank Professor A.Inoue for giving valuable comments.

Our main purpose is to investigate eigenfunctions on M_A^3.

For paritcular eigenfunctions (Bolsinov - Dullin - Veselov's eigenfunctions (See §3)), we see the equi-distributed eigenfunctions and the concentrated eigenfunctions on M_A^3.

Theorem 1 (Quantum ergodicity for Bolsinov - Dullin - Veselov's eigenfunctions). *For fixed $\gamma \in L^*$, eigenfunctions ($-\triangle\psi_{\gamma,k} = E_{\gamma,k}\psi_{\gamma,k}$) are quantum-ergodic on M_A^3. (i.e. $|\psi_{\gamma,k_j}|^2 dvol_{M_A^3} \to \frac{dvol_{M_A^3}}{vol_{M_A^3}}$ as $j \to \infty$).*

Theorem 2 (Concentrated eigenfunctions). *Let $\psi_{\gamma,k}$ be Bolsinov - Dullin - Veselov's eigenfunctions. Then there exists a subsequence γ_j and k_j such that $|\psi_{\gamma_j,k_j}|^2 dvol_{M_A^3} \to \delta_{T^2}$ as $j \to \infty$, where δ_{T^2} denotes a measure distributed uniformly along T^2.*

But, due to the high degeneracy of spectrum, there are infinite complete orthogonal bases of eigenfunctions. For all orthogonal bases, we have the following result.

Theorem 3. *Let $\{u_k\}$ be an arbitary orthogonal base of the Laplace eigenfunctions on M_A^3. Then there exists a subsequence such that $|u_{k_j}(x)|^2 dvol_M \to d\nu$ and the absolutely continuous part of ν is not 0.*

The structure of this note is following.

In §2, we shall review M_A^3 and some basic notations.

In §3, we define the Bolsinov - Dullin - Veselov's eigenfunctions and introduce the related results.

2. Sol-manifolds M_A^3 and the geodesic flow.

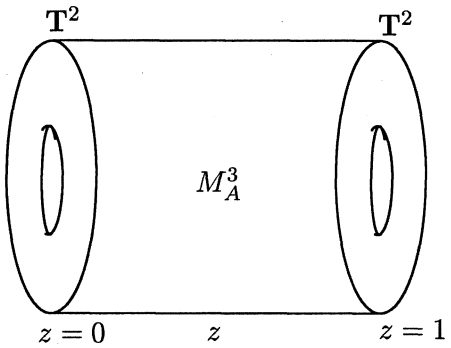
Sol-manifolds M_A^3 are T^2 torus bundles over a circle S^1 with hyperbolic glueing map with positive eigenvalues.

$$\mathrm{T_A} : \mathbf{T}^2 \times \mathbf{S}^1 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ z+1 \end{pmatrix}$$

where $A \in SL^2(\mathbf{Z})$ is an integer hyperbolic matrix, which defines a hyperbolic automorphism of the 2-torus.

We define $M_A^3 = \mathbf{T}^2 \times \mathbf{S}^1 / \langle T_A \rangle$.

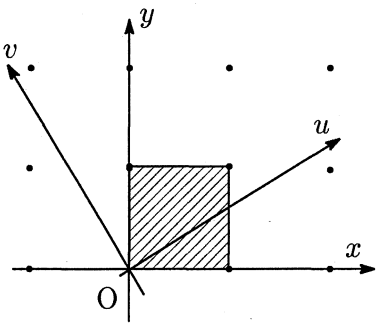
Figure 1.



Together with (x, y, z) we shall use another coordinate system (u, v, z) on M_A^3, where (u, v) are linear coordinates on the fibers related to a positively oriented eigenbasis e_u, e_v of A.

(i.e. $(x, y, z) \mapsto (u, v, z)$, e_u and e_v are eigenbasis of A , see fig.2.)

Figure 2.



$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

The corresponding metric on M_A^3 is defined by $ds^2 = e^{-2\mu z}Edu^2 + 2Fdu\,dv + e^{2\mu z}Gdv^2 + dz^2$ where λ is the largest eigenvalue of A and $\mu = \log\lambda$. E, F and G are constant. Thus the Hamiltonian of the geodesic flow on M_A^3 in (u, v, w)-coordinates can be written as

$$H = \frac{1}{2}(Ee^{2\mu z}p_u^2 + 2Fp_up_v + e^{-2\mu z}Gp_v^2 + p_z^2),$$

and furthermore,

$$\begin{cases} Q = p_up_v \\ F_1 = \sqrt{Q}e^{-1/Q^2}\cos\dfrac{\log(\sqrt{E/G}|p_u/p_v|)}{2\log\lambda} \\ F_2 = \sqrt{Q}e^{-1/Q^2}\sin\dfrac{\log(\sqrt{E/G}|p_u/p_v|)}{2\log\lambda} \end{cases}$$

are three global integrals in C^∞ category. So the geodesic flow on M_A^3 is integrable in C^∞ category.

Remark. The geodesic flow on M_A^3 is not integrable in analytic category (See [Ta]).

3. Spectrum and eigenfunctions on M_A^3.

Let us discuss the quantum problem on the Sol-Manifolds M_A^3:

$$-\triangle\psi = E\psi,$$

where $\triangle$ is the Laplace operator on M_A^3. In coordinates (u, v, z) the Laplace operator has the following explicit form:

$$\triangle = Ee^{2\mu z}\frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2F\frac{\partial^2}{\partial u\partial v} + e^{-2\mu z}G\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

First we consider eigenfunctions on the covering space $\tilde{M_A^3} = T^2 \times \mathbf{R}$. Because the coefficents of $\triangle$ depends only on z, it is quite natural to separate variables and look for the eigenfunctions of $\triangle$ of the form

$$\Psi_{\gamma,k}(u, v, z) = e^{2\pi i(\gamma,w)}f_k(z) \text{ where } \gamma \in L^* \text{ (dual lattice of } T^2).$$

By substituing into the Shrödinger equation, we have

$$-\frac{d^2}{dz^2}f_k(z) + |\nu(\gamma)|\cosh(z + \alpha(\gamma))f_k(z) = E_kf_k(z) \quad \text{(modified Mathieu equation)}$$

where $\nu(\gamma)$ and $\alpha(\gamma)$ depend only on γ.

One can try to construct the genuine eigenfunctions of $\triangle$ on M_A^3 by averaging these eigenfunctions.

Definition (Bolsinov - Dullin - Veselov's eigenfunction).

$$\begin{cases} \tilde{\psi}_{\gamma,k} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \Psi_{(A^*)^n\gamma,k}(u,v,z+n) \\ \text{and} \\ \psi_{\gamma,k} = \tilde{\psi}_{\gamma,k}/\|\tilde{\psi}_{\gamma,k}\|_{L^2(M^3_A)}. \end{cases}$$

Because of the fast decay of $f_k(z)$ they are well defined on M^3_A. Some basic properties of $\psi_{\gamma,k}$ are known.

Theorem 4 (Bolsinov - Dullin - Veselov(preprint)). *The functions $\psi_{\gamma,k}$, $\psi_{0,k}$ form a complete orthogonal basis in $L^2(M^3_A)$.*

Next result is particular interesting.

Theorem 5 (Bolsinov - Dullin - Veselov(preprint)). *The level spacing distribution for the spectrum of M^3_A is not Poisson.*

Note that according to the Berry-Tabor conjecture integrable systems should have Poisson distribute level spacing (See [Be-Ta]). This is not the case for Sol-manifolds.

Remark. Theorem 5 is not sensitive to change the metric $ds^2 = e^{-2\mu z}Edu^2 + 2Fdu\,dv + e^{2\mu z}Gdv^2 + dz^2$.

4. Concluding remarks

We reviewed that spectral stastics on M^3_A provides a counterexample to the Berry-Tabor conjecture, but it cannnot be taken as an indicator of chaos. Some simple observations (Theorem1, Theorem 3) showed that the subset of eigenfunctions are asymptotically 'uniformly distributed' on the manifolds. Hence the subset of eigenfunctions are quantum ergodic. Thus M^3_A is analogous to T^3 in these features (See [Bo], [Ja]). But theorem2 means that the subset of eigenfunctions are concentrated on T^2. M^3_A and S^2 are analogous in this feature (See Example2).

So we conclude that M^3_A has the middle property between two extremes.

References

[Be-Ta] M.V.Berry and M.Tabor *Level clustering in the regular spectrum*, Proc.Roy.Soc.A **356**, (1977), 375-394.

[Bo-Du-Ve] A.V.Bolsinov, H.R.Dullin, and A.P.Veselov *Spectra of Sol-manifolds: Arithmetic and quantum monodromy*, math-ph/0503046.

[Co] Colin de Verdiere, *Ergodicite et functions propres du Laplacien*, Commun.Math.Phys. **102**, (1985), 497-502.

[Bo] J.Bourgain *Eigenfunction bounds for the Laplacian on the n-torus*, Intern. Math. Res. Notices **3** (1993), 61-66.

[Ja] D.Jakobson *Quantum limits on flat tori*, Annal.Math. **145**, (1997), 235-266.

[Mi] Y.Miyanisi, *A note on Laplace eigenfunctions on M^3_A*, in preparation.

[Sc] A.I.Schnirelman, *Ergodic properties of eigenfunctions*, Usp.Math.Nauk **29**, (1974), 181-182.

[Ta] I.A.Taimanov *Topological obstructions to integrability of geodesic flows on non-simply-connected manifolds*, Math.USSR Izv. **30**, (1988), 403-409.

[Th] W.P.Thurston *Hyperbolic geometry and 3-manifolds*, London Math.Soc.Lecture note Ser.,48, Cambridge Univ. Press, (1982).

[Ze] S.Zelditch, *Uniform distribution of eigenfunctions on compact hyperbolic surfaces*, Duke.Math.J. **55**, (1987), 919-941.

E-mail address: miyanisi@math.titech.ac.jp

On the univalence superselection rule and characterization of spontaneous symmetry breaking

Hajime Moriya

Abstract

Thermodynamical formulations appropriate for general quasi-local systems with any statistics, such as characterizations of equilibrium states and spontaneous symmetry breaking are presented. We introduce a criterion of spontaneously symmetry breaking in terms of the given quasi-local structure: Each pair of distinct phases appeared in spontaneous symmetry breaking should be disjoint not only for the total system but also for every complementary outside system of a local region, which is a stronger requirement than the usual one. We derive the absence of SSB in the above sense for fermion grading transformations that multiply fermion fields by -1. This result can be considered as a rigorous justification of the univalence super-selection rule.

We have the following result on equilibriums states exclusively for lattice systems: the violation of univalence superselection rule for even dynamics at non-zero temperature induces the non-equivalence of the KMS condition and our local thermodynamical stability condition (a kind of minimum free energy condition as open systems).

1 Introduction

It is believed that nature is subject to several super-selection rules. Among them, the univalence superselection rule claims that the superposition of two states whose total angular momenta are integers and half-integers does not exist [4] [2]. But if the number of degrees of freedom is infinite as usually considered in statistical mechanics and quantum field theory, then one may wonder whether fermion grading symmetry assumed for kinematics always leads its preservation in the state level, i.e. the absence of spontaneously symmetry breaking. In fact there is a known example of symmetry breakdown for fermion grading, though being very technical [3]. The purpose of this study is to justify the univalence super-selection as a rigid rule by proving under a model independent setting that the breakdown of fermion

grading symmetry never happens in such a way that it can be observed *macroscopically.*

It is a well known fact that if a state is invariant under some asymptotically abelian group of automorphisms like space-translations, then fermion grading symmetry is *perfectly* unbroken, that is, any such invariant state has zero expectations for every odd element (see Exam. 5.2.21 of [1]). We discuss the status of fermion grading symmetry for general fermion or fermion-boson systems without such translation invariant assumption. Doplicher-Haag-Roberts [2] theory rigorously derives the Boson-Fermion alternative. But it is a theory about Minkowski space, and gives no information for lattice models.

2 Notation

We recall the definition of quasi-local $\mathbf{C}^*$-systems. (We refer e.g. to § 2.6 of [1].) Let $\mathfrak{F}$ be a directed set with a partial order relation $\geq$ and an orthogonal relation $\perp$ satisfying the following conditions:
a) If $\alpha \leq \beta$ and $\beta \perp \gamma$, then $\alpha \perp \gamma$.
b) For each $\alpha, \beta \in \mathfrak{F}$, there exists a unique upper bound $\alpha \vee \beta \in \mathfrak{F}$ which satisfies $\gamma \geq \alpha \vee \beta$ for any $\gamma \in \mathfrak{F}$ such that $\gamma \geq \alpha$ and $\gamma \geq \beta$.
c) For each $\alpha \in \mathfrak{F}$, there exists a unique α_c in $\mathfrak{F}$ satisfying $\alpha_c \perp \alpha$ and $\alpha_c \geq \beta$ for any $\beta \in \mathfrak{F}$ such that $\beta \perp \alpha$.

We consider a $\mathbf{C}^*$-algebra $\mathcal{A}$ furnished with the following structure. Let $\{\mathcal{A}_\alpha;\ \alpha \in \mathfrak{F}\}$ be a family of $\mathbf{C}^*$-subalgebras of $\mathcal{A}$ with the index set $\mathfrak{F}$. Let Θ be an involutive $*$-automorphism of $\mathcal{A}$ that determines the grading on $\mathcal{A}$ as

$$\mathcal{A}^e := \{A \in \mathcal{A} \mid \Theta(A) = A\}, \quad \mathcal{A}^o := \{A \in \mathcal{A} \mid \Theta(A) = -A\}. \tag{1}$$

These $\mathcal{A}^e$ and $\mathcal{A}^o$ are called the even and the odd parts of $\mathcal{A}$. For $\alpha \in \mathfrak{F}$

$$\mathcal{A}^e_\alpha := \mathcal{A}^e \cap \mathcal{A}_\alpha, \quad \mathcal{A}^o_\alpha := \mathcal{A}^o \cap \mathcal{A}_\alpha. \tag{2}$$

The above grading structure is referred to as fermion grading (see L4 below). For a given state ω on $\mathcal{A}$, its restriction to $\mathcal{A}_\alpha$ is denoted ω_α. If a state takes zero on all odd elements, it is called an even state.

Let $\mathfrak{F}_{\mathrm{loc}}$ be a subset of $\mathfrak{F}$ corresponding to the set of indices of all local subsystems and set $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} := \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{F}_{\mathrm{loc}}} \mathcal{A}_\alpha$. We assume L1, L2, L3, L4 as follows:

L1. $\mathcal{A}_{\rm loc} \cap \mathcal{A}_\delta$ is norm-dense in $\mathcal{A}_\delta$ for any $\delta \in \mathfrak{F}$.
L2. If $\alpha \geq \beta$, then $\mathcal{A}_\alpha \supset \mathcal{A}_\beta$.
L3. $\Theta(\mathcal{A}_\alpha) = \mathcal{A}_\alpha$ for all $\alpha \in \mathfrak{F}$.
L4. For $\alpha \perp \beta$ the following graded commutation relations hold

$$[\mathcal{A}^e_\alpha,\ \mathcal{A}^e_\beta] = 0, \qquad [\mathcal{A}^e_\alpha,\ \mathcal{A}^o_\beta] = [\mathcal{A}^o_\alpha,\ \mathcal{A}^e_\beta] = 0,$$
$$\{\mathcal{A}^o_\alpha,\ \mathcal{A}^o_\beta\} = 0,$$

where $[A,\ B] = AB - BA$ is the commutator and $\{A,\ B\} = AB + BA$ is the anti-commutator.

3 A criterion of spontaneous symmetry breakdown appropriate for general quasi-local systems and fermion grading symmetry

A pair of states are called disjoint with each other if their GNS representations are disjoint. We shall employ the following more demanding condition for disjointness of two states.

Definition 1. *Let ω_1 and ω_2 be states of a quasi-local system $(\mathcal{A},\ \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{F}_{\rm loc}})$. If for every $\gamma \in \mathfrak{F}_{\rm loc}$, their restrictions to the complementary outside system of γ, i.e., $\omega_{1\gamma_c}$ and $\omega_{2\gamma_c}$ are disjoint with each other, then ω_1 and ω_2 are said to be disjoint with respect to the quasi-local structure.*

We define a criterion of spontaneously symmetry breaking based on Definition 1 as follows. Let G be a group and $\tau_g (g \in G)$ be its action of $*$-automorphisms on a quasi-local system $(\mathcal{A},\ \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{F}_{\rm loc}})$. Suppose that τ_g commutes with a given (Hamiltonian) dynamics for every $g \in G$. Let Λ denote some set of physical states (e.g. the set of all ground states or all equilibrium states at some temperature for the given dynamics), and Λ^G denote the set of all G-invariant states in Λ. Let ω be an extremal point in Λ^G. Suppose that ω has a factor state decomposition in Λ in the form of $\omega = \int d\mu(g)\omega_g$ with $\omega_g := \tau_g^*\omega_0 (= \omega_0 \circ \tau_g)$, where ω_0 is a factor state in Λ (but not in Λ^G) and so is each ω_g, and μ denotes some probability measure on G. With this setting, we define the following.

Definition 2. *If for each $g \neq g'$ of G a pair of factor states ω_g and $\omega_{g'}$ are disjoint with respect to the given quasi-local structure, then it is said that the G-symmetry is macroscopically broken.*

The following proposition asserts that fermion grading symmetry cannot be broken macroscopically. A remarkable thing is that it makes no reference to the dynamics. We are using essentially no more than the canonical anticommutation relations (CAR) for its proof (see our original article).

Proposition 1. *Let ω be a state of a quasi-local system $(\mathcal{A}, \{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{F}_{\rm loc}})$ and Θ denote the fermion grading involution of $\mathcal{A}$. Suppose that ω is a factor state. Then ω and $\omega\Theta$ cannot be disjoint in the sense of Definition 1.*

We shall discuss more detailed results for lattice systems in the conference emphasizing on difference between spin lattice systems and fermion systems. We provide summary in the next section.

4 Fermion grading symmetry for equilibrium states of lattice systems

Take $\mathbb{Z}^\nu$, ν-dimensional cubic integer lattice. Let $\mathfrak{F}_{\rm loc}$ be a set of all finite subsets of the lattice. We assume that there is a finite number of degrees of freedom (spins) on each site of the lattice. We further assume the uniformity, i.e. the subalgebra $\mathcal{A}_{\{i\}}$ on each site i on the lattice is isomorphic to a $d\times d$, full matrix algebra, $d\in\mathbb{N}$ being independent of i. On each site $i\in\mathbb{Z}^\nu$, $\mathcal{A}_{\{i\}}$ is generated by fermion operators a_i, a_i^*, and spin operators represented by the Pauli matrices σ_i^x, σ_i^y, σ_i^z which are even elements commuting with all fermion operators.)

Let α_t $(t\in\mathbb{R})$ be a one-parameter group of $*$-automorphisms of $\mathcal{A}$. A state φ is called an (α_t,β)-KMS state if it satisfies

$$\varphi\big(A\alpha_{i\beta}(B)\big)=\varphi(BA)$$

for every $A\in\mathcal{A}$ and $B\in\mathcal{A}_{ent}$, where $\mathcal{A}_{ent}$ denotes the set of all $B\in\mathcal{A}$ for which $\alpha_t(B)$ has an analytic extension to $\mathcal{A}$-valued entire function $\alpha_z(B)$ as a function of $z\in\mathbb{C}$.

Our dynamics α_t is assumed to be even, namely $\alpha_t\,\Theta=\Theta\,\alpha_t$. We also assume the following (I, II) in order to relate α_t with some $\delta\in D(\mathcal{A}_{\rm loc})$.
(I) The domain of the generator δ_α of α_t includes $\mathcal{A}_{\rm loc}$.
(II) $\mathcal{A}_{\rm loc}$ is a core of δ_α.

The next statement asserts that for even dynamics α_t any even KMS cannot be decomposed into non-even KMS states which are locally thermodynamical stable, called LTS (a kind of variational principle, minimum free energy condition for open systems).

Proposition 2. *Let α_t be an even dynamics satisfying* (I, II) *and let φ be an arbitrary even (α_t, β)-KMS state. For* $\mathrm{I} \in \mathfrak{F}_{\mathrm{loc}}$, *let $\tilde{\alpha}_t$ denote the perturbed dynamics of the given α_t by the local Hamiltonian $H(\mathrm{I})$. Let Φ be the potential induced by α_t and $\tilde{\Phi}$ be that for $\tilde{\alpha}_t$, which is concretely given as*

$$\tilde{\Phi}(\mathrm{J}) := 0, \ \textit{if}\ \mathrm{J} \cap \mathrm{I} \neq \emptyset, \quad \textit{and} \quad \tilde{\Phi}(\mathrm{J}) := \Phi(\mathrm{J}), \ \textit{otherwise.} \tag{3}$$

If the odd part of the center of φ, equivalently that of $\varphi^{\beta H(\mathrm{I})}$, is non empty, then the induced noneven $(\tilde{\alpha}_t, \beta)$-KMS states ψ and $\psi\Theta$ violate $(\tilde{\Phi}, \beta)$-LTS condition.

5 Conclusions

We have shown that the univalence superselection rule is always satisfied in our formulation of SSB that respects a given quasi-local structure. We have shown that if there are noneven KMS states, then they inevitably invalidate the local thermal stability condition. It can be said that fermion grading symmetry breaking, if it would occur, is pathological from a thermodynamical viewpoint.

References

[1] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I and II.* : Springer-Verlag, 1979 and 1981.

[2] Haag, R.: *Local Quantum Physics.* : Springer-Verlag, 1996.

[3] J. Manuceau and A. Verbeure, *Commun. Math. Phys.* **18**(1970).

[4] G. C. Wick, A. S. Wightman and E.P. Wigner *Phys. Rev.* **88**, 101 (1952).

BLOW-UP RESULTS FOR A REACTION-DIFFUSION SYSTEM

YUSUKE YAMAUCHI

ABSTRACT. We consider the initial value problem for the reaction-diffusion system with the nonlinear terms $|x|^{\sigma_j}u^{p_j}v^{q_j}$. In this system, the exponents p_1 and q_2 play a crucial role to determine the behavior of the solutions. Using an ODE method, we prove the Fujita-type nonexistence results.

We consider the Cauchy problem for the reaction-diffusion system:

$$
\begin{aligned}
&(1) && u_t - \Delta u = |x|^{\sigma_1}u^{p_1}v^{q_1}, && x \in \boldsymbol{R}^N, \ t > 0,\\
&(2) && v_t - \Delta v = |x|^{\sigma_2}u^{p_2}v^{q_2}, && x \in \boldsymbol{R}^N, \ t > 0,\\
& && u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, && x \in \boldsymbol{R}^N,\\
& && v(x,0) = v_0(x) \geq 0, \not\equiv 0, && x \in \boldsymbol{R}^N,
\end{aligned}
$$

where p_j, $q_j \geq 0$, $\sigma_j > \max(-2, -N)$ $(j = 1, 2)$, and $p_1, q_2 \neq 1$.

Our aim is to show the conditions for the nonexistence of global solutions of the system (1) and (2). The conditions are about the relation between the exponents p_j, q_j, σ_j, and the initial data.

There are some papers on the Cauchy problem for semilinear reaction-diffusion systems. In [2], Escobedo and Herrero proved the existence and nonexistence of global solutions, so-called the Fujita-type result, for $\sigma_1 = \sigma_2 = p_1 = q_2 = 0$, p_2, $q_1 \geq 1$, $p_2q_1 > 1$. As an extension of [2], Mochizuki and Huang [4] showed the Fujita-type result for $p_1 = q_2 = 0$, $0 \leq \sigma_1 < N(p_2 - 1)$, $0 \leq \sigma_2 < N(q_1 - 1)$, p_2, $q_1 \geq 1$, $p_2q_1 > 1$. Both of the results show that the interaction between the unknown functions in the nonlinear terms determines the behavior of solutions of the system.

In [3], Escobedo and Levine showed an interesting result for $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, p_1, p_2, q_1, $q_2 \geq 0$. Under the assumption that $p_2 + q_2 \geq$

$p_1 + q_1 > 0$, they showed that if $p_1 > 1$, the solutions of the system behave like a solution of the single equation $u_t - \Delta u = u^{p_1+q_1}$.

In fact, the same result as [3] holds in our problem, that is, if $p_1 > 1$, the solutions of the system behave like a solution of the single equation $u_t - \Delta u = |x|^{\sigma_1} u^{p_1+q_1}$ under the assumption that $(p_2+q_2-1)/(\sigma_2+2) \geq (p_1+q_1-1)/(\sigma_1+2)$.

The iteration method of [3] is often used to show blow up for reaction-diffusion systems. However, the method does not seem applicable for our problem because the nonlinear terms have the variable coefficients $|x|^{\sigma_j}$. We improve the argument in [4] and apply it to our problem. The argument in [4] is to transform the system of PDEs into the ordinary differential inequalities. In our problem, multiplying the equation by negative power of unknown function makes the transformation possible.

For simplicity, let

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{q_1(\sigma_2+2) + (1-q_2)(\sigma_1+2)}{2\{p_2q_1 - (1-p_1)(1-q_2)\}}, \\ \beta = \dfrac{p_2(\sigma_1+2) + (1-p_1)(\sigma_2+2)}{2\{p_2q_1 - (1-p_1)(1-q_2)\}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta_1 = \dfrac{q_1\sigma_2 + (1-q_2)\sigma_1}{p_2q_1 - (1-p_1)(1-q_2)}, \\ \delta_2 = \dfrac{p_2\sigma_1 + (1-p_1)\sigma_2}{p_2q_1 - (1-p_1)(1-q_2)}. \end{cases}$$

For $a \in \boldsymbol{R}$, we define the function spaces:

$$I^a = \{w \in C(\boldsymbol{R}^N); w(x) \geq 0, \ \limsup_{|x|\to\infty} |x|^a w(x) < \infty\}.$$

We assume that the initial data $(u_0, v_0) \in I^{\delta_1} \times I^{\delta_2}$.

Theorem 1. *Assume that*

$$\frac{p_1+q_1-1}{\sigma_1+2} \leq \frac{p_2+q_2-1}{\sigma_2+2}, \tag{3}$$

and let $p_1 < 1$, $q_2 \neq 1$.

(i) *If* $\max(\alpha, \beta) \geq N/2$, *then no nontrivial global solutions exist.*

(ii) *If* $0 < \max(\alpha, \beta) < N/2$, *then no global solutions exist for large initial data.*

Theorem 2. *Assume* (3), *and let* $p_1 > 1$, $q_2 \neq 1$.
(i) *If* $p_1 + q_1 \leq 1 + (2+\sigma_1)/N$, *then no nontrivial global solutions exist.*
(ii) *If* $p_1 + q_1 > 1 + (2+\sigma_1)/N$, *then no global solutions exist for large initial data.*

On the other hand, authors in [1] show the conditions for the existence of global solutions of the system as follows.

Theorem 1'. *Assume* (3), *and let* $p_1 < 1$, $q_2 \neq 1$, $\sigma_j \geq 0$ $(j = 1, 2)$.
(i) *If* $0 < \max(\alpha, \beta) < N/2$, *then global solutions exist for small initial data.*
(ii) *If* $\max(\alpha, \beta) < 0$, *then every solution is global.*

Theorem 2'. *Assume* (3), *and let* $p_1 > 1$, $q_2 \neq 1$, $\sigma_j \geq 0$ $(j = 1, 2)$.
If $p_1 + q_1 > 1 + (2+\sigma_1)/N$, *then global solutions exist for small initial data.*

Comparing Theorems 1 and 2 with the results in [1], we can see that our conditions are optimal.

References

[1] Y.Aoyagi, K.Tsutaya and Y.Yamauchi, in preparation

[2] M.Escobedo and M.A.Herrero, *Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system*, J. Diff. Eqns. **89** (1991), 176-202.

[3] M.Escobedo and H.A.Levine, *Critical blowup and global existence numbers for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*, Arch. Rational. Mech. Anal. **129** (1995), 47-100.

[4] K.Mochizuki and Q.Huang, *Existence and behavior of solutions for a weakly coupled system of reaction-diffusion equations*, Methods Appl. Anal. **5** (1998), 109-124.

Department of Mathematics
Hokkaido University
Sapporo 060-0810
Japan
E-mail address: yamauchi@math.sci.hokudai.ac.jp

Duality Theorem and its application

四ツ谷 直仁
北海道大学理学研究科

2006

概 要

Ruled variety are unions of a family of linear spaces. For an n-dimensional projective variety $X \subset \mathbb{P}_N$, we can define its rational Gauss map.In general the dimension of the image of Gaussmap,the Gauss rank,is n.If this is not the case X is called developable.As a one of rescent results,there is the classification of developable ruled variety.

1 はじめに

いくつかの斉次多項式 $F_1, \ldots, F_m$ の共通零点の既約集合を多様体といいます. すると多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ に対しその Dual variety なるものを定める事ができます. これはちょうど X の点 $p \in X$ における接超平面からなる多様体の様なものといえます. 非特異な多様体 (すなわち,$\partial F_1/\partial t(p) = 0, \ldots, \partial F_m/\partial t(p) = 0$ なる点 $p \in X$ の存在しない様な X) であれば問題はないのですが, 特異点を含む様な多様体に関してはいくつかの問題が生じてきます. ここでは Dual variety やその簡単な例, また Gauss map や Tangent variety,Secant variety などの関係を紹介したいと思います.

2 Conormal bundle と Dual variety の定義

以下, 多様体は全て複素数体 $\mathbb{C}$ 上定まるものとします. まず多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ が非特異な超曲面 (唯一の既約多項式 F の零点集合) であったとしま

す. この時 X の任意の点 p に対し,F の勾配を対応させる写像,

$$\delta : X \to \mathbb{P}_N \qquad p \mapsto \left(\frac{\partial F}{\partial x_0}(p) : \ldots : \frac{\partial F}{\partial x_N}(p) \right)$$

が定まります. この時 X の Dual variety を $X^* := \delta(X)$ で定義します. これは一般に特異点を持つような次元 n の多様体 X であっても定まります.

より具体的には,$\mathbb{T}_p X$ を X の接空間とした時

$$\Gamma_X := \{(p, y) \in X \times \mathbb{P}_N^* : \langle \mathbb{T}_p X, y \rangle = 0\}$$

を考えます. ここで $\langle x, y \rangle$ は $y(x)$ を意味するものとします. この時射影 $\pi : \Gamma_X \to X$ に対し C_X を

$$C_X := \text{closure of}(\Gamma_X \backslash \pi^{-1}(\text{sing} X)) \subset X \times \mathbb{P}_N^*$$

で定め, これを X の Conormal bundle と呼びます. ここで X の特異点における接超平面を p 近傍の非特異な点における接超平面の極限とみなすことで, 形式的に極限をとる操作を $X \times \mathbb{P}_N^*$ での閉包をとる事に対応させています. この時もう一方の射影 $\pi^* : X \times \mathbb{P}_N^* \to \mathbb{P}_N^*$ に対し $X^* := \pi^*(C_X)$ とする事で X の Dual variety が定まります.

C_X と X^* に対し, 次の基本的かつ重要な事実が成立します.

- C_X は既約で,$\dim C_X = N - 1$
- $N - n - 1 \leq \dim X^* \leq N - 1$
- $(X^*)^* = X$

3 Rational Curve

$X \subset \mathbb{P}_N$ が一次元多様体 (Curve), 特に Rational curve の時比較的容易に X^* に対する関係式をみることができます.

定義 3.1. $\varphi_0, \ldots, \varphi_N$ により,φ が

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_N \qquad (t_0 : t_1) \mapsto (\varphi_0(t_0, t_1) : \ldots : \varphi_N(t_0, t_1))$$

と表される時 φ を次数 d の *(nondegenerate)rational curve* という.

特に注目するべきなのは $0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_{N-1} < m_N = d \qquad \varphi_i(t_0, t_1) := t_0^{d-m_i} t_1^{m_i}$ と表される時で, この時 φ を rational monomial curve と呼びます.

定義 3.2. $(y_0 : \ldots : y_N)$ を $\mathbb{P}_N^*$ 斉次座標とした時, 多項式 $\Phi(t;y) := y_0\varphi_0(t) + \ldots + y_N\varphi_N(t)$ を定める. この時 y_i を係数,$(t_0 : t_1)$ を変数とみる事で Φ の *discriminant set*

$$D := \{(y_0 : \ldots : y_N) \in \mathbb{P}_N^* : \Phi(t;y) \text{は} (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1 \text{を重根にもつ}\}$$

が定められる.

すると次の事が言えます.

主張 3.3. $D = X^*$

この関係により次のように $X^* \subset \mathbb{P}_N^*$ に対する関係式を求める事ができます.

例 3.4. *($d = 3 \quad N = 3$ の場合) Twisted Cubic*

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \to X \subset \mathbb{P}_3 \qquad (t_0 : t_1) \mapsto ({t_0}^3 : {t_0}^2t_1 : t_0{t_1}^2 : {t_1}^3)$$

に対して $\Phi(t;y) := y_0t^3 + y_1t^2 + y_2t + y_3$ となります. この y_i 係数に関する *discriminant* は, $27{y_0}^2{y_3}^2 - 18y_0y_1y_2y_3 + 4y_0{y_2}^3 + 4{y_1}^3y_3 - {y_1}^2{y_2}^2$ であるのでこれが X^* に対する関係式である事がわかります.

同様に $d = 4, N = 3$ の場合で

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_3 \qquad (t_0 : t_1) \mapsto ({t_0}^4 : {t_0}^3t_1 : t_0{t_1}^3 : {t_1}^4)$$

の時は $4y_1^3y_2^3 + 27y_0^2y_2^4 + 6y_0y_1^2y_2^2y_3 + 27y_1^4y_3^2 + 192y_0^2y_1y_2y_3^2 - 256y_0^3y_3^3$ が求める関係式になることが計算されました.

4 これから

多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ の非特異な点 p においての接空間 T_pX やその射影化 $\mathbb{T}_pX$ については問題はないのですが, 特異点においてはどのようなものを対応させるかという問題が生じてきます. そこで新たに次のようなものを定義します.

定義 4.1. 多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ の点 $p \in X$ に対し p に収束する点列 $x_i, y_i \in X$ に対し x_i と y_i を結んでできる直線を $\overline{x_iy_i}$ で表す. この時 $\mathbb{T}_p^*X$ をこの様な直線 $\overline{x_iy_i}$ の極限の和集合として定め, これを *tangent star* という.

定義 4.2. 多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ に対し,

$$\mathrm{Tan}^\star X := \bigcup_{p \in X} \mathbb{T}^\star_p X \subset \mathbb{P}_N$$

を X の *tangent star variety* という. また X の *secant variety* を

$$\mathrm{Sec}X := \bigcup_{\substack{(x,x') \in X \times X \setminus \Delta_X \\ x \neq x'}} \overline{xx'} \subset \mathbb{P}_N$$

で定める.

同様に多様体 $Y \subset X \subset \mathbb{P}_N$ に対して, 次の様に定める. $y \in Y$ とし,$y_n \in Y, x_n \in X$ を共に y に収束する点列とする. この時, $\mathbb{T}^\star_y(Y, X)$ を $\overline{y_n x_n}$ の極限の和集合として定め,

$$\mathrm{Tan}^\star(Y, X) := \bigcup_{y \in Y} \mathbb{T}^\star_y(Y, X)$$

$$\mathrm{Sec}(Y, X) := \bigcup_{\substack{(y,x) \in Y \times X \setminus \Delta_Y \\ y \neq x}} \overline{yx}$$

とする.

この時次が言えます.

定理 4.3 (ZAK's Theorem). 多様体 $Y \subset X \subset \mathbb{P}_N$ に対し, 次の内いずれかが成立する.

1. $\dim \mathrm{Tan}^\star(Y, X) = \dim Y + \dim X, \dim \mathrm{Sec}(Y, X) = \dim Y + \dim X + 1$
2. $\mathrm{Tan}^\star(Y, X) = \mathrm{Sec}(Y, X)$

また,Conormal bundle の様に一般の次元 n の既約多様体に対して

$$\gamma : X \dashrightarrow \mathbb{G}(n, N) \qquad p \mapsto \mathbb{T}_p X$$

なる Gauss map と呼ばれるものを定めてやる事ができます. この時 $\dim \gamma(X)$ を Gauss rank と呼ぶ事にすると, 多くの場合これは $\dim X$ に等しくなります. もしそうでない時 X は developable variety と呼ばれます.

この γ を用いて新たに X の tangent variety というものが定義できます.

定義 4.4. 任意の多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ に対して,

$$\mathrm{Tan}X := \bigcup_{T \in \gamma(X)} T$$

を X の *tangent variety* という.

一般に次の様な関係があります.

命題 4.5. $\mathrm{Tan}X \subset \mathrm{Tan}^{\star}X \subset \mathrm{Sec}X$.

私は今後の目標として, このような developable variety を Gauss map や tangent,secant variety を用いて, ある種の分類を施してやる事を目指しています.

参考文献

[1] Fischer,G. & Piontkowski,J. *Ruled Varieties.*Vieweg,2001

[2] Piontkowski,J. *Developable Variety of Gauss rank 2.*Preprint,2001

[3] Harris,J. *Algebraic Geometry-a first course.*Springer,1992

[4] Hartshorne,R. *Algebraic Geometry.*Springer,1977

[5] 川又雄二郎, 「射影空間の幾何学」. 朝倉書店,2001

AN INTRODUCTION OF GENERALIZED HEEGAARD SPLITTINGS

TOSHIO SAITO

1. Introduction

This article is based on a lecture series given by Scharlemann and Schultens at RIMS in the summer of 2001. The purpose of the lecture series lay in familiarizing the audience with the basics of three-dimensional manifold theory and introducing some topics of current research.

A way to study (connected compact orientable) three-dimensional manifolds, 3-manifolds briefly, is to decompose a 3-manifold into two 'elementary' manifolds, so-called compression bodies. Such a decomposition is called a Heegaard splitting. It is known that there are many correlations between Heegaard splittings and topology of 3-manifolds.

Roughly, a generalized Heegaard splitting is a decomposition of a 3-manifold into more than two compression bodies.

If these topics should happen to be of interest, please see our lecture notes [5].

2. Preliminaries

The notation $\eta(B;A)$ denotes a regular neighborhood of B in A. By the term *surface*, we will mean a connected compact 2-manifold. Let F be a surface. A loop α in F is said to be *inessential* in F if α bounds a disk in F, otherwise α is said to be *essential* in F.

We always let M be a connected compact orientable 3-manifold. A surface $F \subset M$ is said to be *properly* embedded in M if F is embedded in M such that $F \cap \partial M = \partial F$. A disk D properly embedded in M is said to be *inessential* in M if D cuts off a 3-ball from M, otherwise D is said to be *essential* in M. A 2-sphere P properly embedded in M is said to be *inessential* in M if P bounds a 3-ball in M or cuts off $P \times [0,1]$ from M, otherwise P is said to be *essential* in M. Let F be a surface properly embedded in M. We say that F is *compressible* in M if there is a disk $D \subset M$ such that $D \cap F = \partial D$ and ∂D is an essential loop in F. We say that F is *incompressible* in M if F is not compressible in M. Suppose that F is homeomorphic neither to a disk nor to a 2-sphere. The surface F is said to be *essential* in M if F is incompressible in M and does not cut off $F \times [0,1]$ from M.

Definition 2.1. Let M be a connected compact orientable 3-manifold.

(1) M is said to be *reducible* if M contains an essential 2-sphere. M is said to be *irreducible* if M is not reducible.
(2) M is said to be *toroidal* if M contains an essential torus.

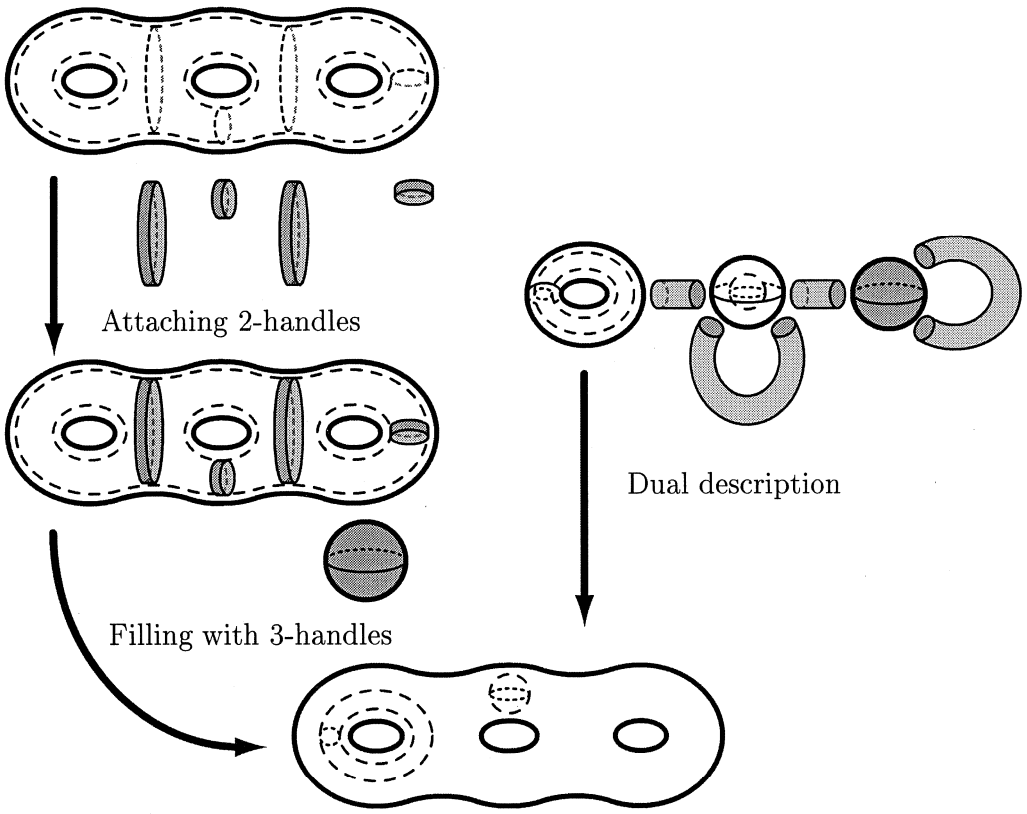


FIGURE 1. Construction of a compression body

3. HEEGAARD SPLITTINGS

Definition 3.1. A 3-manifold C is called a *compression body* if there exists a closed surface F such that C is obtained from $F \times [0,1]$ by attaching 2-handles along mutually disjoint loops in $F \times \{1\}$ and filling in some resulting 2-sphere boundary components with 3-handles. We denote $F \times \{0\}$ by $\partial_+ C$ and $\partial C \setminus \partial_+ C$ by $\partial_- C$. A compression body C is called a *handlebody* if $\partial_- C = \emptyset$.

A compression body C is also obtained from $\partial_- C \times [0,1]$ and some (possibly empty) 3-balls by attaching some 1-handles to $\partial_- C \times \{1\}$ and the boundary of the 3-balls. This is called a *dual description* of compression bodies (*cf.* Figure 1).

Definition 3.2. Let $(\partial_1 M, \partial_2 M)$ be a partition of ∂-components of M. A triplet $(C_1, C_2; S)$ is called a *Heegaard splitting* of $(M; \partial_1 M, \partial_2 M)$ if C_1 and C_2 are compression bodies with $C_1 \cup C_2 = M$, $\partial_- C_1 = \partial_1 M$, $\partial_- C_2 = \partial_2 M$ and $C_1 \cap C_2 = \partial_+ C_1 = \partial_+ C_2 = S$. The surface S is called a *Heegaard surface* and the *genus* of a Heegaard splitting is defined by the genus of the Heegaard surface.

Theorem 3.3 (*cf.* Moise [4]). *For any partition $(\partial_1 M, \partial_2 M)$ of the boundary components of M, there is a Heegaard splitting of $(M; \partial_1 M, \partial_2 M)$.*

Let $(C_1, C_2; S)$ be a Heegaard splitting of $(M; \partial_1 M, \partial_2 M)$. By a dual description of C_1, we see that C_1 is obtained from $\partial_1 M \times [0,1]$ and 0-handles $\mathcal{H}^0$ by attaching 1-handles $\mathcal{H}^1$. By Definition 3.1, C_2 is obtained from $S \times [0,1]$ by attaching 2-handles

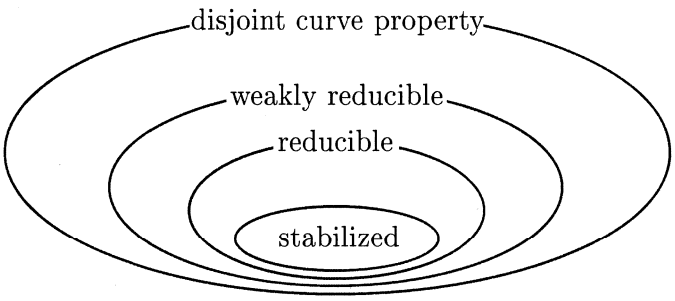


FIGURE 2. Inclusion relation in case of $genus(S) \geq 2$.

$\mathcal{H}^2$ and filling some 2-sphere boundary components with 3-handles $\mathcal{H}^3$. Hence we obtain the following decomposition of M:

$$M = \partial_1 M \times [0,1] \cup \mathcal{H}^0 \cup \mathcal{H}^1 \cup S \times [0,1] \cup \mathcal{H}^2 \cup \mathcal{H}^3.$$

By collapsing $S \times [0,1]$ to S, we have:

$$M = \partial_1 M \times [0,1] \cup \mathcal{H}^0 \cup \mathcal{H}^1 \cup_S \mathcal{H}^2 \cup \mathcal{H}^3.$$

This is called a *handle decomposition of M induced from $(C_1, C_2; S)$*.

Definition 3.4. Let $(C_1, C_2; S)$ be a Heegaard splitting of $(M; \partial_1 M, \partial_2 M)$.

(1) The splitting $(C_1, C_2; S)$ is said to be *stabilized* if there are essential disks D_i $(i = 1, 2)$ of C_i such that ∂D_1 and ∂D_2 intersect transversely in a single point.

(2) The splitting $(C_1, C_2; S)$ is said to be *reducible* if there are essential disks D_i $(i = 1, 2)$ of C_i with $\partial D_1 = \partial D_2$. The splitting $(C_1, C_2; S)$ is said to be *irreducible* if $(C_1, C_2; S)$ is not reducible.

(3) The splitting $(C_1, C_2; S)$ is said to be *weakly reducible* if there are essential disks D_i $(i = 1, 2)$ of C_i with $\partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset$. The splitting $(C_1, C_2; S)$ is said to be *strongly irreducible* if $(C_1, C_2; S)$ is not *weakly reducible.*

(4) The splitting $(C_1, C_2; S)$ admits *disjoint curve property* if there are essential disks D_i $(i = 1, 2)$ of C_i and an essential loop z with $(\partial D_1 \cup \partial D_2) \cap z = \emptyset$.

Suppose that $(C_1, C_2; S)$ is stabilized, and let D_i $(i = 1, 2)$ be disks as in (1) of Definition 3.4. Note that since ∂D_1 intersects ∂D_2 transversely in a single point, we see that each of ∂D_i $(i = 1, 2)$ is non-separating in S and hence each of D_i $(i = 1, 2)$ is non-separating in C_i. Set $C_1' = \mathrm{cl}(C_1 \setminus \eta(D_1; C_1))$ and $C_2' = C_2 \cup \eta(D_1; C_1)$. Then each of C_i' $(i = 1, 2)$ is a compression body with $\partial_+ C_1' = \partial_+ C_2'$. Set $S' = \partial_+ C_1' (= \partial_+ C_2')$. Then we obtain the Heegaard splitting $(C_1', C_2'; S')$ of M with $genus(S') = genus(S) - 1$. Conversely, $(C_1, C_2; S)$ is obtained from $(C_1', C_2'; S')$ by adding a trivial handle. We say that $(C_1, C_2; S)$ is obtained from $(C_1', C_2'; S')$ by *stabilization.* Figure 2 describes inclusion relation among the properties in Definition 3.4.

The following is part of relation between Heegaard splittings and topology of 3-manifolds. For simplicity, we here assume $\partial M = \emptyset$.

Theorem 3.5. *Suppose that $\partial M = \emptyset$.*

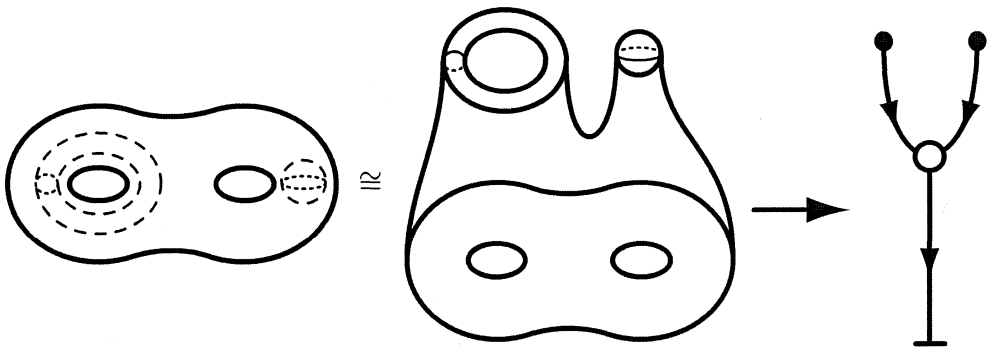


FIGURE 3. The middle is a schematic of a compression body on the left side.

(1) (Haken [2]) *Let* $(C_1, C_2; S)$ *be a Heegaard splitting of* $(M; \partial_1 M, \partial_2 M)$. *If* M *is reducible, then* $(C_1, C_2; S)$ *is reducible.*
(2) (Casson-Gordon [1]) *Let* $(C_1, C_2; S)$ *be a Heegaard splitting of* $(M; \partial_1 M, \partial_2 M)$. *If* $(C_1, C_2; S)$ *is weakly reducible and is not reducible, then* M *contains a closed incompressible surface.*
(3) (Hempel [3]) *Let* $(C_1, C_2; S)$ *be a Heegaard splitting of* $(M; \partial_1 M, \partial_2 M)$ *with genus*$(S) \geq 2$. *If* M *is toroidal or is a Seifert fibered manifold, then* $(C_1, C_2; S)$ *admits disjoint curve property.*

4. GENERALIZED HEEGAARD SPLITTINGS

Collapsing a compression body C, we can say that it looks like a *fork*. The grip of a fork corresponds to $\partial_+ C$, and each tine just corresponds to a component of $\partial_- C$. This idea is so convenient for defining generalized Heegaard splittings.

Definition 4.1. A 0-*fork* is a connected 1-complex obtained by joining a point p to a point g whose 1-simplexes are oriented toward g and away from p. For $n \geq 1$, an n-*fork* is a connected 1-complex obtained by joining a point p to each of distinct n points t_i $(i = 1, ..., n)$ and to a point g whose 1-simplexes are oriented toward g and away from t_i. We call p a *root*, t_i a *tine* and g a *grip*.

As mentioned previously, an n-fork corresponds to a compression body C such that each of t_i $(i = 1, 2, ..., n)$ corresponds to a component of $\partial_- C$ and g corresponds to $\partial_+ C$ (*cf.* Figure 3).

Definition 4.2. Let $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$ resp.) be a collection of finite forks, $T_{\mathcal{A}}$ ($T_{\mathcal{B}}$ resp.) a collection of tines of $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$ resp.) and $G_{\mathcal{A}}$ ($G_{\mathcal{B}}$ resp.) a collection of grips of $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$ resp.). We suppose that there are bijections $\mathcal{T} : T_{\mathcal{A}} \to T_{\mathcal{B}}$ and $\mathcal{G} : G_{\mathcal{A}} \to G_{\mathcal{B}}$. A *fork complex* $\mathcal{F}$ is an oriented connected 1-complex $\mathcal{A} \cup (-\mathcal{B})/\{\mathcal{T}, \mathcal{G}\}$, where $-\mathcal{B}$ denotes the 1-complex obtained by taking the opposite orientation of each 1-simplex and the equivalence relation $/\{\mathcal{T}, \mathcal{G}\}$ is given by $t \sim \mathcal{T}(t)$ for any $t \in T_{\mathcal{A}}$ and $g \sim \mathcal{G}(g)$ for any $g \in G_{\mathcal{A}}$. We define:

$$\partial_1 \mathcal{F} = \{(\text{the tines of } \mathcal{A}) \setminus T_{\mathcal{A}}\} \cup \{(\text{the grips of } \mathcal{B}) \setminus G_{\mathcal{B}}\} \text{ and}$$
$$\partial_2 \mathcal{F} = \{(\text{the tines of } \mathcal{B}) \setminus T_{\mathcal{B}}\} \cup \{(\text{the grips of } \mathcal{A}) \setminus G_{\mathcal{A}}\}.$$

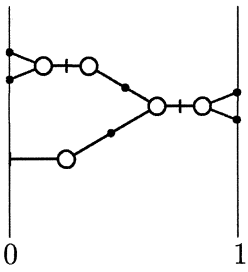


FIGURE 4. An example of an exact fork complex.

Definition 4.3. A fork complex $\mathscr{F}$ is *exact* if we can put $\mathscr{F}$ in $\mathbb{R}^3$ so that

(1) $\partial_1\mathscr{F}$ lies in the plane of height 0,
(2) for any simple path α in $\mathscr{F}$ from a point in $\partial_1\mathscr{F}$ to a point in $\partial_2\mathscr{F}$, $h|_\alpha$ is monotonically increasing, where h is the height function of $\mathbb{R}^3$ and
(3) $\partial_2\mathscr{F}$ lies in the plane of height 1 (*cf.* Figure 4).

In the following, we regard fork complexes as geometric objects, i.e., 1-dimensional polyhedra.

Definition 4.4. A *fork of* $\mathscr{F}$ is the image of a fork in $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ in $\mathscr{F}$. A *grip* (*root* and *tine* resp.) *of* $\mathscr{F}$ is the image of a grip (root and tine resp.) in $\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ in $\mathscr{F}$.

Definition 4.5. Let M be a compact orientable 3-manifold, and let $(\partial_1 M, \partial_2 M)$ be a partition of boundary components of M. A *generalized Heegaard splitting* of $(M;\partial_1 M,\partial_2 M)$ is a pair of an exact fork complex $\mathscr{F}$ and a proper map $\rho : (M;\partial_1 M,\partial_2 M)\to(\mathscr{F};\partial_1\mathscr{F},\partial_2\mathscr{F})$ which satisfies the following.

(1) The map ρ is transverse to $\mathscr{F}-\{\text{the roots of }\mathscr{F}\}$.
(2) For each fork $\mathcal{F}\subset\mathscr{F}$, we have the following.
   (a) If $\mathcal{F}$ is a 0-fork, then $\rho^{-1}(\mathcal{F})$ is a handlebody $V_\mathcal{F}$ such that (1) $\rho^{-1}(g)=\partial V_\mathcal{F}$ and (2) $\rho^{-1}(p)$ is a 1-complex which is a spine of $V_\mathcal{F}$, where g is the grip of $\mathcal{F}$.
   (b) If $\mathcal{F}$ is an n-fork with $n\geq 1$, then $\rho^{-1}(\mathcal{F})$ is a connected compression body $V_\mathcal{F}$ such that (1) $\rho^{-1}(g)=\partial_+ V_\mathcal{F}$, (2) for each tine t_i, $\rho^{-1}(t_i)$ is a connected component of $\partial_- V_\mathcal{F}$ and $\rho^{-1}(t_i)\neq\rho^{-1}(t_j)$ for $i\neq j$ and (3) $\rho^{-1}(p)$ is a 2-complex which is a deformation retract of $V_\mathcal{F}$, where g is the grip of $\mathcal{F}$, p is the root of $\mathcal{F}$ and $\{t_i\}_{1\leq i\leq n}$ is the set of the tines of $\mathcal{F}$.

Let g be a grip of $\mathscr{F}$ which is contained in the interior of $\mathscr{F}$. Let $\mathcal{F}_1$ and $\mathcal{F}_2$ be the forks of $\mathscr{F}$ which are adjacent to g. Then $(\rho^{-1}(\mathcal{F}_1),\rho^{-1}(\mathcal{F}_2);\rho^{-1}(g))$ is a Heegaard splitting of $\rho^{-1}(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2)$. Moreover, if it is weakly reducible, then we can obtain another generalized Heegaard splitting via *weak reduction*. In the next section, we demonstrate a concrete example of the way weak reduction is used.

5. Examples of generalized Heegaard splittings

In this section, we obtain a generalized Heegaard splitting and associated fork complex of the 3-torus $T^3=S^1\times S^1\times S^1$. It is known that T^3 is obtained from a

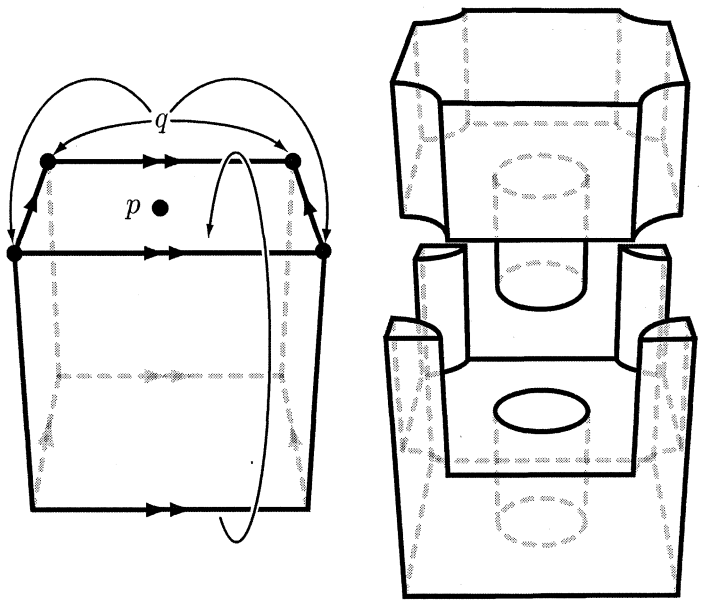


FIGURE 5. A Heegaard splitting of T^3.

cube $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ by attaching corresponding edges and faces as in Figure 5 (a). Set

$$A = \mathrm{cl}((T^2 \times [0,1/2]) \setminus \eta(p \times [0,1/2]; T^2 \times [0,1/2])) \cup \eta(q \times [1/2,1]; T^2 \times [1/2,1])$$

and

$$\begin{aligned} B &= \mathrm{cl}(T^3 \setminus A) \\ &= \mathrm{cl}((T^2 \times [1/2,1]) \setminus \eta(q \times [1/2,1]; T^2 \times [1/2,1])) \cup \eta(p \times [0,1/2]; T^2 \times [0,1/2]). \end{aligned}$$

Then we see that A and B are genus two handlebodies and hence $(A, B; S)$ is a Heegaard splitting of T^3, where $S = \partial A = \partial B$ (*cf.* Figure 5 (b)). Set $h^1 = \eta(q \times [1/2,1]; T^2 \times [1/2,1])$ and $h^2 = \eta(p \times [0,1/2]; T^2 \times [0,1/2])$. Note that h^1 (h^2 resp.) can be regarded as a 1-handle (2-handle resp.) in a handle decomposition of T^3 obtained from the Heegaard splitting $(A, B; S)$. Since $h^1 \cap h^2 = \emptyset$, we can perform a *weak reduction* to obtain a generalized Heegaard splitting. We give a concrete description of the generalized Heegaard splitting in the following. First, set $A_1 = \mathrm{cl}(T^3 \times [0,1/2] \setminus h^1)$ and $B_2 = \mathrm{cl}(T^3 \times [1/2,1] \setminus h^2)$. That is, A_1 is obtained from A by removing the 1-handle h^1 and B_2 is obtained from B by removing the 2-handle h^2. Then we have:

$$\begin{aligned} T^3 &= A \cup B \\ &= A_1 \cup h^1 \cup h^2 \cup B_2 \\ &\cong A_1 \cup (\partial A_1 \times [0,1]) \cup h^1 \cup h^2 \cup B_2 \\ &= A_1 \cup \big((\partial A_1 \times [0,1]) \cup h^2\big) \cup h^1 \cup B_2. \end{aligned}$$

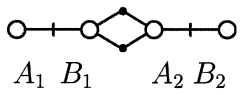


FIGURE 6. The associated fork complex.

Set $B_1 = (\partial A_1 \times [0,1]) \cup h^2$. Then B_1 is a compression body such that $\partial_+ B_1 = \partial A_1$ and $\partial_- B$ consists of two tori. Hence we have:

$$\begin{aligned} T^3 &\cong A_1 \cup B_1 \cup h^1 \cup B_2 \\ &\cong A_1 \cup B_1 \cup \big((\partial_- B_1 \times [0,1]) \cup h^1\big) \cup B_2. \end{aligned}$$

Set $A_2 = (\partial_- B_1 \times [0,1]) \cup h^1$. Then A_2 is a compression body such that $\partial_+ A_2 = \partial B_2$ and $\partial_- A_2 = \partial_- B_1$. Hence we have:

$$T^3 = (A_1 \cup B_1) \cup (A_2 \cup B_2).$$

This together with the fork complex as in Figure 6 gives a generalized Heegaard splitting.

REFERENCES

[1] A. Casson and C. McA. Gordon, *Reducing Heegaard splittings*, Topology Appl. **27** (1987), 275-283.

[2] W. Haken, *Some results on surfaces in 3-manifolds*, Studies in Modern Topology, Math. Assoc. Amer. 1968, 39-98.

[3] J. Hempel, *3-manifolds as viewed from the curve complex*, Topology, **40** (2001), 631-657.

[4] E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds whose homeomorphism classes of Heegaard splittings have polynomial growth*, Ann. of Math. **55** (1952), 96-114.

[5] T. Saito, M. Scharlemann and J. Schultens, *Lecture notes on generalized Heegaard splittings*, preprint, ArXiv: math.GT/0504167.

[6] J. Schultens, *The classification of Heegaard splittings for (compact orientable surfaces)$\times S^1$*, Proc. London Math. Soc. **67** (1993), 425-448.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA UNIVERSITY, MACHIKANEYAMA 1-16, TOYONAKA, OSAKA 560-0043, JAPAN

E-mail address: saito@gaia.math.wani.osaka-u.ac.jp

One-dimensional h-path processes

Miyuki MAENO

Graduate School of Human Culture, Nara Women's University

1 One-dimensional generalized diffusion processes

Let $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ and m be a nondecreasing right continuous function from $\overline{\mathbb{R}}$ into $\overline{\mathbb{R}}$. We set $\ell_1 = \inf\{x \in \overline{\mathbb{R}};\ m(x) > -\infty\}$, $\ell_2 = \sup\{x \in \overline{\mathbb{R}};\ m(x) < \infty\}$, $S_m = (\ell_1,\ \ell_2)$. Let s be a real valued continuous increasing function on S_m, and k be a real valued right continuous nondecreasing function on S_m. We set

$$S_*(\mu) = \{x \in S_m;\ \mu(x_1) < \mu(x_2) \text{ for } \ell_1 < {}^\forall x_1 < x < {}^\forall x_2 < \ell_2\}, \quad \mu = m \text{ or } k.$$

We assume $S_*(m) \neq \emptyset$ and $S_*(k) \subset S_*(m)$. Further we set

$$S_{**}(m) = S_*(m) \cup \{x;\ x = \ell_i \text{ with } |m(\ell_i)| + |s(\ell_i)| + |k(\ell_i)| < \infty,\ i = 1, 2\}.$$

We introduce the following two quantities.

$$J^{\ell_1}_{\mu,\nu} = \int_{(\ell_1, c]} d\mu(x) \int_{(x,c]} d\nu(y), \quad J^{\ell_2}_{\mu,\nu} = \int_{[c,\ell_2)} d\mu(x) \int_{[c,x)} d\nu(y),$$

where $d\mu$ and $d\nu$ are Borel measures on S_m.

Definition 1 For each $i = 1, 2$, ℓ_i is called to be

(s, m, k)-regular	if $J^{\ell_i}_{s,m+k} < \infty$, $J^{\ell_i}_{m+k,s} < \infty$,
(s, m, k)-exit	if $J^{\ell_i}_{s,m+k} < \infty$, $J^{\ell_i}_{m+k,s} = \infty$,
(s, m, k)-entrance	if $J^{\ell_i}_{s,m+k} = \infty$, $J^{\ell_i}_{m+k,s} < \infty$,
(s, m, k)-natural	if $J^{\ell_i}_{s,m+k} = \infty$, $J^{\ell_i}_{m+k,s} = \infty$.

Let $C_b(E)$ be the set of all bounded continuous functions on E, where E is a Borel set.

Definition 2 Let $D(\mathcal{G})$ be the space of all functions u in $C_b(S_m)$ satisfying the following conditions.

($\mathcal{G}$.1) There are a function $f \in C_b(S_*(m))$ and two constants A_1, A_2 such that

$$(1) \qquad u(x) = A_1 + A_2\{s(x) - s(c)\} + \int_{(c,x]} \{s(x) - s(y)\} f(y)\, dm(y) + \int_{(c,x]} \{s(x) - s(y)\} u(y)\, dk(y), \quad x \in S_m.$$

($\mathcal{G}$.2) For each $i = 1, 2$, if ℓ_i is regular, then $u(\ell_i) = 0$.

The operator $\mathcal{G}$ is defined by the mapping from $u \in D(\mathcal{G})$ to $f \in C_b(S_*(m))$ appeared in (1). The operator $\mathcal{G}$ is called a one-dimensional generalized diffusion operator (ODGDO for brief) with (s, m, k).

It is known that there exists a process $\mathbb{D} = [X(t);\ t \geq 0,\ P_x;\ x \in S_{**}(m)]$ with the generator $\mathcal{G}$, which is called a one-dimensional generalized diffusion process (ODGDP for brief) on S_m ([8], [13]). Further there exists a positive continuous function $p(t, x, y)$ satisfying

$$P_x(X(t) \in E) = \int_E p(t, x, y)\, dm(y), \quad t > 0,\ x \in S_{**}(m),\ E \in \mathcal{B}(S_m).$$

We call $p(t, x, y)$ the transition probability density function with respect to m.

2 One-dimensional generalized h-path processes

Let $\mathbb{D} = [X(t);\ t \geq 0,\ P_x;\ x \in S_{**}(m)]$ be the ODGDP with a generator $\mathcal{G}$ with $(s, m, 0)$. For $\alpha > 0$ and $i = 1, 2$, let $g_i(\cdot, \alpha)$ be a function on S_m satisfying the following properties.

(g.1) $g_i(x, \alpha)$ is positive and continuous in x.

(g.2) $g_1(x, \alpha)$ is nondecreasing in x and $g_2(x, \alpha)$ is nonincreasing in x.

(g.3) If $|s(\ell_i)| < \infty$, then $g_i(\ell_i, \alpha) = 0$.

(g.4) $g_i(x, \alpha)$ satisfies

$$\begin{aligned} g_i(x, \alpha) =& g_i(c, \alpha) + (D_s g_i)(c, \alpha)\{s(x) - s(c)\} \\ &+ \alpha \int_{(c,x]} \{s(x) - s(y)\} g_i(y, \alpha)\, dm(y), \quad x \in S_m, \end{aligned}$$

where $D_s f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \{f(x + \varepsilon) - f(x)\}/\{s(x + \varepsilon) - s(x)\}$. We set $W(\alpha) = (D_s g_1)(x, \alpha) g_2(x, \alpha) - g_1(x, \alpha)(D_s g_2)(x, \alpha)$. Note that $W(\alpha)$ is a positive number independent of $x \in S_m$.

Definition 3 We set

$$G(\alpha, x, y) = G(\alpha, y, x) = W(\alpha)^{-1} g_1(x, \alpha) g_2(y, \alpha), \quad \alpha > 0,\ x, y \in S_m,\ x \leq y.$$

We call $G(\alpha, x, y)$ the Green function corresponding to the ODGDO $\mathcal{G}$ with $(s, m, 0)$.

It is known that the Green function $G(\alpha, x, y)$ corresponding to $\mathcal{G}$ coincides with the Laplace transform of $p(t, x, y)$, that is,

$$G(\alpha, x, y) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} p(t, x, y)\, dt, \quad \alpha > 0,\ x, y \in S_{**}(m).$$

([8], [11]).

Definition 4 We call h a *superharmonic function on S_m with respect to* (s, m) if and only if h is positive and continuous on S_m and has the right derivative $D_s h$ which is right continuous and nonincreasing on S_m, and the set $\{x \in S_m;\ D_s h(x_1) > D_s h(x_2)$ for $\ell_1 < {}^\forall x_1 < x < {}^\forall x_2 < \ell_2\}$ is included in $S_*(m)$.

For a superharmonic function h on S_m with respect to (s, m), we set

$$m^h(x) = \begin{cases} -\infty & \text{if } x \in (-\infty, \ell_1), \\ \int_{(c,x]} h(y)^2\, dm(y) & \text{if } x \in [\ell_1, \ell_2), \\ \infty & \text{if } x \in [\ell_2, \infty), \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$s^h(x) = \int_{(c,x]} h(y)^{-2}\, ds(y), \quad x \in S_m,$$

$$k^h(x) = -\int_{(c,x]} h(y)\, dD_s h(y), \quad x \in S_m.$$

Let $\mathcal{G}^h$ be the ODGDO with (s^h, m^h, k^h) and $\mathbb{D}^h$ be an ODGDP with the generator $\mathcal{G}^h$, which is called a one-dimensional h-path generalized diffusion process. We set

$$G^h(\alpha, x, y) = G^h(\alpha, y, x) = G(\alpha, x, y)/h(x)h(y), \quad \alpha > 0,\ x, y \in S_m,\ x \le y.$$

Theorem 5 The function $G^h(\alpha, x, y)$ is the Green function corresponding to the ODGDO $\mathcal{G}^h$ with (s^h, m^h, k^h).

By virtue of the uniqueness of Laplace transform, we obtain that

$$p^h(t, x, y) = p(t, x, y)/h(x)h(y), \quad t > 0,\ x, y \in S_{**}(m).$$

The states of the end point ℓ_1 are described in Tables 1, which suggests the behavior of sample paths of $\mathbb{D}^h$ near the end points of S_m.

Table 1

state of ℓ_1 \ $\inf S_*(k^h)$ \ $h(\ell_1)$	$= 0$		$\in (0,\infty)$		$= \infty$	
	$> \ell_1$	$= \ell_1$	$> \ell_1$	$= \ell_1$	$> \ell_1$	$= \ell_1$
$(s,m,0)$-regular	(s^h,m^h,k^h)-entrance	(s^h,m^h,k^h)-entrance if $J^{\ell_1}_{k^h,s^h} < \infty$ (s^h,m^h,k^h)-natural if $J^{\ell_1}_{k^h,s^h} = \infty$	(s^h,m^h,k^h)-regular	(s^h,m^h,k^h)-regular if $D_s h(\ell_1) \in (-\infty,\infty)$ (s^h,m^h,k^h)-exit if $D_s h(\ell_1) = \infty$		
$(s,m,0)$-exit	(s^h,m^h,k^h)-entrance	(s^h,m^h,k^h)-entrance if $J^{\ell_1}_{m^h+k^h,s^h} < \infty$ (s^h,m^h,k^h)-natural if $J^{\ell_1}_{m^h+k^h,s^h} = \infty$	(s^h,m^h,k^h)-exit	(s^h,m^h,k^h)-exit		
$(s,m,0)$-entrance			(s^h,m^h,k^h)-entrance	(s^h,m^h,k^h)-entrance	(s^h,m^h,k^h)-regular if $J^{\ell_1}_{m^h,s^h} < \infty$ (s^h,m^h,k^h)-exit if $J^{\ell_1}_{m^h,s^h} = \infty$	(s^h,m^h,k^h)-regular if $J^{\ell_1}_{s^h,m^h+k^h} < \infty$ and $J^{\ell_1}_{m^h+k^h,s^h} < \infty$ (s^h,m^h,k^h)-exit if $J^{\ell_1}_{s^h,m^h+k^h} < \infty$ and $J^{\ell_1}_{m^h+k^h,s^h} = \infty$ (s^h,m^h,k^h)-natural if $J^{\ell_1}_{s^h,m^h+k^h} = \infty$ and $J^{\ell_1}_{m^h+k^h,s^h} = \infty$
$(s,m,0)$-natural	(s^h,m^h,k^h)-natural	(s^h,m^h,k^h)-natural	(s^h,m^h,k^h)-natural	(s^h,m^h,k^h)-natural	(s^h,m^h,k^h)-natural	(s^h,m^h,k^h)-natural

3 Application to population genetics

We consider a locus with two alleles in a randomly mating population of N diploid individuals. We denote by A_1 the wide-type allele and by A_2 the mutant allele. Let $X(n)$ be the relative frequency (gene frequency) of A_1 at the n-th generation in the population ($n = 0, 1, 2, \cdots$). Mutation, selection and random genetic drift are the factors which change gene frequency $X(n)$. The Wright-Fisher model and the stochastic selection model are the fundamental stochastic models in population genetics. The Wright-Fisher model is a stochastic model due to random genetic drift and this stochastic force has no correlation between distinct generations. On the other hand, in the stochastic selection model stochastic force of selection has autocorrelation from generation to generation in general. These models are described by discrete time stochastic processes because we regard the generation as the time unit. It is difficult, however, to analyze these discrete time models. Then diffusion approximations are employed for the original discrete time models. In other words, we approximate a discrete time stochastic process in population genetics by an appropriate diffusion process by introducing a new time scaling ([2], [7]). A general stochastic model may be obtained by combining these diffusion models. We will deal with a diffusion process $\mathbb{D} = [X(t); t \geq 0, P_x; x \in I]$ that is the diffusion model with random genetic drift and stochastic selection, where $I = (0, 1)$. Further we introduce two deterministic factors of mutation and selection in this diffusion model.

It is known that the generator of the diffusion process $\mathbb{D}$ is given by

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx}, \\
a(x) &= \frac{1}{2N}x(1-x) + \gamma x^2(1-x)^2, \\
b(x) &= v - (u+v)x + \frac{\gamma}{2}\rho x(1-x)(1-2x) \\
&\quad + \{(S_{11} - 2S_{12} + S_{22})x + S_{12} - S_{22}\}x(1-x)
\end{aligned}
$$

(see [6]). The meaning of each variable and parameter are as follows. The variable x is the gene frequency of A_1 ($0 \leq x \leq 1$). The parameter N is the population size ($1 \leq N \leq \infty$). Note that the case that $N = \infty$ corresponds to that without random genetic drift. Three genotypes A_1A_1, A_1A_2 and A_2A_2 have fitnesses $1 + w_n + S_{11}$, $1 + \frac{1}{2}w_n + S_{12}$ and $1 + S_{22}$ in the original discrete time model. Here w_n is the stochastic part of selection parameters at the n-th generation, and S_{11}, S_{12} and S_{22} are the deterministic part of selection parameters ($\min\{w_n + S_{11}, \frac{1}{2}w_n + S_{12}, S_{22}\} \geq -1$). It is assumed that stochastic selection has no dominance. We assume that $\{w_n : 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$

is a discrete time stationary process with the mean $E[w_n] = 0$. The parameter $\gamma = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E[w_o w_k]/4$ is a degree of autocorrelated stochastic selection ($0 \leq \gamma < \infty$). The parameter ρ denotes the type of stochastic selection ($\rho \geq 1$). The case that $\rho = 1$ with $N < \infty$ is called the TIM model ([12]) and the case that $\rho > 1$ with $N = \infty$ is called the SAS-CFF model ([5]). The mutation rate per generation from A_1 to A_2 [resp. from A_2 to A_1] is denoted by u [resp. v] ($u,\ v \geq 0$). Here we set

$$s_o(x) = \exp\left\{-2\int_c^x \frac{b(y)}{a(y)}\,dy\right\}, \qquad m_o(x) = \frac{2}{a(x)}\exp\left\{2\int_c^x \frac{b(y)}{a(y)}\,dy\right\},$$

$$s(x) = \int_c^x s_o(y)\,dy, \qquad m(x) = \int_c^x m_o(y)\,dy.$$

The states of the end points 0 and 1 are described in Tables 2 and 3.

Table 2 The state of the end point 0

	$\lvert s(0+)\rvert$	$\lvert m(0+)\rvert$	state
$N < \infty,\ v = 0$	$< \infty$	$= \infty$	exit
$N < \infty,\ 0 < 4Nv < 1$	$< \infty$	$< \infty$	regular
$N < \infty,\ 4Nv \geq 1$	$= \infty$	$< \infty$	entrance
$N = \infty,\ v > 0$	$= \infty$	$< \infty$	entrance
$N = \infty,\ v = 0,\ u < S_{12} - S_{22} + \gamma(\rho - 1)/2$	$= \infty$	$< \infty$	natural
$N = \infty,\ v = 0,\ u = S_{12} - S_{22} + \gamma(\rho - 1)/2$	$= \infty$	$= \infty$	natural
$N = \infty,\ v = 0,\ u > S_{12} - S_{22} + \gamma(\rho - 1)/2$	$< \infty$	$= \infty$	natural

Table 3 The state of the end point 1

	$s(1-)$	$m(1-)$	state
$N < \infty,\ u = 0$	$< \infty$	$= \infty$	exit
$N < \infty,\ 0 < 4Nu < 1$	$< \infty$	$< \infty$	regular
$N < \infty,\ 4Nu \geq 1$	$= \infty$	$< \infty$	entrance
$N = \infty,\ u > 0$	$= \infty$	$< \infty$	entrance
$N = \infty,\ u = 0,\ v < S_{12} - S_{11} + \gamma(\rho - 1)/2$	$= \infty$	$< \infty$	natural
$N = \infty,\ u = 0,\ v = S_{12} - S_{11} + \gamma(\rho - 1)/2$	$= \infty$	$= \infty$	natural
$N = \infty,\ u = 0,\ v > S_{12} - S_{11} + \gamma(\rho - 1)/2$	$< \infty$	$= \infty$	natural

Let us consider the following five conditions.

(i) $N < \infty, \quad 0 \leq 4Nu < 1, \quad 0 \leq 4Nv < 1.$
In the case that $0 < 4Nu < 1$, the end point 1 is assumed to be absorbing.

(ii) $N < \infty, \quad 0 \leq 4Nu < 1, \quad 4Nv \geq 1.$
In the case that $0 < 4Nu < 1$, the end point 1 is assumed to be absorbing.

(iii) $N=\infty, \quad u=0, \quad v>\max\{0, S_{12}-S_{11}+\gamma(\rho-1)/2\},$

(iv) $N=\infty, \quad u=v=0, \quad S_{11}>S_{12}+\gamma(\rho-1)/2\geq S_{22}.$

(v) $N=\infty, \quad u=v=0, \quad \min\{S_{11}, S_{12}\}>S_{12}+\gamma(\rho-1)/2.$

Under these conditions, there exists the following limit distribution,

$$(2)\quad P^*(t,x,E)=\lim_{n\to\infty} P_x\left(X(t)\in E|\ \sigma_{\eta_n}<\sigma_{\xi_n}\right), \quad t>0,\ x\in I,\ E\in\mathcal{B}(I),$$

for any sequences $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ satisfying $\xi_n\downarrow 0$, $\eta_n\uparrow 1$ as $n\to\infty$, where σ_y be the first hitting time at $y\in I$. We set

$$\kappa(x)=\begin{cases}\dfrac{s(x)-s(0+)}{s(1-)-s(0+)}, & \text{if (i) or (v) is satisfied,}\\ 1, & \text{otherwise,}\end{cases} \qquad 0\leq x\leq 1.$$

Theorem 6 Assume one of (i), (ii), (iii), (iv), (v). Then $P^*(t,x,E)$, $t>0$, $x\in I$, $E\in\mathcal{B}(I)$, is the transition probability of $\mathbb{D}^\kappa$ whose generator is given by $\mathcal{G}^\kappa$. If (i) or (v) is satisfied, then $\mathcal{G}^\kappa$ is given by

$$\mathcal{G}^\kappa=\frac{1}{2}a(x)\frac{d^2}{dx^2}+b^\kappa(x)\frac{d}{dx},$$

where $b^\kappa(x)=b(x)+s_o(x)\{s(x)-s(0)\}^{-1}a(x)$. If one of (ii), (iii) or (iv) is satisfied, then $\mathcal{G}^\kappa=L$.

Proposition 7 If (i), (ii) or (iii) is satisfied, the end point 0 is $(s^\kappa, m^\kappa, 0)$-entrance. If (iv) or (v) is satisfied, the end point 0 is $(s^\kappa, m^\kappa, 0)$-natural. If (i) or (ii) is satisfied and $u=0$, the end point 1 is $(s^\kappa, m^\kappa, 0)$-exit. If (i) or (ii) is satisfied and $u>0$, the end point 1 is $(s^\kappa, m^\kappa, 0)$-regular. If (iii), (iv) or (v) is satisfied, the end point 1 is $(s^\kappa, m^\kappa, 0)$-natural.

The distributions like (2) sometimes appear in population genetics. Namely, let $\mathbb{D}=[X(t);\ t\geq 0,\ P_x;\ x\in I]$ be a diffusion approximation of gene frequency process. If the end points 0 and 1 are accessible, then the conditional distribution $P_x\left(X(t)\in E|\ \sigma_1<\sigma_0\right)$ stands for the distribution of frequency of a certain allele under the condition that it reaches fixation before it disappears from the population. Such distributions and related topics are studied by Ewens [3], [4] and Karlin and Taylor [9] in some cases.

References

[1] J. L. Doob, Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions, *Bull. Soc. Math. France* **85** (1957), 431–458.

[2] Ethier, S. N. and Kurtz, T. G., Markov Processes: Characterization and Convergence, John Wiley & Sons, New York, 1986.

[3] Ewens, W. J., Conditional diffusion processes in population genetics, *Theor. Pop. Biol.* **4** (1973), 21–30.

[4] Ewens, W. J., Mathematical Population Genetics, Springer-Verlag, New York, 1979.

[5] Gillespie, J. H., A general model to account for enzyme variation in natural populations V. The SAS-CFF model, Theor. Pop. Biol. **14** (1978), 1–45.

[6] Gillespie, J. H., The Causes of Molecular Evolution, Oxford Univ. Press, 1991.

[7] Iizuka, M. and Matsuda, H., Weak convergence of discrete time non-Markovian processes related to selection models in population genetics, J. Math. Biology **15** (1982), 107–127.

[8] K. Itô and H. P. McKean, Jr., *Diffusion Processes and their Sample Paths*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[9] Karlin, S. and Taylor, H. M., *A Second Course in Stochastic Processes*, Academic Press, New York, 1981.

[10] H. P. McKean, Jr., Elementary solutions for certain parabolic differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **82** (1956), 519–548.

[11] Minami, N., Ogura, Y. and Tomisaki, M., Asymptotic behavior of elementary solutions of one-dimensional generalized diffusion equations, *Ann. Probab.* **13** (1985), 698–715.

[12] Takahata, N., Ishii, K. and Matsuda, H., Effect of temporal fluctuation of selection coefficient on gene frequency in a population, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **72** (1975), 4541–454.

[13] S. Watanabe, On time inversion of one-dimensional diffusion processes, *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **31** (1975), 115–124.

Vertex operator algebra and McKay's E_8 observation on the Monster

Hiroshi Yamauchi

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914 JAPAN

e-mail: yamauchi@ms.u-tokyo.ac.jp

February 15, 2006

Abstract

As one of mysterious properties of the Monster simple group, J. McKay observed that there exists an interesting connection between the 2A-conjugacy class of the Monster and the (extended) E_8 Dynkin diagram. Monster, the largest sporadic finite simple group, can be defined by the symmetry group of the moonshine vertex operator algebra. In this talk we will report on results of our research to find the structure of E_8 diagram inside the moonshine vertex operator algebra. This is a joint work with Ching Hung Lam and Hiromichi Yamada.

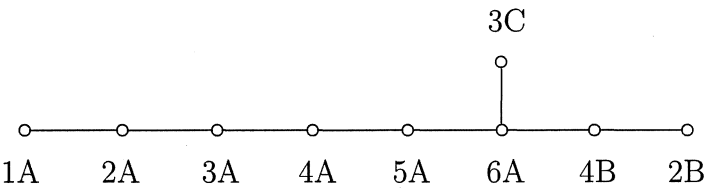
1 McKay's E_8-observation on the Monster

After the classification of finite simple groups, we found the Monster as the largest sporadic finite simple group $\mathbb{M}$. The Monster $\mathbb{M}$ has many mysterious properties; probably the most famous example is known to as the moonshine phenomenon or the monstrous moonshine [CN, B]. Another example is McKay's E_8-observation on the Monster, which is the main topic of this talk. Let us explain McKay's observation briefly. The Monster has two conjugacy classes of involutions, called 2A and 2B-conjugacy classes [ATLAS]. Let $g, h \in \mathbb{M}$ be two involutions of 2A-conjugacy class. Then the order of a product gh is known to be less than or equal to 6, which is sometimes referred to as the 6-transposition property, and the conjugacy class of the product falls into one of the following [ATLAS, C]:

$$1A,\ 2A,\ 3A,\ 4A,\ 5A,\ 6A,\ 4B,\ 2B,\ \text{or}\ 3C,$$

where the name pX is used in the way that p denotes the order and the letter X is labeled to distinguish classes having the same order (cf. [ATLAS]). In [Mc], J. McKay pointed

out that the numbers above can be attached to the extended affine E_8 diagram as its labels in the following way:



This is McKay's E_8-observation on the Monster. By this observation, it seems to exist some relations between the 2A-conjugacy class of the Monster and E_8 Dynkin diagram. Since the Monster is known to be the automorphism group of the moonshine vertex operator algebra $V^\natural$ constructed by Frenkel et al. in [FLM], it is expected that the trick of this mystery may be revealed by finding suitable E_8 structure inside $V^\natural$. Our approach is in fact based on this point of view. In [LYY1, LYY2] we introduced an idea to explain the mystery above by using Virasoro vertex operator algebras and the lattice vertex operator algebra associated to $\sqrt{2}E_8$-lattice, which we believe to be the key of elucidation of the observation.

To explain our works, one has to have some basic knowledge of a vertex operator algebra. However, I do not have enough pages to explain all in this article. So I decided to explain the main idea of our results in the forthcoming talk and I would like to devote the rest of this article to introduction to vertex operator algebras for non-experts since the most of participants would be unfamiliar with vertex operator algebra theory. After reading this introduction, I expect the reader would obtain enough ability to read the introduction of [LYY1], from which one may grasp our main idea.

2 Introduction to vertex operator algebras

We give a brief introduction of definition of a vertex operator algebra.

2.1 Notation

First, we fix our terminology and notation. Let V be a linear space, z be an indeterminant. Then we define the following linear spaces:

$$\begin{aligned} V[[z, z^{-1}]] &:= \{\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^n \mid v_n \in V\}, \\ V((z)) &:= \{\textstyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^n \mid v_n \in V,\ v_n = 0 \ \text{ if } \ n \ll 0\}. \end{aligned}$$

For $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n z^n \in V[[z, z^{-1}]]$, we define the *formal residue* by $\mathrm{Res}_z f(z) := v_{-1}$, the coefficient of z^{-1} in $f(z)$. For $n \in \mathbb{Z}$, we define the formal binomial expansion by

$$(z+w)^n := \sum_{i\geq 0} \binom{n}{i} z^{n-i} w^i.$$

Namely, $(z+w)^n$ is expanded in positive powers of the second variable w. Note that $(z+w)^n \neq (w+z)^n$ unless $n \geq 0$.

2.2 Fields

Let M be a linear space over $\mathbb{C}$. A formal power series $a(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1} \in \mathrm{End}(M)[[z, z^{-1}]]$ is called a *field on* M if it satisfies $a(z)v \in M((z))$ for any $v \in M$. The space of fields on M forms a $\mathbb{C}$-linear space which we denote by $\mathcal{F}(M)$. It is clear that $\mathbb{1}_M(z) := \mathrm{id}_M$ is a field on M. We call $\mathbb{1}_M(z)$ the *vacuum field* on M.

2.3 Normal product

For $a(z), b(z) \in \mathcal{F}(M)$, its composition $a(z)b(z)$ does not be a field on M in general. However, we can define the following product on $\mathcal{F}(M)$. For $n \in \mathbb{Z}$, we define the *n-th normal product* $a(z) \circ_n b(z)$ of $a(z)$ and $b(z)$ by means of

$$a(z) \circ_n b(z) := \mathrm{Res}_{z_1}\{(z_1 - z)^n a(z_1)b(z) - (-z + z_1)^n b(z)a(z_1)\}. \tag{2.1}$$

One can check that $a(z) \circ_n b(z)$ is a field on M. Therefore, $\mathcal{F}(M)$ has infinitely many products $\circ_n : \mathcal{F}(M) \otimes \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ for $n \in \mathbb{Z}$.

Remark 2.1. One can directly see that (i) $a(z) \circ_{-1} \mathbb{1}_M(z) = \mathbb{1}_M(z) \circ_{-1} a(z) = a(z)$, (ii) $a(z) \circ_{-2} \mathbb{1}_M(z) = \partial_z a(z)$, where $\partial_z f(z)$ denotes the formal differential of $f(z)$.

2.4 Locality

Let $a(z), b(z) \in \mathcal{F}(M)$. We say $a(z)$ and $b(z)$ are *local* if there is $N \in \mathbb{Z}$ such that

$$(z_1 - z_2)^N a(z_1)b(z_2) = (-z_2 + z_1)^N b(z_2)a(z_1) \tag{2.2}$$

holds in $\mathrm{End}(M)[[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}]]$, and we write $a(z) \sim b(z)$. Among the integers N satisfying (2.2), the minimum one is called the *order of locality between* $a(z)$ *and* $b(z)$ and we denote it by $N(a, b)$. Clearly $N(a, b) = N(b, a)$ and we note that $a(z) \circ_{N(a,b)+i} b(z) = 0$ for any $i \geq 0$.

Remark 2.2. It is not true that $a(z) \sim a(z)$ for any $a(z) \in \mathcal{F}(M)$. It is also not true that $a(z) \sim b(z)$ and $b(z) \sim c(z)$ implies $a(z) \sim c(z)$.

2.5 Dong's lemma

Lemma 2.3. *([L, K]) If $a(z), b(z), c(z) \in \mathcal{F}(M)$ are pair-wise local, then so are $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$ and $a(z) \circ_n b(z)$ for any $n \in \mathbb{Z}$. In particular, $a(z) \circ_n b(z) \sim a \circ_n b(z)$ if both $a(z) \sim a(z)$ and $b(z) \sim b(z)$.*

The lemma above is known as Dong's lemma. By this lemma, mutually local fields forms a subspace under the normal products. This fact characterizes the notion of a vertex algebra.

2.6 Vertex algebras

Definition 2.4. A *vertex algebra* is a subspace $\mathfrak{A}$ of the space $\mathcal{F}(V)$ of fields on a linear space V satisfying:

(i) any two fields in $\mathfrak{A}$ are local.

(ii) $\mathfrak{A}$ is closed under the normal products, i.e. $\mathfrak{A} \circ_n \mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$ for any $n \in \mathbb{Z}$.

(iii) $\mathfrak{A}$ contains the vacuum element, i.e. $\mathbb{1}_V(z) \in \mathfrak{A}$.

$\mathbb{1}_V(z)$ is called the *vacuum element* of $\mathfrak{A}$ and denoted by $\mathbb{1}_{\mathfrak{A}}$.

By Dong's lemma, we can understand that a vertex algebra is an algebra generated by collections of mutually local fields under normal products $\circ_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Remark 2.5. Even though our definition of a vertex algebra seems to differ from the axiomatic notion of a vertex algebra (e.g. [FLM]), it is known that these two definitions are equivalent, see [L, K].

3 Virasoro vertex operator algebra

We give an example of vertex algebras, which will be play an important role in my talk.

Let $\mathrm{Vir} = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}L_n \oplus \mathbb{C}\vec{c}$ be the Virasoro algebra, an infinite dimensional Lie algebra defined by the following Lie brackets:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}\vec{c}, \quad [\vec{c}, \mathrm{Vir}] = 0. \tag{3.1}$$

Let M be a Vir-module and assume that for any $v \in M$, there exists $N \in \mathbb{Z}$ such that $L_n v = 0$ for all $n \geq N$. Moreover, we also assume that the center $\vec{c}$ acts on M by a scalar $c \in \mathbb{C}$ (the number c is called the *central charge* of the representation). Then the generating series $\omega(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \in \mathrm{End}(M)[\![z, z^{-1}]\!]$ defines a field on M. By the

Lie bracket structure in (3.1), one can show that $\omega(z)$ is local to itself with the order of locality 4:

$$(z_1 - z_2)^4\omega(z_1)\omega(z_2) = (z_1 - z_2)^4\omega(z_2)\omega(z_1).$$

Therefore, the field $\omega(z)$ together with the vacuum field $\mathbb{1}_M(z)$ on M generates a vertex algebra in $\mathcal{F}(M)$. This vertex algebra is referred to as a *Virasoro vertex operator algebra* and denoted by $\mathrm{Vir}_c(\omega(z))$. It is known that $\mathrm{Vir}_c(\omega(z))$ possesses a unique simple quotient (cf. [K]). In my talk, the simple Virasoro vertex operator algebra with central charge $c = 1/2$ will be used to define involutions of a vertex operator algebra.

Since we have no more space to continue, I end this article here but now I expect the reader has studied enough fundamentals of a vertex operator algebra. So we refer the reader to the introduction of [LYY1] to get a perspective of our works on McKay's E_8-observation problem.

References

[ATLAS] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker and R.A. Wilson, *ATLAS of Finite Groups*, Oxford Univ. Press, 1985.

[B] R.E. Borcherds, Monstrous moonshine and monstrous Lie superalgebras, *Invent. Math.* **109** (1992), 405–444.

[C] J.H. Conway, A simple construction for the Fisher-Griess Monster group, *Invent. Math.* **79** (1985), 513–540.

[CN] J.H. Conway, and S.P. Norton, Monstrous Moonshine, *Bull. London Math. Soc.* **11**, 308–339, 1979.

[FLM] I.B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol. **134**, Academic Press, New York, 1988.

[K] V.G. Kac, Vertex algebras for beginners, second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[LYY1] C.H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi, Vertex operator algebras, extended E_8 diagram, and McKay's observation on the Monster simple group, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*; see also `arXiv:math.QA/0403010`.

[LYY2] C.H. Lam, H.Yamada and H. Yamauchi, McKay's observation and vertex operator algebras generated by two conformal vectors of central charge 1/2, *Internat. Math. Res. Papers* **3** (2005), 117–181.

[L] H. Li, Local systems of vertex operators, vertex superalgebras and modules, *J. Pure Appl. Algebra* **109** (1996), 143–195.

[Mc] J. McKay, Graphs, singularities, and finite groups, *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. **37**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980, pp. 183–186.

平坦なアフィン計量を持つ中心アフィン曲面と余法線写像
Centroaffine surfaces with flat affine metric and conormal maps

中條　大介（Daisuke Nakajo）
九州大学大学院数理学府

Ferapontov showed the existence of potential for centroaffine surfaces with flat affine metric, write down compatibility conditions of them in terms of thier potential functions, and found it is the same as the equation which is studied in Dubrovin's paper. Recently, we study the condition for an equiaffine surface to have the conormal map which is affine equivalent to a centroafine surface with flat affine metric.

1. Introduction

アフィン微分幾何は、ユークリッド空間にはめ込まれた多様体のアフィン変換で不変な性質を微分幾何的に調べる幾何である．特に、１９８０年代に入ってから（主に）野水克己と佐々木武の研究により大きな発展を遂げた．そこでは、アフィン法線がある１点を通る、またはすべてのアフィン法線が平行であるようなBlaschke曲面であるアフィン球面や、アフィン計量の体積要素の積分で定義される汎関数の臨界点となるアフィン極小超曲面などの性質が深く興味を持たれてきた．例えばアフィン計量が平坦、あるいはより広く、アフィン計量が定曲率であるような $\boldsymbol{R}^3$ 内のアフィン球面の分類は [2] で考察されている．

しかし、平坦なアフィン計量をもつ、アフィン球面でないアフィン曲面については余り関心が持たれていなかった．そのような状況の中、Ferapontovは [2] でアフィン計量が平坦である中心アフィン曲面をそのポテンシャルの存在により特徴付け、さらにそのポテンシャルが位相的場の理論に現れる方程式 ([1]) の解になっていることを発見した．これに関連して今回、与えられた等積アフィン曲面に対してその余法線写像が、アフィン計量が平坦である中心アフィン曲面とアフィン同値であるための条件を求めた．

2. アフィン超曲面論について

アフィン微分幾何では、主に $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 内にはめ込まれた部分多様体の、アフィン変換で不変な性質を調べる．今回の講演では特に曲面の $\boldsymbol{R}^3$ へのはめ込みを考察するので、ここでは $\boldsymbol{R}^{n+1}$ への超曲面はめ込み $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ に付随するアフィン不変量について説明する．詳しい解説については [3] を参考にして頂きたい．また、曲面論の基本的な事柄については [4] が詳しい．

$f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 内の超曲面、D を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の標準接続とする．このとき、f に横断的なベクトル場 ξ をひとつ固定すると、各点におけ

る接空間の直和分解を用いて、

$$\begin{cases} D_X f_* Y &= f_*(\tilde{\nabla}_X Y) + g(X,Y)\xi, \\ D_X \xi &= -f_* SX + \tau(X)\xi \end{cases}$$

という式が得られる（Gauss-Weingarten の式）．このような、はめ込み f とそれに横断的なベクトル場 ξ の組 (f,ξ) をアフィンはめ込みという．このとき、接続 D および微分 f_* の性質から g,S 及び τ はテンソルであることがわかる．たとえば、g が対称 $(0,2)$ - テンソルであることは次のようにして分かる．M 上の C^∞ 級ベクトル場 X,X_1,X_2,Y 及び M 上の C^∞ 函数 φ に対して、

$$D_{X_1+X_2} f_* Y = f_*(\tilde{\nabla}_{X_1+X_2} Y) + g(X_1+X_2, Y)\xi$$

と、

$$\begin{aligned} D_{X_1+X_2} f_* Y &= D_{X_1} f_* Y + D_{X_2} f_* Y \\ &= f_*(\tilde{\nabla}_{X_1} Y + \tilde{\nabla}_{X_2} Y) + \{g(X_1,Y) + g(X_2,Y)\}\xi \end{aligned}$$

から、

$$g(X_1+X_2, Y) = g(X_1,Y) + g(X_2,Y)$$

が成り立ち、

$$D_{\varphi X} f_* Y = f_*(\tilde{\nabla}_{\varphi X} Y) + g(\varphi X, Y)\xi$$

と、

$$D_{\varphi X} f_* Y = \varphi D_X f_* Y = f_*(\varphi \tilde{\nabla}_X Y) + \{\varphi g(X,Y)\}\xi$$

から、

$$g(\varphi X, Y) = \varphi g(X,Y)$$

が成り立つ．$\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上の標準接続 D が捩れを持たないことから g が対称テンソルであることがわかるので、これらをあわせて g が対称 $(0,2)$ - テンソルであることが分かる．S 及び τ に対しても同じ方法でそれぞれ、$(1,1)$ - テンソル、$(0,1)$ - テンソルであることを示すことが出来る．g,S,τ はそれぞれアフィン計量、型作用素、及び横断的接続形式と呼ばれている．同様にして $\tilde{\nabla}$ は M 上の接続を定めることもわかり、これは誘導接続と呼ばれている．特に注意すべきこととして、$\tilde{\nabla}$ が捩れを持たないという事実があり、これは標準接続 D が捩れを持たないことに由来している．また、2 階対称テンソル g の非退化性は横断的ベクトル場 ξ のとり方に依らないことがわかる．はめ込み f が非退化であるとは、g が非退化であるときをいう．以下、非退化なはめ込みを考えるが、このとき、一般に g は擬リーマン計量となる．g の Levi-Civita 接続を ∇ と表す．その誘導接続との差、$K = \tilde{\nabla} - \nabla$ はテンソルを定め、これを差テンソルという．ここで、3 次形式 C を、

$$C(X,Y,Z) = -2g(K_X Y, Z)$$

により定めると、差テンソルの定義やアフィン計量（第 2 基本形式）に関する Codazzi 方程式などから、C が対称 3 次形式となることがわかる．これを Codazzi テンソル（または単に 3 次形式）という．

横断的ベクトル場 ξ として、はめ込み f の位置ベクトルをとれるとき、組 (f,ξ) を中心アフィンはめ込みという．このとき、$\tau = 0$、$S = -id$

が成り立つ.

はめ込み $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ に対して、

$$\theta(X_1, \cdots, X_n) := \omega(f_* X_1, \cdots, f_* X_n, \xi)$$

とおくと、θ は M の体積要素となる. これを、誘導された体積要素という.(ここで、ω は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上の標準的な体積要素である.)

誘導された体積要素 θ に関して、$\tilde{\nabla}\theta = 0$ を満たすはめ込み f と横断的ベクトル場 ξ の組 (f, ξ) のことを等積はめ込みという. これは $\tau = 0$ と同値であり、定義より任意の $X \in T_pM$ $(p \in M)$ に対して $D_X\xi$ が T_pM に属すること同値となることがわかる.

等積はめ込みの中でもさらに特別なはめ込みとして Blaschke はめ込みがある. これは等積はめ込みであり、さらに誘導された体積要素 θ がアフィン計量 g から定まる体積要素 ω_g に一致するというはめ込みである. 非退化はめ込み $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ が与えられたとき、横断的ベクトル場 ξ を適当に取り替えることにより、Blaschke はめ込みにすることが出来るということが知られている. そのような横断的ベクトル場 ξ は、はめ込みに対し一意的に定まることがわかり、その ξ をアフィン法ベクトル場という.

アフィンはめ込み (f, ξ) に対して、余法線写像 $\nu : M^n \to (\boldsymbol{R}^n)^*$ を、

$$\nu_x(f_* TM) = 0, \nu_x(\xi_x) = 1$$

となるように定める.(ここで、$f^*TM\,|_x$ と $\boldsymbol{R}^n$ とを同一視した.)

最後に、アフィンはめ込み (f, ξ) において(中心アフィンはめ込みや Blaschke はめ込みのように)容易に横断的ベクトル場 ξ が類推されるとき、単に f のみで (f, ξ) を表わす場合もあることを注意しておく.

3. 平坦なアフィン計量をもつ中心アフィン曲面とそのポテンシャル

Ferapontov が [2] で示した平坦なアフィン計量をもつ中心アフィン曲面のポテンシャルの存在は、次の定理に依っている. ここで、曲面 M の計量 g が平坦であるとは、g の Levi-Civita 接続 ∇^g が平坦である、すなわち ∇^g のリーマン曲率[1] R^{∇^g} に関して $R^{\nabla^g} \equiv 0$ が成り立つことをいう. なお、以下の補題や定理はすべて局所的な状況でのみ成り立つものである.

Theorem 1. $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ を平坦なアフィン計量を持つ M^n の中心アフィンはめ込みとし、C を、そのアフィン計量及び誘導接続から定まる *Codazzi* テンソルとする. このとき M^n の任意の点 p において、その単連結な近傍 U とその上で定義された関数 F が存在し、g に関するアフィン座標 $\{u^1, \cdots, u^n\}$ における成分表示の下で次の式が U 上で成立する.

$$C_{ijk} = \partial_i \partial_j \partial_k F. \tag{1}$$

[1]接続 ∇ に対してリーマン曲率 R^{∇} を $R^{\nabla}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ により定める.

この定理により定義された関数 F を、ここでは平坦なアフィン計量をもつ中心アフィン曲面のポテンシャルと呼ぶことにする．この定理は次の、3次形式の Levi-Civita 接続による共変微分の対称性に関する補題と、Poincaré の補題を用いて証明される．

Lemma 2. アフィン計量が平坦、すなわちアフィン計量の *Levi-Civita* 接続を ∇ としたとき $R^{\nabla}=0$ となるならば、

$$\nabla_X C(Y,Z,W)=\nabla_Y C(X,Z,W)$$

が成り立つ．

結局、以下のように平坦なアフィン計量をもつ中心アフィン曲面の偏微分方程式による特徴付けが、Gauss 方程式を考えることにより得られることが分かる．次の定理は、平坦なアフィン計量をもつ中心アフィン曲面の可積分条件をポテンシャル F で表したものである．

Theorem 3. $\boldsymbol{R}^2$ の単連結領域 U 上で定義されたアフィン計量が平坦かつ不定値である非退化な中心アフィン曲面 $f:U\to\boldsymbol{R}^3$ 全体の集合と、$F:U\to\boldsymbol{R}^2$ に関する方程式

$$F_{xxx}F_{yyy}-F_{xxy}F_{xyy}=1 \tag{2}$$

の解の集合とが1対1に対応する．

4. 平坦なアフィン計量をもつ中心アフィン曲面と余法線写像

与えられた等積アフィン曲面に対して、その余法線写像から定まる中心アフィン曲面がアフィン計量が平坦である中心アフィン曲面とアフィン同値であるための条件について考察する．その前にアフィン曲面とその余法線写像について、それぞれのアフィン計量と誘導接続の間に一般的に成り立つ関係を考える．ここでは特に平坦なアフィン計量を持つ中心アフィン曲面の場合に制限して考え、それをポテンシャルを用いた形で表す．

Lemma 4. $\bar{f}:\bar{M}^2\to\boldsymbol{R}^3$ を不定値で平坦なアフィン計量をもつ非退化中心アフィン曲面とし、F をそのポテンシャルとする．(従って、アフィン座標系の下で $\bar{f}$ のアフィン計量は $g_{ij}=\eta_{ij}$ となる．ここで、$\eta_{ij}:=1-\delta_{ij}$ である．) また、$f:M^2\to\boldsymbol{R}^3$ を等積アフィン曲面とし、g をそのアフィン計量、∇ を誘導接続、S を型作用素、ν_f を f の余法線写像とする．ここで、S は M^2 の各点 x で正則であるとする．このとき、ν_f が $\bar{f}$ にアフィン同値であるための必要十分条件は、

$$\begin{cases} g_{ij} & =t_i^j\eta_{kj}\cdots(g)\\ \Gamma_{im}^l g_{lj}g^{mk} & =g^{lk}(\partial_i g_{lj})-\eta^{kl}F_{ijk}\cdots(\nabla)\end{cases}$$

となる．ここで、g_{ij}、Γ_{ij}^k と t_i^j は、それぞれアフィン計量 g の成分，∇ の *Christoffel* 記号、および $(1,1)$ テンソル $T:=S^{-1}$ の成分である．

これと、2つの（中心）アフィンはめ込みが同値であるための条件を考慮して、次の定理を得る．

Theorem 5. $\bar{f} : \bar{M}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ を不定値で平坦なアフィン計量をもつ非退化中心アフィン曲面とし、F をそのポテンシャルとする.（従って、アフィン座標系の下で $\bar{f}$ のアフィン計量は $g_{ij} = \eta_{ij}$ となる.）このとき、g をアフィン計量、∇ を誘導接続、S を型作用素とし、その余法線写像 ν_f が $\bar{f}$ とアフィン同値となるような等積アフィン曲面 $f : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ が存在するための必要十分条件は、

$$
(3) \qquad \begin{cases} g_{ij} & = t_i^j \eta_{kj} \\ \Gamma_{im}^l g_{lj} g^{mk} & = g^{lk}(\partial_i g_{lj}) - \eta^{kl} F_{ijk} \\ \partial_1 t_{21} - \partial_2 t_{11} & = t_{22} F_{111} - t_{11} F_{122} \\ \partial_1 t_{22} - \partial_2 t_{12} & = t_{22} F_{112} - t_{11} F_{222} \end{cases}
$$

となる．ここで、g_{ij}、Γ_{ij}^k と t_i^j は、それぞれアフィン計量 g の成分, ∇ の *Christoffel* 記号、および $(1,1)$ テンソル $T := S^{-1}$ の成分である.

References

[1] B. Dubrovin, *Geometry of 2D topological field theories.* In:*Integrable systems and quantum groups. Montecatini, Terme 1993* (M. Francoviglia, S. Greco, eds.), Lecture Notes in Math. **1620** Springer-Verlag (1996), 120–348.

[2] E. Ferapontov, *Hypersurfaces with flat centroaffine metric and equations of associativity*, Geom. Dedicata **103(3)** (2004), 33–49.

[3] 野水克己・佐々木武, **アファイン微分幾何学 - アファインはめ込みの幾何** - , 裳華房, 1994.

[4] 梅原雅顕・山田光太郎, **曲線と曲面 - 微分幾何的アプローチ** - , 裳華房, 2002.

GOTZMANN MONOMIAL IDEALS

SATOSHI MURAI

1. Preliminaries

Let K be an arbitrary field and $R = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ the polynomial ring in n variables over a field K with each $\deg(x_i) = 1$. Let $I = \bigoplus_{d \geq 0} I_d$ be a homogeneous ideal of R, where each $I_d = \{f \in I : \deg(f) = d\}$ denotes the d-th homogeneous component of I. The function $H(I, -) : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ with $H(I, d) = \dim_K(I_d)$ for all $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ is *the Hilbert function of* I.

Macaulay proved that, for each $d \geq 0$, there is a lower bound for $H(I, d+1)$ in terms of $H(I, d)$ by using following representations:

Let n and h be positive integers. Then h can be written uniquely in the form, called the *nth binomial representation of* h,

$$h = \binom{h(n)+n}{n} + \binom{h(n-1)+n-1}{n-1} + \cdots + \binom{h(i)+i}{i},$$

where $h(n) \geq h(n-1) \geq \cdots \geq h(i) \geq 0$, $i \geq 1$.

If $h = \binom{h(n)+n}{n} + \binom{h(n-1)+n-1}{n-1} + \cdots + \binom{h(i)+i}{i}$ is the nth binomial representation of h, then we define

$$h^{<n>} = \binom{h(n)+n+1}{n} + \binom{h(n-1)+n}{n-1} + \cdots + \binom{h(i)+i+1}{i}.$$

Theorem (Minimal growth of Hilbert function). *Let I be a homogeneous ideal of $R = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Then one has*

$$H(I, d+1) \geq H(I, d)^{<n-1>}.$$

In 1978, Gotzmann [8] proved an interesting theorem, called Gotzmann's persistence theorem, on the Hilbert function of a homogeneous ideal I of the polynomial ring. We recall Gotzmann's persistence Theorem.

Theorem (Gotzmann's Persistence Theorem [5]). *Let $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ and I a homogeneous ideal of R generated in degree $\leq d$. If $H(I, d+1) = H(I, d)^{<n-1>}$, then $H(I, k+1) = H(I, k)^{<n-1>}$ for all $k \geq d$.*

A monomial ideal $I \subset R$ is called a *Gotzmann monomial ideal* if I is generated in one degree d and if I satisfies $H(I, d+1) = H(I, d)^{<n-1>}$. (Note that Gotzmann's persistence theorem implies $H(I, k+1) = H(I, k)^{<n-1>}$ for all $k \geq d$.) In case of monomial ideal $I \subset R$, each k-th Hilbert function $H(I, k)$ of I is simply the number of monomials of degree k in I. Thus if V is the set of monomials of degree d in I, then I is Gotzmann if and only if $|MV| = |V|^{<n-1>}$, where $|V|$ is the cardinality of

the finite set V. We are interested in the structure of Gotzmann monomial ideals. Instead of discussing an ideal I itself, we consider the set of monomials of degree d in I.

Let ${x_1}^{a_1}{x_2}^{a_2}\dots{x_n}^{a_n}$ and ${x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2}\dots{x_n}^{b_n}$ be monomials in R. The *lexicographic order* $<_{lex}$ of R is defined by ${x_1}^{a_1}{x_2}^{a_2}\dots{x_n}^{a_n} <_{lex} {x_1}^{b_1}{x_2}^{b_2}\dots{x_n}^{b_n}$ if the leftmost nonzero entry of $(b_1-a_1, b_2-a_2, \dots, b_n-a_n)$ is positive.

Let M denote the set of variables $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ and M^d the set of all monomials of degree d in R, where $M^0 = \{1\}$. Let $V \subset M^d$ be a set of monomials of degree d. For a monomial $u \in R$, we write $uV = \{uv : v \in V\}$ and $MV = \{x_i v : v \in V,\ i = 1, 2, \dots, n\}$. Also, we write $\gcd(V)$ for the greatest common divisor of the monomials belonging to V.

(i) $V \subset M^d$ is called a *lexsegment set* if for any $u \in V$ and for any monomial $v \in M^d$ with $v >_{lex} u$ one has $v \in V$. For a positive integer $|M^d| \geq a > 0$, let $Lex(n, d, a) \subset M^d$ denote the unique lexsegment set with $|Lex(n, d, a)| = a$.

(ii) A subset $V \subset M^d$ is called a *Gotzmann set* if $|MV| = |V|^{<n-1>}$.

It is known that every lexsegment set is Gotzmann.

2. Main Theorems

We define $V \sim V'$ if we can obtain V' from V by a permutation of variables. In other words, there exists a permutation π of $\{1, 2, \dots, n\}$ such that $\pi(V) = V'$, where for the permutation $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$ of $\{1, 2, \dots, n\}$, we define $\pi(x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}) = x_{\pi(1)}^{a_1}\dots x_{\pi(n)}^{a_n}$ and $\pi(V) = \{\pi(u) | u \in V\}$. If $V \subset M^d$ is a Gotzmann set, then, for any monomial $u \in R$, the set uV is also a Gotzmann set. Thus we often assume $\gcd(V) = 1$.

First, we remark that if a positive integer $a > 0$ is given, then a determines the degree d of Gotzmann sets $V \subset M^d$ with $|V| = a$ and with $\gcd(V) = 1$.

Lemma 2.1. *If $V \subset M^d$ is a Gotzmann set with $\gcd(V) = 1$, then one has $\binom{d-1+n-1}{n-1} < |V| \leq \binom{d+n-1}{n-1}$.*

Every lexsegment set is a Gotzmann set. However, a Gotzmann set is not necessarily lexsegment. The main result is finding all integers $a > 0$ such that every Gotzmann set $V \subset M^d$ with $|V| = a$ and with $\gcd(V) = 1$ satisfies $V \sim Lex(n, d, a)$.

Theorem 2.2. *Let $R = K[x_1, \dots, x_n]$ be the polynomial ring and $a = \sum_{j=p}^{n-1}\binom{a(j)+j}{j}$ the $(n-1)$th binomial representation of a positive integer $a > 0$. Then the following conditions are equivalent:*

(i) $a(n-1) = a(n-2) = \cdots = a(p)$;

(ii) *If $V \subset M^d$ is a Gotzmann set with $|V| = a$ and $\gcd(V) = 1$, then d is determined by a and $V \sim Lex(n, d, a)$.*

Let $a = \sum_{j=p}^{n-1}\binom{a(j)+j}{j}$ be the $(n-1)$th binomial representation of a positive integer $a > 0$ and V a Gotzmann set with $|V| = a$ and with $\gcd(V) = 1$. By Theorem 2.2, if $a(p) = a(n-1)$ then V must be a lexsegment set by a proper

permutation of variables. A positive integer $a > 0$ is called an nth *lexnumber*, or simply a *lexnumber* if $a(p) = a(n-1)$.

Example 2.3. Here are some lexnumbers for $n = 3, 4, 5$.

$n = 3$: $1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 14, 15, 20, 21, 27, 28, 35, 36, 44, 45, 54, 55, 65, 66,$
$77, 78, 90, 91, 104, 105, \ldots$
$n = 4$: $1, 2, 3, 4, 7, 9, 10, 16, 19, 20, 30, 34, 35, 50, 55, 56, 77, 83, 84, 112, \ldots,$
$n = 5$: $1, 2, 3, 4, 5, 9, 12, 14, 15, 25, 31, 34, 35, 55, 65, 104, 105, \ldots,$

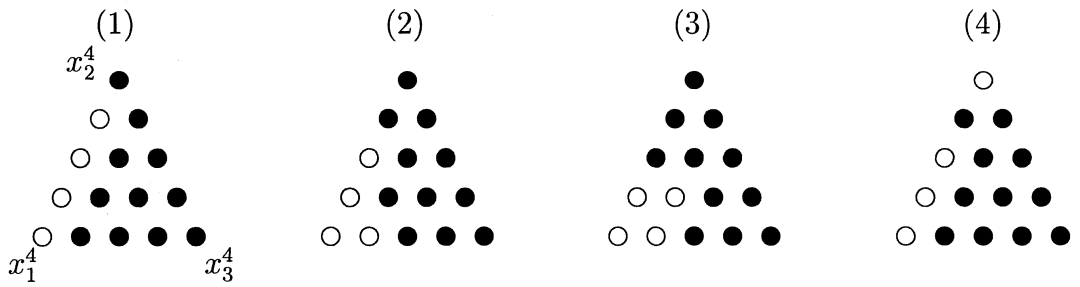
For fixed d, there are only $\{d(n-1)+1\}$ lexnumbers, since there are $(n-1)$ lexnumbers between $\binom{t+n-1}{n-1}$ and $\binom{t+n}{n-1}$.

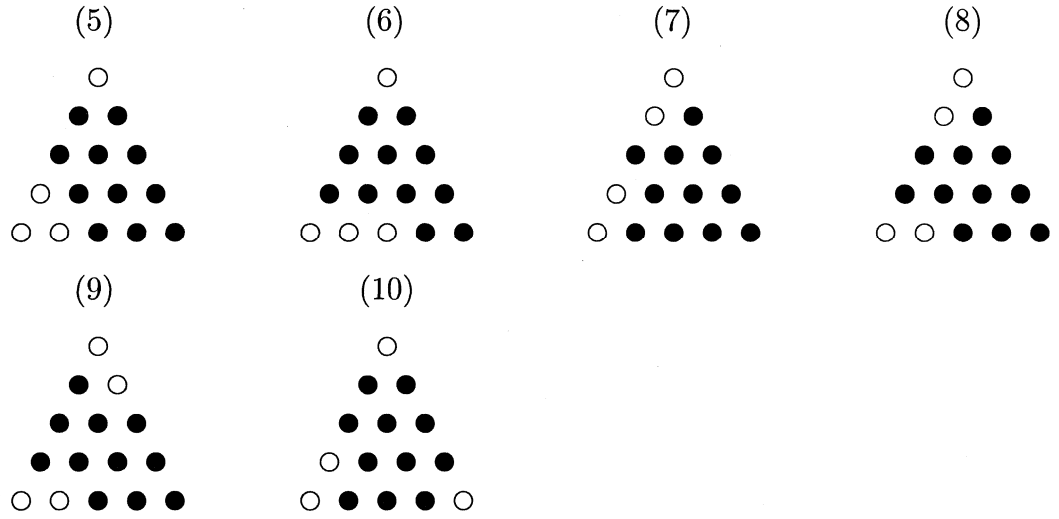
We also consider Gotzmann sets in a few variables. If $n = 1$, then all sets $V \subset M^d$ are Gotzmann sets. If $n = 2$, we can easily show that $V \subset M^d$ is a Gotzmann sets if and only if $V = \emptyset$ or $V = M^d$, when we assume $\gcd(V) = 1$. We consider the case $n = 3$.

Let V be a set of monomials of degree d and let $u = x_1^{a_1}x_2^{a_2}\ldots x_n^{a_n}$ a monomial of degree d. We say that a monomial $v = x_1^{b_1}x_2^{b_2}\ldots x_n^{b_n}$ of degree d is *under u for i* if $b_j \leq a_j$ for all $j \neq i$. We call $u \in M^d$ a *fixed empty element of V for i* any monomial which is under u for i does not belongs to V. Note that, if u is a fixed empty element of V for i , then any monomial v which is under u for i is also a fixed empty element of V for i.

Theorem 2.4. *Let $R = K[x_1, x_2, x_3]$ and $V \subset R$ a set of monomials of degree d with $\gcd(V) = 1$. Then, V is a Gotzmann set if and only if any monomial $v \notin V$ of degree d in R is a fixed empty element of V for some i and $|V| > \binom{d-1+n-1}{n-1}$.*

Example 2.5. To understand the meaning of Theorem 2.4, drawing a picture of monomials is useful. In the picture below, all monomials of degree 4 in $K[x_1, x_2, x_3]$ are displayed. The monomial x_1^4 is in the lower left corner, x_3^4 is in the lower right corner, and x_2^4 is at the top. The black dots denote monomials in V and the empty circles denote monomials which are missing. For example, figure (1) means x_1^4, $x_1^3x_2$, $x_1^2x_2^2$ and $x_1x_2^3$ are missing. In the picture below, we classify all Gotzmann sets V in $K[x_1, x_2, x_3]$ with $\gcd(V) = 1$ and $|V| = \binom{4+2}{2} - 4 = 11$ up to permutations.





Theorem 2.4 says that each connected component of empty circles must be at the corner. Also, the numbers of empty circles must be equal to or less than the degree of elements of V.

3. Related works

There has been a lot of interest in the extremal properties of Hilbert functions. We note some related works.

Aramova, Herzog and Hibi [2] consider Gotzmann's persistence theorem for the exterior algebra. Furthermore, Gasharov [6] generalized the persistence theorem to finitely generated modules over the polynomial ring and to exterior algebras. It would be interesting to extend the persistence theorem for more general objects. For example, in [7], persistence theorems for the ring $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]/(x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_n^{a_n})$ is considered, where $2 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \infty$ and where $x_i^{\infty} = 0$.

Let $I \subset R$ be a homogeneous ideal and let $I_{(d)}$ the ideal generated by all polynomials of degree d in I. A homogeneous ideal I is called Gotzmann if $H(I_{(d)}, d+1) = H(I_{(d)}, d)^{<n-1>}$ for all $d \geq 0$. A monomial ideal $I \subset R$ is called lexsegment if each $\{u \in M^d : u \in I_d\}$ is a lexsegment set. Herzog and Hibi [10] gives an interesting characterization of Gotzmann ideals from the viewpoint of graded Betti numbers. This work is related to the extremal property of lexsegment ideals ([1], [3] and [9]). It would be interesting to consider further properties of Gotzmann ideals and lexsegment ideals.

Results related to Theorem 2.2 have been obtained by Furedi and Griggs [5]. They determined all integers $a > 0$ such that every squarefree Gotzmann set V with $|V| = a$ is unique up to the permutation of variables. It is a challenging problem to determine all Gotzmann sets. However, structures of Gotzmann sets $V \subset K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ are more complicated for $n \geq 4$.

References

[1] A. Aramova, J. Herzog and T. Hibi, Squarefree lexsegment ideals, *Math. Z* **228** (1998), 353 – 378.

[2] A. Aramova, J. Herzog and T. Hibi, Gotzmann theorems for exterior algebras and combinatorics, *J. Algebra* **191** (1997) 174–211.

[3] A. M. Bigatti, Upper bound for the Betti numbers of a given Hilbert function, *Comm. in Alg.* **21** (1993), 2317–2334.

[4] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen–Macaulay rings," Revised Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[5] Z. Furedi and J. R. Griggs, Families of finite sets with minimum shadows, *Combinatorica* **6** (1986), 355–363.

[6] V. Gasharov, Extremal properties of Hilbert functions, *Illinois J. Math.* **41** (1997), 612–629.

[7] V. Gasharov, Green and Gotzmann theorems for polynomial rings with restricted powers of the variables, *J. of Pure and Appl. Alg.* **130** (1998), 113–118.

[8] G. Gotzmann, Eine Bedingung für die Flachheit und das Hilbertpolynom eines graduierten Ringes, *Math. Z.* **158** (1978), 61–70.

[9] H. A. Hullet, Maximum Betti numbers for a given Hilbert function, *comm. in Alg.* **21** (1993), 2335–2350.

[10] J. Herzog and T. Hibi, Componentwise linear ideals, *Nagoya Math. J.* **153** (1999), 141 – 153.

[11] A. Iarrobino and S. L. Kleiman, The Gotzmann Theorems and the Hilbert scheme, *in* "Power sums, Gorenstein algebras, and determinantal loci" (A. Dold, F. Takens and B. Teissier, Eds.), Springer L.N.M., **1721**, Springer-verlag, Berlin, 1999, 289–312.

[12] S. Murai, A combinatorial proof of Gotzmann's persistence theorem for monomial ideals, arXiv:math.CO/0504429, *Europ. J. Combin.*, to appear.

Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Information Science and Technology, Osaka University, Toyonaka, Osaka, 560-0043, Japan,

E-mail address: s-murai@ist.osaka-u.ac.jp

トーリック曲面上の曲線に対するゴナリティ予想
The gonality conjecture for curves on a toric surface

川口 良（大阪大学大学院理学研究科）
Ryo Kawaguchi（Graduate School of Sience, Osaka University）

Abstract

Gonality is one of invariants for non-singular irreducible projective curve. The gonality conjecture which had been predicted by M. Green and R. Lazarsfeld in 1986 was proved for curves on Hirzebruch surfaces by M. Aprodu in 2002. The aim of this study is to extend this result for curves on toric surfaces. At present, a partial solution has been gotten.

背景

代数幾何学の主要な研究課題として代数多様体の分類が挙げられるが, 特に非特異既約な射影的代数曲線については, 標準因子を使って大まかな分類ができる. それを説明するために, まずは X 上の因子に関する基本的な性質をいくつか確認しておく.

X を $\mathbb{C}$ 上の種数 g の非特異既約な射影的代数曲線としたとき,

$$\left\{ D = \sum n_i D_i \;\middle|\; D_i : X \text{ 上の } 0 \text{ 次元部分代数多様体}, n_i \in \mathbb{Z}, \text{ 有限個を除き } n_i = 0 \right\}$$

の元を X 上の因子という. X 上の因子 D をとると, コホモロジー群と呼ばれる $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $H^0(X, D)$ が定まり, その次元を $h^0(X, D)$ と書く. また完備線形系と呼ばれる因子の集合 $|D|$, およびそれに付随する正則写像 $\varphi_{|D|} : X \to \mathbb{P}^r$ が得られる. ここで $\mathbb{P}^r$ とは r 次元複素射影空間で, $r = h^0(X, D) - 1$ である.

さて, 初めに述べた通り X 上の標準因子と呼ばれる特殊な因子 K_X について考えることにより, X に次のような初等的分類を与えることができる. まず, $|K_X| = \phi$ ならば $X \simeq \mathbb{P}^1$ すなわち $g = 0$（有理曲線）となる. また, $K_X \sim 0 (\Leftrightarrow 0 \in |K_X|)$ ならば $g = 1$（楕円曲線）となり, $\varphi_{|K_X|}$ の像は 1 点になる. これら 2 つの曲線に関してはすでに様々な研究がなされており, 多くの性質が知られている.

一方 $g \geq 2$ の曲線については $\varphi_{|K_X|}$ の像は 1 次元になっており, $\varphi_{|K_X|}$ が埋め込みを与える場合（非超楕円曲線）とそうでない場合（超楕円曲線）とに分けることができる. X が超楕円曲線のときは, X から射影直線 $\mathbb{P}^1$ への次数 2 の正則写像 $X \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$ が存在し, X は $\mathbb{P}^1$ の 2 重被覆になることが知られている. そこで非超楕円曲線についても, それが $\mathbb{P}^1$ の最低何重被覆になるかを考えることで, より詳しい分類が得られるであろうという立場が出てくる. この不変量をゴナリティと呼び, 正確には

$$\begin{aligned}\mathrm{gon}(X) &:= \min\left\{ k \mid {}^{\exists}\text{正則写像 } f : X \to \mathbb{P}^1, \deg f = k \right\} \\ &= \min\left\{ k \mid {}^{\exists}X \text{ の次数 } k \text{ のペンシル } g^1_k \right\}\end{aligned}$$

と定義される. ここでペンシル g^1_k とは $h^0(X,D) = 2$ なる因子 D の完備線形系 $|D|$ で, $\deg\varphi_{|D|} = k$ なるものを表す. $\mathrm{gon}(X) = k$ であることを, X は k-gonal であるという.

先行研究

因子と本質的に同じ概念に直線束と呼ばれるものがあり, 因子 $D = \sum_{i=1}^{d} n_i D_i$ に対応する直線束 L について $\deg L := \sum_{i=1}^{d} n_i$ と定める. ゴナリティに関わる事実として, 次のようなことが知られている.

定理 1. ([GL1]) Xを種数 gの非特異既約な射影的代数曲線, kを非負整数とし, X上の直線束 Lで $\deg L \geq 2g + k$ なるものをとる. このとき Xが g^1_k を持つならば (X, L) は (M_k) を満たさない.

ここで, (M_k) とは以下で定義される性質である.

定義 2. Xと kは定理1の通りとし, Lを X上の直線束とする. 任意の整数 $p \geq h^0(X,L) - k - 1$ に対して $K_{p,1}(X,L) = 0$ が成り立つとき, (X,L) は (M_k) を満たすという. ただし, $K_{p,1}(X,L)$ は, Lから定まるKoszulコホモロジーと呼ばれる $\mathbb{C}$ベクトル空間 $K_{p,1}\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} H^0(X,iL), H^0(X,L)\right)$ を表す.

さらにM. GreenとR. Lazarsfeldは1986年に[GL2]の中で, 定理1の逆を含めた形の次の予想を立てた.

ゴナリティ予想. ([GL2]) X と kは定理1の通りとし, X 上の直線束 L で $\deg L \gg 2g$ なるものをとる. このとき, X が g^1_k を持つことと (X,L) が (M_k) を満たさないことは同値である.

ゴナリティ予想によれば非特異既約な射影的代数曲線のゴナリティは, その上の直線束のKoszulコホモロジーについて考察することによって読みとれることになる. 逆に k-gonal曲線 X 上の十分大きな次数の直線束 L については, 任意の整数 $p \geq h^0(X,L) - k$ に対して $K_{p,1}(X,L) = 0$ という消滅定理が成り立つことも分かる.

さて, M. Aprodu はゴナリティ予想を X がヒルツェブルフ曲面上の曲線である場合について考察し, 2002年に[Apr]の中で次のような結果を得ている. ただし, ここで a は非負整数, Σ_a は a 次ヒルツェブルフ曲面とし, Γ と Δ をそれぞれ ruling map $\pi : \Sigma_a \to \mathbb{P}^1$ の一般ファイバーと極小切断とする.

定理 3. ([Apr]) Σ_a 上の非特異既約曲線 $X \equiv k\Delta + m\Gamma$ をとる. このとき $k, m \in \mathbb{Z}$ が $k \geq 2$, $m \geq \max\{ak, a+k\}$ を満たせば X は k-gonal で, Xについてゴナリティ予想は正しい.

ここで, $m \geq ak$ というのは X がネフ, つまり Σ_a 上の任意の既約曲線との交点数が非負であるための必要十分条件になっている. 一方, $m \geq a+k$ という条件について考えると, $a=1$ のときは $m=k$ だと X は k 次平面曲線と同型になり, この場合は X は $(k-1)$-gonal になる. また, $a=0$ のときは ruling map が 2 方向にとれ, $m \leq k-1$ だと m の方がゴナリティを与える.

主結果

この M. Aprodu の結果を, X が非特異コンパクトなトーリック曲面上の曲線である場合について拡張するのが研究の目標であり, 現在までに以下のような部分的解決を得ている.

まず, S を $\mathbb{P}^2$ でない非特異コンパクトなトーリック曲面, X を S 上の非特異既約曲線とする. このとき, S から $\mathbb{P}^1$ への全射な同変正則写像 $f : S \to \mathbb{P}^1$ が少なくとも一つ, 高々有限個とれる. 以下では, k といえばそれらの f に対し, f の一般ファイバーと X の交点数の最小値を指すこととする.

定理 4. *S は $\mathbb{P}^2$ でない非特異コンパクトなトーリック曲面で, 上記の同変正則写像のとり方が 1 通りしかないとする. X を S 上の種数 g の非特異既約曲線とする. このとき, X がネフで $k \geq 2$ ならば, 次のいずれかが成り立つ.*

(i) *X は k-gonal で X についてゴナリティ予想は正しい.*

(ii) *X は k 次平面曲線に同型である.*

定理 4 において, X がネフでないか $k \leq 1$ のときは, X は有理曲線になる.

実際には同変正則写像のとり方は何通りもあるのが普通なので, 今後は定理 4 の同変正則写像のとり方が 1 通りという仮定をはずして, 一般の非特異コンパクトなトーリック曲面上でも同様の結果を示したいと考えている.

参考文献

[Aki] 秋月康夫, 中井喜和, 永田雅宜, 代数幾何学, 岩波書店, 1987

[Apr] M. Aprodu, On the vanishing of higher syzygies of curves, Math. Z. **241** (2002), 1–15.

[GL1] M. Green and R. Lazarsfeld, The nonvanishing of certain Koszul cohomology groups, J. Diff. Geom. **19** (1984), 168–170.

[GL2] M. Green and R. Lazarsfeld, On the projective normality of complete linear series on an algeblaic curve, Invent. Math. **83** (1986), 73–90.

[Kat] 桂利行, 代数幾何入門, 共立出版, 1998

[Miy] 宮西正宜, 代数幾何学, 裳華房, 1990

多層からなる媒体に対する 1次元波動方程式に関するある逆問題

(An inverse problem for the one-dimensional wave equation in multilayer media)

大阪大学大学院理学研究科 永安聖
(Sei NAGAYASU (Graduate School of Science, Osaka University))

Abstract

Our problem originates from a simplified model of the nondestructive inspections. We consider half-line media which consist of many kinds of substances. We can directly observe the data near the boundary point of the half-line, but we cannot directly observe the data of things away from the boundary point. In this situation, we try to identify these unknown things by creating an artificial explosion and observing on the boundary point the waves generated by the explosion. In this article, we formulate this problem mathematically, and we consider the formulated problem.

1 序

ここで考えるのは, 非破壊検査をシンプルにモデル化した問題である. 幾種類もの媒質が半直線状につながってできた棒状の媒体を考える (図 1). 観測者は, 半直線の端点付近に居るとする. それ故に, 観測者は端点付近の情報は直接観測できるけれども, 端点から遠いところの情報を直接観測することはできない. そこで, その直接は観測できない情報を推測するために, 次のような実験を行う. まず, 半直線の端点付近に人工的に衝撃を起こす. すると, その衝撃によって媒体内を波が伝わる. その波のうち, 端点に跳ね返ってくるものを観測する. そして, その観測したデータから, 端点から遠いところの情報を推測することを試みる.

2 問題の定式化

2.1 方程式の導出

以下, この問題を考えるために, 記号を導入し, 問題を定式化する (図 2). まず, 媒体全体を半直線 $[0, \infty)$ で表す (丁度端点が $x = 0$ に相当する). 媒体は, N 個の媒質がつながってできているとし, 端点に近いところから, 媒質 1, 媒質 2, ..., 媒質 N と

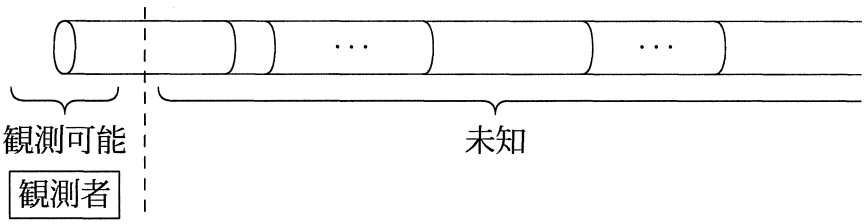


図 1: 考えている媒体の状態

呼ぶことにする (因って, 媒質 N は半無限区間となる). 媒質 k と媒質 $k+1$ との接合点の座標を h_k と表す ($k = 1, \ldots, N-1$). 尚, $h_0 := 0$ と置く. 又, 人工衝撃を与える点を y とする ($0 < y < h_1$). 各媒質 k の密度を ρ_k, ヤング率を E_k と置く. ヤング率とは, 棒の伸びの割合と単位断面積当たりの力との比のことで, これは物質による定数である. このとき, 各媒質 k を伝わる波の速度 a_k は, $a_k = \sqrt{E_k/\rho_k}$ となる. この速度 a_k に対する d'Alembertian P_k を, $P_k := \partial_t^2 - a_k^2\partial_x^2$ で定義する. 又, $u(t,x)$ で, 元々位置 x にあった点の, 時刻 t での変位を表す.

媒質 1 では時刻 $t = 0$ で位置 y にデルタ関数の衝撃を起こすことにしよう. すると, 媒質 1 での波の振る舞いは,

$$\text{(W.1)} \qquad P_1 u(t,x) = \delta(t, x-y), \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 < x < h_1$$

と定式化される. 一方, 媒質 k ($k = 2, \ldots, N$) では特に外力は与えないので, そこでの波の振る舞いは,

$$\text{(W.}k\text{)} \qquad P_k u(t,x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad h_{k-1} < x < h_k \quad (k = 2, \ldots, N-1),$$

$$\text{(W.}N\text{)} \qquad P_N u(t,x) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x > h_{N-1}$$

と定式化される. 次に, 端点での条件だが, 端点では自由であるとする, つまり, 自由境界条件

$$\text{(B)} \qquad \partial_x u(t,x)|_{x=0+0} = 0$$

を考える. 最後に, 媒質 k と媒質 $k+1$ との接合点 $x = h_k$ での条件について考える ($k = 1, \ldots, N-1$). まず, 接合点では, 波による変位が連続であると考えられる. それは

$$\text{(I.}k\text{)} \qquad u(t,x)|_{x=h_k-0} = u(t,x)|_{x=h_k+0}$$

と定式化される. もう一つは, 接合面を通して媒質 k は媒質 $k+1$ に, 媒質 $k+1$ は媒質 k に力を及ぼしているが, この二つの力は作用反作用の関係にあり, 大きさが等し

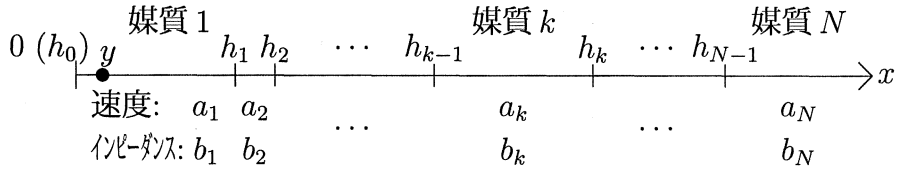


図 2: 導入した記号

く逆向きであると考えられる. 言い換えると, 接合点では応力が連続であると考えられ, それは

$$(\mathrm{J}.k) \qquad E_k \partial_x u(t,x)|_{x=h_k-0} = E_{k+1} \partial_x u(t,x)|_{x=h_k+0}$$

と定式化される.

以上の (W.1)–(W.N), (B), (I/J.1)–(I/J.$N-1$) が今回扱う方程式である. 尚ここで, 波を伝える媒質のインピーダンス $b_k := \sqrt{E_k \rho_k}$ という量を導入しておく. インピーダンスとは, 一言で言うと, 媒質の波を伝える能力を表すパラメータであり, 特に異なる媒質がつながっている場合の波の反射・透過を表す際に大きな役割を果たす. このインピーダンスを使うと, (J.k) は

$$(\mathrm{J}.k) \qquad a_k b_k \partial_x u(t,x)|_{x=h_k-0} = a_{k+1} b_{k+1} \partial_x u(t,x)|_{x=h_k+0}$$

と書き換えられる. 今後, ここでは, 各媒質を特徴付ける定数として, 密度 ρ_k・ヤング率 E_k の代わりに, 波の速度 a_k・インピーダンス b_k に注目することにしよう. 尚, 以上の方程式の導出については, [1] を参照した.

2.2 方程式に対するここでの問題 —順問題と逆問題—

以上によりここで扱う微分方程式は揃った. ところが, 普通「微分方程式を考える」というときには, 微分方程式の係数は全て分かっているとして, そのときの微分方程式の解の性質 (解はそもそも存在するか, 解は唯一つか, $t \to \infty$ としたときの解の振る舞いはどうか, 等) について議論することが多いのだが, 今回考えたい問題はそうではない. 今回考えたい問題は, 端点付近の情報 (a_1, b_1, y) 及び観測データ ($u(t,0)$) は分かっているとして, 端点から遠いところの媒質の情報 (a_k, b_k, h_k) を求める, つまり標語的に言うと, 解の一部が分かっているときに微分方程式の係数を求める問題である. 普通に微分方程式を解くのとは逆だという意味で, このような問題は**逆問題**と呼ばれている. 特に, 今の場合は微分方程式の係数を決める問題なので, **係数決定問題**とも呼ばれている. これに対し, 係数が全て既知であるとして微分方程式の解の性質について議論する問題は**順問題**と呼ばれている.

逆問題を考える際の基本的問題には,

- **一意性**: 二つの観測データが一致すれば, 推測したい未知情報も一致するのかどうか. 言い換えると, 未知情報が異なれば, 観測データも異なるものになるのかどうか, という問題.
- **再構成**: 観測データが与えられたときに, どうすれば, その観測データを用いて未知情報を表現 (再構成) できるか, という問題.
- **安定性**: 二つの観測データの差が小さければ, 推測したい未知情報の差も小さいのかどうか, という問題.

等がある (詳しくは, 例えば [2] を参照).

尚, 偏微分方程式を「(物理) 現象を記述した方程式」と見たときには, 順問題とは, 現象を記述する法則・現象に影響を与えうるデータが予め分かっている, という仮定の下で, どのような現象が起こるのかを確かめる, 言い換えると, 観測データの信頼性を確認する問題であるということができ, 一方, 逆問題とは, 現象を記述する法則や現象に影響を与えうるデータに未知な情報が含まれているときに, 観測データからその未知の情報を推測する問題であるということができる.

3 主結果

さて, 上のように定式化した問題に対し, 今回得られた結果について御紹介しよう. 今回得られた結果は, 再構成についてのものである. 次の主結果は, 隣り合う媒質のインピーダンスが等しくないことが予め分かっていれば, 端点付近の情報と観測データから, 端点から遠いところの媒質の「インピーダンス」及び「媒質の幅と速度との比」が, その観測時間の長さに応じて, 端点に近いところから順々に再構成できる, ということを表している.

主結果 ([3]). $b_j \neq b_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, N-1)$ とする. a_1, b_1, y は既知であるとする. 観測データ $v(t) := u(t, 0)$ が $[0, T)$ 上で与えられたとする. ここで, $u(t, x)$ は方程式 (W.1)–(W.N), (B), (I/J.1)–(I/J.$N-1$) の解を表す. このとき, 定数 b_{k+1}, $(h_k - h_{k-1})/a_k$ $(1 \leq k \leq N_0 - 1)$ が次の方法で再構成できる:

手順 1. $v_1(t) := \dfrac{1}{a_1} H\left(t - \dfrac{y}{a_1}\right) - v(t)$ と置く. 但し H は Heaviside 関数.

手順 k+1 (k=1,2,...). $[0, T)$ 上 $v_k(t) \equiv 0$ ならば再構成終了, このときの k が上の N_0 に対応する: $v_{N_0}(t) \equiv 0$. 一方, $v_k(t) \neq 0$ ならば, 次の手続きを実行する:

- $t_k := \inf\{t \in [0,T) : v_k(t) \neq 0\}$ と置く.
- 次のように $(h_k - h_{k-1})/a_k$, b_{k+1} を再構成する:

$$\frac{h_k - h_{k-1}}{a_k} := \frac{1}{2}\left(t_k + \frac{y}{a_1}\right) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{h_j - h_{j-1}}{a_j},$$

$$b_{k+1} := \frac{2^{2k-2}\displaystyle\prod_{j=1}^{k-1}(b_j b_{j+1}) + v_k(t_k+0)a_1 \prod_{j=1}^{k-1}(b_j + b_{j+1})^2}{2^{2k-2}\displaystyle\prod_{j=1}^{k-1}(b_j b_{j+1}) - v_k(t_k+0)a_1 \prod_{j=1}^{k-1}(b_j + b_{j+1})^2} b_k.$$

- $v_{k+1}(t) := v_k(t) + \dfrac{1}{a_1} g^{(k)}\left(t; \dfrac{y}{a_1}; b_1, \ldots, b_{k+1}; \dfrac{h_1}{a_1}, \dfrac{h_2 - h_1}{a_2}, \ldots, \dfrac{h_k - h_{k-1}}{a_k}; T\right)$ と置き, 次の手順に進む. ここで, $g^{(k)}$ は

$$\begin{aligned} &g^{(k)}(t; \lambda; b_1, \ldots, b_{k+1}; \Theta_1, \ldots, \Theta_k; T) \\ &= \sum_{\{m_j\}_{j=1}^k : \sum_{j=1}^k (m_j+1)\Theta_j \leq \frac{1}{2}(T+\lambda)} \phi_k(m_1, \ldots, m_k; b_1, \ldots, b_{k+1}) \\ &\qquad \times \sum_{\nu=\pm 1} H\left(t - \left(\nu\lambda + 2\sum_{j=1}^k (m_j+1)\Theta_j\right)\right) \end{aligned}$$

という形をしている. 尚, ϕ_k は $(b_j - b_{j+1})/(b_j + b_{j+1})$ などの有限個の積の有限和であり, 具体的な表示も得られているが, ここでは割愛する (具体的な表示は [3] 参照).

主結果中の $g^{(k)}$ の部分は, 大雑把に言えば「媒質の情報が再構成できた部分だけの影響により発生することが分かる観測データ」であり, これは, 実は順問題を解いたときに得られるデータということもできる. 逆問題と順問題は, 全く異なる問題というわけではなく, 逆問題として定式化された問題を解決しようと思うと, 順問題のより深い考察が必要になることも屡々あるようである.

参考文献

[1] 長岡洋介, 振動と波, 裳華房, 1992.

[2] 中村玄, 弾性体の逆問題, 数学 **53** (2001), 113–124.

[3] S. Nagayasu, *An inverse problem for the one-dimensional wave equation in multi-layer media*, preprint.

Morita theory in Poisson Geometry

廣田祐士
慶應義塾大学大学院理工学研究科
Yuji HIROTA
Keio Uhiversity

Abstract. Morita equivalent which arose in pure algebra was introduced to C^*-algebras by Rieffel , and was applied to Poisson Geometry by Xu. It is the idea which indicates equivalent categories. In my talk, I want to give some results obtained from applying it to twisted Poisson manifolds glancing through the Xu's studies.

1 導入

1.1 Poisson 多様体

C^∞-級多様体 P 上の関数環 $C^\infty(P)$ に Leibnitz 則

$$\{f,\, gh\} = \{f,\, g\}h + g\{f,\, h\}$$

を満たす Lie 括弧積 $\{\bullet,\bullet\}$ が定義されているとき, 括弧積 $\{\bullet,\bullet\}$ を**Poisson 括弧**, $(C^\infty, \{\bullet,\bullet\})$ を P 上の**Poisson 構造**といい, P を **Poisson 多様体**と呼ぶ.

上記の関係式から Poisson 多様体 P には $\{f,g\} = \pi(df,dg)$ であるような二重ベクトル場 $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ が存在することがわかる. また, Poisson 括弧 $\{\bullet,\bullet\}$ に関する Jacobi 恒等式は $[\pi,\pi]_{SN} = 0$ と同値である. したがって, Poisson 多様体を定義するのに関数環の言葉で始める代わりに $[\pi,\pi]_{SN} = 0$ を満たす二重ベクトル場 π を用いる方法もある. ここで $[\bullet,\bullet]_{SN}$ は Schouten-Nijenhuis 括弧と呼ばれるもので, $\Gamma(\wedge^2 TM)$ で定義される演算である.

1.2 閉3形式でtwistされたPoisson構造

滑らかな多様体 M 上で定義された2ベクトル $\pi \in \Gamma(\wedge^2 TM)$ と閉3形式 $\phi \in \Omega^3(M)$ が関係式

$$\frac{1}{2}[\pi,\pi]_{SN} = \wedge^3 \pi^{\#}(\phi)$$

を満たすとき, (M,π,ϕ) を **ϕ-twisted Poisson 多様体**とよぶ. もともとこの概念は位相的シグマ模型の研究に端を発し, WZW-Poisson 構造ともよばれている. また, M 上に $d\omega + \phi = 0$ を満たす3形式 ϕ と非退化な2形式 ω があるとき, (M,ω,ϕ) を ϕ-twisted symplectic 多様体という. 通常のPoisson多様体は, twisted-Poisson多様体の特殊なケース $(\phi = 0)$ と見做せる.

Twisted-Poisson多様体は, Dirac幾何学の枠組みで捉え直すことも可能である. いま, M に閉3形式 ϕ が与えられているとした上でベクトルバンドル $E_\phi = TM \bigoplus T^*M$ 上の切断全体につぎのようなoperationを定める.

1. $\langle (X,\xi),(Y,\eta)\rangle := \xi(Y) + \eta(X) \ \in C^\infty(M)$
2. $[\![(X,\xi),(Y,\eta)]\!] := ([X,Y],\ \mathcal{L}_X\eta + i_Y d\xi + i_{X\wedge Y}\phi) \ \in \Gamma(E_\phi)$

もし, 2ベクトル π の誘導する部分バンドル $L_\pi \subset TM \bigoplus T^*M$ が $[\![\bullet,\bullet]\!]$ に関して閉じており, なおかつ rank L_π が M の次元と等しく, $\langle\bullet,\bullet\rangle$ を L_π に制限したところで0であるならば (M,π,ϕ) はTwisted-Poisson多様体となる.

さて, 通常のPoisson多様体の余接バンドルにはPoisson構造から誘導されるLie algebroidの構造が入り, Poisson多様体によってはそれはある特殊な亜群と対応することが知られている. これと同様に, Twisted-Poisson多様体(すべてではない)にも亜群の対応物がある. それがTwisted symplectic亜群と呼ばれるものである.

2 Lie亜群が成す圏

Twisted symplectic亜群の森田同値について述べる前に, いささかの準備を要する. C^∞ 級多様体 X からLie亜群 $G_1 \rightrightarrows G_0$ の対象空間 G_0 へ

の写像 $J : X \to G_0$ に対して,

1. $J(g \cdot x) = t(g)$ (t は target map)
2. $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$
3. $\varepsilon(J(x)) = x$ (ε は identity section)

をみたす写像 $G * X = \{ (g, x) \mid s(g) = J(x) \} \to X$ が与えられたとき, $G_1 \rightrightarrows G_0$ の X への左作用といい, $J : X \to G_0$ を運動量写像とよぶ. ここで s は source map を表わす. Lie 亜群の左作用のうちで最も簡単な例は, target map を運動量写像とする亜群の積である. X への右作用も同様に定義される. また, X に Lie 亜群 $G_1 \to G_0, H_1 \rightrightarrows H_0$ がそれぞれ左右から可換に作用しているとき X をG-H **bibundle** といい, 記号で $G \rightarrowtail X \leftarrowtail H$ と書く. そして G-H bibundle X において, 右 (左) 作用に関する運動量写像 $J : X \to H_0\,(G_0)$ の各ファイバー $J^{-1}(p)\,(\forall p \in H_0\,(G_0))$ に $G\,(H)$ が推移的かつ自由に作用しているとき, X を**left (right) principal bibundle** とよぶ.

さて, 右作用がそれぞれ固有な left principal bibundle $G \rightarrowtail X \leftarrowtail H$, $H \rightarrowtail Y \leftarrowtail K$ に対するファイバー積 $X \times_{H_0} Y$ には $(x, y) \mapsto (xh, h^{-1}y)$ により H の右作用が定義される. この作用による商空間 $X \otimes_H Y$ には $\tilde{\rho} : X \otimes_H Y \to G_0$, $[x, y] \mapsto \rho(x)$, $\tilde{\tau} : X \otimes_H Y \to K_0$, $[x, y] \mapsto \tau(y)$ を運動量写像とし, $g \cdot [x, y] = [gx, y]$, $[x, y] \cdot k = [x, yk]$ をそれぞれ左作用, 右作用とする G-K bibundle の構造が入る. ここで ρ, τ はそれぞれ X の 左 G-作用, および Y の 右 K-作用に関する運動量写像である.

Lie 亜群全体は, それら亜群を対象とし, left principal bibundle の同型類を射とする圏 **LG** となる. なお, 二つの G-H bibundle X, Y が同型であるとは, X と Y の間に亜群の作用と運動量写像に関して可換となるような微分同相写像が存在するときをいう. このとき射の合成は先述の $\otimes$ で与えられ, 恒等射は, source map, target map をそれぞれ運動量写像に持ち, 亜群の積を作用とする bibundle $G \rightarrowtail G \leftarrowtail G$ である. もし, Lie 亜群 $G_1 \rightrightarrows G_0, H_1 \rightrightarrows H_0$ の間に left principal かつ right principal であるような bibundle が存在するとき, それらの Lie 亜群は**森田同値**であるという. 言い換えれば Lie 亜群の森田同値とは, 圏 **LG** において同型な対象を指す.

3 Twisted symplectic 亜群の森田同値

Lie 亜群 $\Gamma_1 \rightrightarrows \Gamma_0$ に対し, $\Gamma_k := \Gamma \times_{(s,t)} \cdots \times_{(s,t)} \Gamma$ (k 回の積) とおき,

$$\partial_i(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k) = \begin{cases} (\gamma_2, \cdots, \gamma_k) & i = 0 \text{ のとき} \\ (\gamma_1, \cdots, \gamma_i\gamma_{i+1}, \cdots, \gamma_k) & 0 < i < k \text{ のとき} \\ (\gamma_1, \cdots, \gamma_{k-1}) & i = k \text{ のとき} \end{cases}$$

により $\partial_i : \Gamma_k \to \Gamma_{k-1}$ を定義する. $\partial : \Omega^q(\Gamma_k) \to \Omega^q(\Gamma_{k+1})$ を $(k+1)$-個の ∂_i $(0 \leqq i \leqq k)$ を引き戻した交代和とすれば, $(\Omega^q(\Gamma_p), d, \partial)$ は二重複体を成す. ここで d は通常の外微分 $d : \Omega^q(\Gamma_k) \to \Omega^{q+1}(\Gamma_k)$ である. 亜群 $\Gamma_1 \rightrightarrows \Gamma_0$ で, それが誘導する全複体において $\omega + \phi$ が 3-cocycle となるような非退化な 2 次形式 $\omega \in \Omega^2(\Gamma_1)$ と 3 次形式 $\phi \in \Omega^3(\Gamma_0)$ が存在するとき, $(\Gamma_1 \rightrightarrows \Gamma_0, \omega, \phi)$ を Twisted symplectic 亜群という.

いま, Twisted symplectic 亜群 $(G_1 \rightrightarrows G_0, \omega_G, \phi_G), (H_1 \rightrightarrows H_0, \omega_H, \phi_H)$ に対して, 以下の条件を満たす C^∞ 級多様体 X と $J_G : X \to G_0$, $J_H : X \to H_0$ および非退化な 2 次形式 $\omega_X \in \Omega^2(X)$ が存在するとき, X を**Hamiltonian G-H bimodule** という.

1. X は G-H bibundle $G \rightarrowtail X \leftarrowtail H$ である.
2. $d\omega_X = J_G\phi_G - J_H\phi_H$
3. 亜群 $G \times \overline{H}$ の作用により誘導される graph が $\omega_G \oplus (-\omega_H) \oplus \omega_X \oplus (-\omega_X)$ に関して Lagrangian となる.

但し, 上で云うところの $G \times \overline{H}$ の作用は, $s(g) = J_1(x), s(h) = J_2(x)$ を満たす全ての x, g, h に対して $(g, h) \cdot x := gxh^{-1}$ で与えられる. 二つの Twisted symplectic 亜群 $(G_1 \rightrightarrows G_0, \omega_G, \phi_G)$, $(H_1 \rightrightarrows H_0, \omega_H, \phi_H)$ が森田同値であるとは, bibundle として right principal かつ left principal な Hamiltonian G-H bimodule X が存在するときをいう. Twisted symplectic 亜群の森田同値もまた, 圏 **TwSG** の言葉で解釈することができる. ここで **TwSG** は Twisted symplectic 亜群が形成する圏である.

4 Integrable Twisted Poisson 多様体の場合

twisted Poisson 多様体 M に対して適当な亜群が存在し, M の余接バンドルがその亜群から導かれる Lie algebroid と同型となるとき M を**integrable** とよぶ. integrable な twisted Poisson 多様体と twisted symplectic 亜群の間には 1 対 1 の対応がつくことが知られている. 以上のことを踏まえて, integrable な twisted Poisson 多様体の間にも森田同値の概念を導入することができる.

参考文献

[1] Bursztyn,H., Weinstein,A. "*Poisson geometry and Morita equivalence*",math.SG/0402347.

[2] A.Cannas da Silva, Weinstein,A. "*Geometric Models for Noncommutative Algebras*", Berkeley Math.Lect.Notes **10**. Amer.Math.Soc.1999

[3] Landsman, N. P. "*Quantized reduction as a tensor product*", In: *Quantization of Singular Symplectic Quotients*, Birkhäuser, Basel, 2001, 137-180.

[4] P.$\tilde{S}$evera, Weinstein,A. "*Poisson geometry with 3-form background*", In: *Noncommutative Geometry and String Theory. Progr. Theoret.Phys.Suppl.***144**,2001,145-154.

[5] Xu,P. "*Morita equivalence of Poisson manifolds*", Comm. Math. Phys. **142**, 1991,493-509

[6] Xu,P. "*Morita equivalent symplectic groupoids*", In: *Symplectic geometry, groupoids, and integrable systems(Berkeley, CA, 1989)*, Springer,New York,1991,291-311.

F-thresholds and jumping coefficients.

北海道大学理学研究科数学専攻修士2年 廣瀬大輔

概 要

I will introduce the work of M. Mustaţă, S. Takagi, and K. Watanabe. F-thresholds are one of the tools of commutative ring theory in positive characteristic. But there is an analogue of the jumping coefficients of multiplier ideals in characteristic 0.

1 はじめに

ここでは [MTW] を中心に F-thresholds について紹介したいと思います. F-thresholds とは正標数の可換環上のイデアルに対して定まる量で, 最近の tight closure の理論の流れである複素数体 (標数 0 の体) 上の代数多様体の特異点論との対応を目指す試みのひとつです. そもそも tight closure とは Hochster と Huneke により 1980 年代に定義されたイデアルになされる演算で (その定義のみ 3 節で触れます), 純粋に環論的問題を解くための道具として生まれました [HH]. それが最近になって特異点の中でも特異点解消時の discrepency により定まるクラスの特異点を標数 p に還元することで tight closure や Frobenius 射により特徴づけられることがわかってきました. F-thresholds は上のクラスの特異点を扱う際に現れる乗法イデアルの jumping coefficients との対応が期待されています.

2 F-thresholds の定義

まず F-thresholds を定義します. 普通は環 R を正標数 $p>0$ の n 次元正則局所環としますが, ここでは次の環を思い浮かべていただければ十分です.

$$\mathbb{F}_p[X_1,\cdots,X_n]_{(X_1,\cdots,X_n)} := \{\frac{f}{g} | f,g \in \mathbb{F}_p[X_1,\cdots,X_n], g(0,\cdots,0) \neq 0\}.$$

$\mathbb{F}_p$ は $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ のことで p 倍すると元は消えることから $I=(y_1,\cdots,y_s) \subseteq R$ なるイデアルと整数 $e \geq 1$ に対して

$$I^{[p^e]} := (y^{p^e} | y \in I) = (y_1^{p^e},\cdots,y_s^{p^e})$$

と定めることができます. また R 上の Frobenius 射 $F : R \to R$ を

$$F : R \to R$$

$$x \mapsto x^p$$

と定めると $I^{[p^e]} = F^e(I)$ と見ることができます. これで題にある F-thresholds を定義できます.

定義 2.1 (F-thresholds). $f \in R, J \subseteq R$ と置いたとき (実際は f の代わりにイデアル $\mathfrak{a}$ を指定して $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq Rad(J) \subsetneq R$ なるものとしてとってきます.)f の J に対する p^e での thresholds $\nu_f^J(p^e)$ を次のように定める.

$$\nu_f^J(p^e) := \max\{r \in \mathbb{N} | f^r \notin J^{[p^e]}\}.$$

この thresholds を用いて f の J に対する F-thresholds $c^J(f)$ を次のように定める.

$$c^J(f) := \lim_{e\to\infty} \frac{\nu_f^J(p^e)}{p^e}.$$

F-thresholds に関する性質のうちで基本的なものを挙げておきます.

- $0 < c^J(f) < \infty$ となる.
- $f = ag$ ならば $c^J(f) \leq c^J(g)$ となる.
- 逆に $J \subseteq J'$ ならば $c^{J'}(f) \leq c^J(f)$ となる. このことから R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対する f の F-thresholds が f の最小の F-thresholds である.

F-thresholds はどのような意味を持つ量なのかという疑問には次節の test イデアルを見ることで答えられると思います.

3 test イデアルとの関係

test イデアルとは tight closure の理論の中心になるものとして定義されました. ちなみに tight closure とはイデアルになされる演算でイデアル I の tight closure を I^* と書き

$$z \in I^* \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exists c \in R \setminus \{0\} \ s.t. \ cz^{p^e} \in I^{[p^e]}, \ e \gg 0$$

と定義されます. test イデアルは全てのイデアル I に対して上の c となることのできる (まさに tight closure に入るかどうかを test する) イデアルとして定義されましたが最初に書いたように, 幾何学的な対応を目指した一般化のなかで次のようなかたちとなりました.

まず E を R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ による剰余体 k の injective hull とします. この一般元を具体的に書くと次の形になります.

$$E \ni w = [u/(x_1 \cdots x_n)^d].$$

ここで x_i は $R = \mathbb{F}_p[X_1, \cdots, X_n]_{(X_1, \cdots, X_n)}$ で考えるならばそのまま不定元 X_i として, 普通の R で考えるならば正則パラメータとします. また同値関係 $[u/(x_1 \cdots x_n)^d] \sim 0_E$ は

$$[u/(x_1 \cdots x_n)^d] \sim 0_E \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} u \in (x_1^d, \cdots, x_n^d)$$

として定まります. E 上の Frobenius 射 $F_E : E \to E$ を $F_E(w) := [u^p/(x_1 \cdots x_n)^{pd}]$ として定めたとき f と自然数 r, e に対して $Z_{r,e}$ を

$$Z_{r,e} := \ker f^r F_E^e = \{w \in E | f^r F_E^e(w) = 0_E\}$$

として定義しておきます.

定義 3.1 (test イデアル)**.** f と実数 $t > 0$ に対する test イデアル $\tau(f^t)$ を次のように定める.

$$\tau(f^t) := \mathrm{Ann}_R(\bigcap_{e \geq 1} Z_{\lceil tp^e \rceil, e}).$$

ただし式の $\lceil tp^e \rceil$ は切り上げと呼び

$$tp^e \leq \lceil tp^e \rceil < tp^e + 1$$

となる整数のことである.

test イデアルも次の基本的な性質を確かめることができます.

- $f = ag$ ならば $\tau(f^t) \subseteq \tau(g^t)$ となる.
- 逆に $t \leq t'$ ならば $\tau(f^{t'}) \subseteq \tau(f^t)$ となる.

この test イデアルと F-thresholds は次の補題を足掛かりにつながりを持ちます.

補題 3.2 ([MTW]lemma.2.4). 前節の f, J に対して E の部分加群 M を $J = \mathrm{Ann}_R M$ となるようにとってくると $\nu_f^J(p^e)$ は $M \nsubseteq Z_{r,e}$ となる最大の r となる.

test イデアルの性質と上の補題から次の定理を得ることができます.

定理 3.3 ([MTW]proposition.2.7). f の F-thresholds と test イデアルの間にはそれぞれ $J \longmapsto c^J(f), c \longmapsto \tau(f^c)$ なる対応により全単射がある.

この結果から f の F-thresholds と test イデアルの間に次の関係があることがわかります.

$$c_0 := c^{\mathrm{m}}(f) < c_1 < \cdots < c_i < c_{i+1} < \cdots$$

を f の F-thresholds を順に並べた列とすると

$$\tau(f^c) = \tau(f^{c_i}), \quad c \in [c_i, c_{i+1})$$

が成立します. 即ち F-thresholds は test イデアルを JUMP させる境界であると特徴づけられます.

さて, はじめに F-thresholds のことを標数 0 の体上の特異点論との対応を与える試みのひとつとして挙げましたが, JUMP という特徴づけができたところで F-thresholds は何に対応しているのか, そしてどのようにして違う標数のものを対応させるのか次節で見ていきたいと思います.

4 標数 p への還元

A を $\mathbb{Z}$ の 0 でない元で局所化したものとして $0 \neq f \in A[X] := A[X_1, \cdots, X_n]$ をとってきます. $f_{\mathbb{Q}} := f\mathbb{Q}[X]$ の原点の周りでの乗法イデアルの jumping coefficients と標数 p に還元して原点で局所化したものである $f_p := f\mathbb{F}_p[X]_{(X_1,\cdots,X_n)}$ の F-threshold と比較していきたいと思います. ここでは p をいろいろ動かしますが, 十分大きな p を考えるので A を必要に応じてさらに元で局所化することは自由にできるものとします.

$\mathbb{Q}$ 上の $f_{\mathbb{Q}}$ の log resolution $\pi_{\mathbb{Q}} : Y_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}}$ とは $\pi_{\mathbb{Q}}$ が固有な双有理射で $Y_{\mathbb{Q}}$ は滑らかで $\pi_{\mathbb{Q}}^{-1}(f_{\mathbb{Q}})$ と $\pi_{\mathbb{Q}}$ の例外因子が定めるイデアルの積は principal でありそれが定める因子は単純正規交差であるものをいいます. このような解消は廣中の特異点解消定理より保証されています. A をさらに元で局所化することで $\pi_{\mathbb{Q}}$ は A 上の f の log resolution $\pi : Y \to \mathbb{A}^n_A$ の係数を拡大しただけの物と見ることができます.

log resolition を定義したところで f と t の乗法イデアル $\mathcal{I}(f^t)$ が定義できます.

定義 4.1 (乗法イデアル). D を $\pi^{-1}(f)$ により定まる有効因子, K を π の双対標準因子とする. このとき全ての実数 $t > 0$ に対して

$$\mathcal{I}(f^t) := H^0(Y, \mathcal{O}_Y(K - \lfloor tD \rfloor)). \qquad (*)$$

ここで実数 t に対して $\lfloor t \rfloor$ を切り下げと呼び $t - 1 < \lfloor t \rfloor \leq t$ を満たす整数のことを指す, $\lfloor tD \rfloor$ は例えば *Weil* 因子 $D = \sum a_i Y_i$ なら $\lfloor tD \rfloor = \sum \lfloor ta_i \rfloor Y_i$ と定める.

$\mathcal{I}(f^t)_{\mathbb{Q}}$ を $f_{\mathbb{Q}}$ と t の乗法イデアルとする.

この乗法イデアルから jumping coefficients を次の形で定義します.[MTW]

$$\lambda_0^J(f) := \min\{t > 0 | \text{原点付近で} \mathcal{I}(f^t)_{\mathbb{Q}} \subseteq J_{\mathbb{Q}}\}.$$

jumping coefficients はその名の通り乗法イデアルを JUMP させる境界となります.

p を十分大きくとると上の log resolution は $\mathbb{F}_p$ 上定義された π_p の log resolution を誘導できます. そして $\mathcal{I}(f_p^t)$ を $(*)$ と同じように π_p を使って定義すると, t を固定したとき十分大きな p ならば $\mathcal{I}(f^t)_p = \mathcal{I}(f_p^t)$ となります.

このように乗法イデアルを標数 p に還元させることで, test イデアルと比較することができます.

定理 4.2 ([MTW]theorem.3.2). t を任意にとる. このとき t に依った十分大きな p で $\tau(f_p^t) = \mathcal{I}(f_p^t)$ が成立する.

この定理と前節の F-thresholds と test イデアルの関係から f の乗法イデアルの jumping coefficients と F-thresholds の間に次の対応があることがわかります.

定理 4.3 ([MTW]theorem.3.4). イデアル $J \subseteq A[X]$ を与えたとき

$$\lim_{p \mapsto \infty} c^J(f_p) = \lambda_0^J(f)$$

が成立する.

p を大きくしていったときの F-thresholds の極限は jumping coefficients となることがわかりました. [MTW] では次の予想がたてられています.

予想 4.4. 無限に多くの p で $c^J(f_p) = \lambda_0^J(f)$ とできるか.

この予想はもう少し具体的な形で定式化されていますが, 私は [MTW] で挙げられたこの類の予想の解決 (成立条件を見つける部分的解決も含め) を目指しています.

参考文献

[HH] M. Hochster and C. Huneke, *Tight closure, invariant theory and the Briançon-Skoda theorem.* , J. Amer. Math. Soc. **3**. (1990) No.1. 31–116

[HY] N. Hara and K. Yoshida, *A genelization of tight closure and multiplier ideals.* , Trans. Amer. Math. Soc. **355**. (2003) 3143–3174

[MTW] M. Mustaţă, S. Takagi and K. Watanabe, *F-thresholds and Bernstein-Sato polynomials.* , Proceedings of the 4th ECM, Stockolm, 2004 341–364

A scaling limit for a general class of quantum field models and its application to nuclear physics

Akito Suzuki

Department of Mathematics, Hokkaido University

1 Introduction

We study a mathematically rigorous method of deriving the Schrödinger Hamiltonians of the form

$$H_{\mathrm{S}} = -\Delta + V, \tag{1.1}$$

where Δ denotes the generalized Laplacian. These Hamiltonians describe the total energy of systems for N nonrelativistic quantum particles removing in $\mathbb{R}^d$ under the influence of a potential V $(d, N \in \mathbb{N})$. In quantum mechanics, H_{S} is a self-adjoint operator acting on a Hilbert space. The exact nature of this Hilbert space is dependent on the potential V (hence, on the system); for example, (1) the Schrödinger Hamiltonian of particles under the influence of a scalar potential $V : \mathbb{R}^{dN} \to \mathbb{R}$ acts on the space of square-integrable functions $L^2(\mathbb{R}^{dN})$, and (2) the Schrödinger Hamiltonian of particles under the influence of an $n \times n$-matrix-valued potential acts on the space of square-inregrable $\mathbb{C}^n$-valued functions $L^2(\mathbb{R}^{dN}; \mathbb{C}^n)$. They are of general use to explain many phenomena.

A method of deriving a class of the Schrödinger Hamiltonians in the case (1) was studied by Davies [2] and Hiroshima [3, 4].

In nuclear physics and condensed matter physics, physicists often use the Schrödinger Hamiltonian in the case (2). However, as far as we know, there is little literature on a mathematically rigorous method of deriving such a Hamiltonian. We are interested in deriving the Hamiltonin in the case (2). We derive a class of the Schrödinger Hamiltonians in a scaling limit [1, 3, 7] of Hamiltonians of particles coupled to a Bose field which describes an interaction between the particles.

Scaling limit

Now, we explain the scaling limit for a model of quantum particles coupled to an abstract Bose field. To begin with, we introduce the Hamiltonian of this model by

$$H = -\Delta \otimes I + I \otimes H_{\mathrm{b}} + gH_{\mathrm{I}}, \tag{1.2}$$

acting on $L^2(\mathbb{R}^{dN}) \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$, where I denotes the identity opertor, H_{b} the free Hamiltonian of the Bose field, H_{I} a symmetric operator that describes interaction between the particles and the Bose field, g a coupling constant that denotes the strength of the interaction, and $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{K})$ the Boson Fock space over a Hilbert space $\mathcal{K}$. We detail these notations in the following section.

We introduce a scaled Hamiltonian by

$$H(\Lambda) = -\Delta \otimes I + \Lambda^2 I \otimes H_{\mathrm{b}} + g\Lambda H_{\mathrm{I}}, \quad \Lambda > 0. \tag{1.3}$$

We are interested in the limit of $H(\Lambda)$ as $\Lambda \to \infty$ in the strong resolvent sense.

In [3, 4], it was shown that, under suitable conditions,

$$\text{s-}\lim_{\Lambda\to\infty}(H(\Lambda)-z)^{-1} = (H_{\rm S}-z)^{-1}\otimes P_0 \tag{1.4}$$

for $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, where P_0 denotes the orthogonal projection from $\mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{K})$ onto $\ker H_{\rm b}$. Note in passing that, physically, $\ker H_{\rm b}$ represents the vacuum of the Bose field. Hence, we obtain the Schrödinger Hamiltonian in the vacuum of the field. However, $H_{\rm S}$ in (1.4) is the Schrödinger Hamiltonian in the case (1). The purpose of this paper is to derive the Schrödinger Hamiltonian in the case (2). Indeed, we can derive the Schrödinger Hmiltonian with operator-valued potential.

2 Definition of a model

In order to derive the Schrödinger Hamiltonian in the case (2), we introduce an abstract model for quantum particles coupled to a Bose field with some degrees of freedom. We denote the one-boson Hilbert space by $\mathcal{K}$ which is taken to be an arbitrary separable complex Hilbert space. To describe the Bose field, one uses the Boson Fock space over $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{K}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty}\bigotimes_{\rm s}^{n}\mathcal{K}$$

where $\bigotimes_{\rm s}^{n}\mathcal{K}$ denotes the n-fold symmetric tensor product of $\mathcal{K}$ with $\bigotimes_{\rm s}^{0}\mathcal{K} := \mathbb{C}$.

Let T be a non-negative, injective and self-adjoint operator on $\mathcal{K}$. The operator T represents a dispersion relation of one free boson associated with the Bose field under consideration. The free Hamiltonian of the Bose field is defined by the second quantization of T:

$$H_{\rm b} := d\Gamma(T)$$

acting on $\mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{K})$, where

$$d\Gamma(T) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T^{(n)},$$

with $T^{(0)} = 0$ and $T^{(n)}$ is the closure of

$$\left(\sum_{j=1}^{n} I\otimes\cdots\otimes\overset{j\text{th}}{\overbrace{T}}\otimes\cdots\otimes I\right)\Bigg|\widehat{\bigotimes^{n}}\,D(T),$$

where $\bigotimes_{\rm alg}$ denotes the algebraic tensor product. Note that $d\Gamma(T)$ is non-negative, since T is non-negative.

Let $a(f)$ $(f\in\mathcal{K})$ be the annihilation operators and $a(f)^*$ the creation operators, satisfying the canonical commutation relations

$$[a(f),a(g)^*] = \langle f,g\rangle,\quad [a(f),a(g)] = 0,\quad [a(f)^*,a(g)^*] = 0$$

for all $f, g \in \mathcal{K}$ on the dense subspace

$$\mathcal{F}_0(\mathcal{K}) := \left\{ \psi \in \mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{K}) \mid \psi^{(n)} = 0 \text{ for any } n \geq n_0 \text{ with some } n_0 \in \mathbb{N} \right\},$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes innerproduct of $\mathcal{K}$ and $[X, Y] := XY - YX$. The Segal field operator

$$\phi(f) := \frac{a(f) + a(f)^*}{\sqrt{2}}, \qquad f \in \mathcal{K},$$

is essentially self-adjoint on $\mathcal{F}_0(\mathcal{K})$ [5, §X.7]. We denote its closure by the same symbol $\phi(f)$.

Let $\mathcal{H}$ be an arbitrary separable complex Hilbert space. The Hilbert space of the coupled system of the particles and the Bose field with some degrees of freedom is given by

$$\mathcal{F} := L^2(\mathbb{R}^{dN}; \mathcal{H}) \otimes \mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{K}) \simeq \mathcal{H} \otimes L^2(\mathbb{R}^{dN}; \mathcal{F}_{\rm b}(\mathcal{K})).$$

Let $B_j (j = 1, \cdots, J)$ be bounded self-adjoint operators on $\mathcal{H}$, $g_j : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{K}$ $(j = 1, \cdots, J)$ continuous functions and

$$H_{\rm I} = \sum_{j=1}^{J} B_j \otimes \int_{\mathbb{R}^{dN}}^{\oplus} \phi(g_j(x)) dx,$$

where $\int_{\mathbb{R}^{dN}}^{\oplus} \cdot dx$ denotes the operator whose fiber is $\cdot$ (see [6, §XIII.16]). We introduce a Hamiltonian of the particles coupled to the Bose field with some degrees of freedom by

$$H = -\Delta \otimes I + I \otimes H_{\rm b} + gH_{\rm I}$$

on $\mathcal{F}$, where $g \in \mathbb{R}$ is a coupling constant.

3 The main result

To begin with, we introduced a scaled Hamiltonian $H(\Lambda)$ $(\Lambda > 0)$ by

$$H(\Lambda) := -\Delta \otimes I + \Lambda^2 I \otimes H_{\rm b} + g\Lambda H_{\rm I}.$$

In order to describe the main result, we now formulate hypotheses. To do this, we introduced some notations.

We denote by $L^\infty(\mathbb{R}^{dN}; \mathcal{K})$ the set of mesurable functions $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathcal{K}$ for which

$$\|f\|_\infty := \text{ess. } \sup_{x \in \mathbb{R}^{dN}} \|f(x)\|_{\mathcal{K}} < \infty.$$

For $\alpha \in \mathbb{R}$, we define a $\mathcal{K}$-valued function $T^\alpha f$ on $\mathbb{R}$ as follows: if $f(x) \in D(T^\alpha)$ a.e.$x \in \mathbb{R}^{dN}$ with respect to Lebesuge mesure,

$$(T^\alpha f)(x) := T^\alpha f(x).$$

Definition 3.1 *Let $\alpha \in \mathbb{R}$. $L^\infty_\alpha(\mathbb{R}^{dN};\mathcal{K})$ denotes the set of $\mathcal{K}$-valued functions f on $\mathbb{R}$ satisfing the following conditions:*
(i) f is strongly continuous with $f \in L^\infty(\mathbb{R}^{dN};\mathcal{K})$.
(ii) $f(x) \in D(T^\alpha)$ $(x \in \mathbb{R})$ and $T^\alpha f \in L^\infty(\mathbb{R}^{dN};\mathcal{K})$.

A $\mathcal{K}$-valude function f on $\mathbb{R}^{dN}$ is to be diferentiable with respect to x_μ if the sequence

$$\frac{f(x_1,\cdots,x_\mu+\varepsilon,\cdots,x_d)-f(x)}{\varepsilon} \tag{3.1}$$

converges as $\varepsilon \to 0$ for any $x=(x_1,\cdots,x_{dN}) \in \mathbb{R}^{dN}$. Then, we denote the limit of (3.1) by $\partial_\mu f$. One can define the n times diferentiability $(n \in \mathbb{N})$, inductively:

$$\partial_\mu^n f := \partial_\mu(\partial_\mu^{(n-1)} f),\ n \geq 1.$$

Hypothesis A *The functions $g_j (j=1,\cdots,J)$ are twice diferensiable and satisfying the following conditions:*
(i) $g_j \in L^\infty_{-3/2}(\mathbb{R}^{dN};\mathcal{K}) \cap L^\infty_{-1}(\mathbb{R}^{dN};\mathcal{K}) \cap L^\infty_{-1/2}(\mathbb{R}^{dN};\mathcal{K})$.
(ii) $\partial_\mu(T^{-1}g_j) \in L^\infty_{-1/2}(\mathbb{R}^{dN};\mathcal{K}) \cap L^\infty_{1/2}(\mathbb{R}^{dN};\mathcal{K})$ for $\mu=1,\cdots,d$.
(iii) $\partial_\mu^2(T^{-1}g_j) \in L^\infty_{-1/2}(\mathbb{R}^{dN};\mathcal{K})$ for $\mu=1,\cdots,d$.
Moreover, we assume that for any $j,k=1,\cdots,J$ and a.e.$x \in \mathbb{R}^{dN}$

$$\langle g_j(x), g_k(x)\rangle,\quad \langle g_j(x), T^{-1}g_k(x)\rangle,\quad \langle T^{-1}g_j(x), T^{-1}g_k(x)\rangle \in \mathbb{R}.$$

We now ready to describe our main result. Let

$$V_{\text{eff}} = -\frac{g^2}{2}\sum_{1\leq j,k\leq J} V_{j,k},$$

where

$$V_{j,k}(x) = \left\langle g_j(x), T^{-1}g_k(x)\right\rangle B_k B_j,\quad \text{a.e.}x \in \mathbb{R}^{dN}.$$

Theorem 3.2 *Assume Hypothesis A. Then, for all $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$*

$$s\text{-}\lim_{\Lambda\to\infty}(H(\Lambda)-z)^{-1} = (H_{\text{eff}}-z)^{-1}\otimes P_0,$$

where

$$H_{\text{eff}} = -\Delta + V_{\text{eff}}$$

on $L^2(\mathbb{R}^{dN};\mathcal{H})$.

4 Concluding remarks

(a) Let W be a symmetric operator on $L^2(\mathbb{R}^{dN};\mathcal{H})$ obeying $-\Delta$-bounded with the relative bound less than one. Then, one can show that, under suitable conditions,

$$\text{s-}\lim_{\Lambda\to\infty}(H(\Lambda)+W\otimes I-z)^{-1} = (H_{\text{eff}}+W)^{-1}\otimes P_0.$$

(See [7].)

(b) In this paper, ultraviolet cutoffs (see [3, 4]) remain in the scaling limit H_{eff}. It is worth studying the scaling limit with removing ultraviolet cutoffs. Indeed, one can remove an ultra violet cutoff under suitable conditions. One of the conditions is the commutativity of the operators B_j. However, generally speaking, concrete models don't satisfy this condition. We are interested in the scaling limit with removing ultraviolet cutoffs without this commutativity condition. This is an open problem.

References

[1] A. Arai, An asymptotic analysis and its application to the nonrelativistic limit of the Pauli-Fierz and a spin-boson model, *J. Math. Phys.* **31** (1990), 2653-2663.

[2] E. B. Davies, Particle-boson interactions and the weak coupling limit, *J. Math. Phys.* **20** (1979), 345-351.

[3] F. Hiroshima, Weak coupling limit with a removal of an ultraviolet cutoff for a Hamiltonian of particles interacting with a massive scalar field, *Inf. Dimen. Anal. Quantum Prob. Relat. Top.* **1** (1998), 407-423.

[4] F. Hiroshima, Weak coupling limit and removing of an ultraviolet cutoff for a Hamiltonian of particles interacting with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **40** (1999), 1215-1236.

[5] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathmatical Physics Vol. II*, Academic Press, New York (1975).

[6] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathmatical Physics Vol. IV*, Academic Press, New York (1978).

[7] A. Suzuki, A Scaling limit for a general class of quantum field models and its applications to nuclear physics and condenced matter Physics, preprint (2005).

Quantum Painlevé Systems of type $A^{(1)}_{n-1}$

Hajime Nagoya (Tohoku University)

概 要

Painlevé equations (P_I, P_{II}, P_{III}, P_{IV}, P_V, P_{VI}) are discovered by P. Painlevé and B. Gambier in the classification of second order ordinary differential equations without movable singular points in their solutions. Later, K. Okamoto revealed the Hamiltonian structure of Painlevé equations and found Painlevé equations admit the actions of the affine Weyl groups. Therefore, Painlevé equations are the Hamiltonian system with affine Weyl group symmetry. In this article, we consider a canonical quantization of Painlevé equations with affine Weyl gruop symmtries.

1 Introduction

本講演では Painlevé 方程式の正準量子化及びその一般化について説明する.

Painlevé 方程式は, 動く分岐点を持たないという条件で２階の常微分方程式を分類し, Painlevé 及びその弟子である Gambier が２０世紀初頭に発見した方程式である. その後の１９８０年代に岡本和夫が解を解に移す変換として Painlevé 方程式がアフィン Weyl 群作用を持つことを発見した.

Painlevé 方程式は Hamilton 系として書けるのでその正準量子化が考えられる. Painlevé 方程式の Hamiltonian は正準座標変数の多項式で書けるが, その量子 Hamiltonian は一意的には書けない. そこで性質の良い量子化を考えるにあたって, アフィン Weyl 群作用を保つという条件を考える. 実際に第２, 第４, 第５ Painlevé 方程式においてそのような性質の良い量子化が存在することが確かめられる. [1]

一方, Painlevé 方程式及び一般のアフィン Weyl 群対称性を持つ微分方程式がアフィン Lie 環を用いて構成されることが知られており, その方程式系も $A^{(1)}_l$ の場合には正準量子化できることがわかっている. [2]

以下では, まず具体例を用いて Painlevé 方程式のアフィン Weyl 群対称性を説明し, その正準量子化を構成する. その後, 一般的に説明する.

2 量子第４ Painlevé 方程式

初めに, 古典の場合の第４ Painlevé 方程式 P_{IV} の対称形式を用いて説明する. P_{IV} の対称形式とは次のような方程式のことである.

$$\begin{aligned} f_1' &= f_1(f_2 - f_3) + \alpha_1, \\ f_2' &= f_2(f_3 - f_1) + \alpha_2, \\ f_3' &= f_3(f_1 - f_2) + \alpha_3, \end{aligned}$$

ただし, $f_i = f_i(t)$, $' = \frac{d}{dt}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ とする. ここで $\alpha_i = 0$ ならば, Lotka-Volttera 方程式であって $f_i = t$, $\alpha_i = 1$ は解であることに注意しておく.

次にアフィン Weyl 群対称性について説明する. $K=\mathbb{C}(f_i,\alpha_i)$ を有理関数体とする. K 上の準同型 s_i $(i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ を次で定める.

$$s_i(f_i)=f_i,\quad s_i(f_{i\pm1})=f_{i\pm1}\pm\frac{\alpha_i}{f_i},$$
$$s_i(\alpha_i)=-\alpha_i,\quad s_i(\alpha_{i\pm1})=\alpha_{i\pm1}+\alpha_i.$$

このとき,

$$s_i(f_j)'=s_i(f_j)(s_i(f_{j+1})-s_i(f_{j-1}))+s_i(\alpha_j).$$

この等式は s_i と $'$ が可換であると言い換えることができる. この等式から $f_i=t$, $\alpha_i=1$ に s_1 を作用させた

$$s_1(f_1)=t,\quad s_1(f_2)=t+\frac{1}{t},\quad s_1(f_3)=t-\frac{1}{t},$$
$$s_1(\alpha_1)=-1,\quad s_1(\alpha_2)=2,\quad s_1(\alpha_3)=2$$

は $\mathrm{P_{IV}}$ の対称形式の解である. s_1 をさらに作用させていけば, 無限個の解が作れる. これは非線形常微分方程式においては顕著な事象である.

s_i は $A_2^{(1)}$ 型の Affine Weyl 群の作用をなす:

$$s_i^2=1,\quad s_is_{i+1}s_i=s_{i+1}s_is_{i+1}.$$

これらのことから, $\mathrm{P_{IV}}$ はアフィン Weyl 群対称性を持つという.

$H\in K$ を次で定める.

$$H=f_1f_2f_3+\sum_{i=1}^{3}\epsilon_i(f_i+f_{i-1}),$$

ただし, $\alpha_i=\epsilon_i-\epsilon_{i+1}+\delta_{i,0}$. K 上の Poisson 括弧を次で定める.

$$\{f_i,f_{i+1}\}=1,\quad \{f_i,\alpha_j\}=\{\alpha_i,\alpha_j\}=0.$$

このとき,

$$f_i'=\{H,f_i\}+\delta_{i,0}.$$

次に量子 $\mathrm{P_{IV}}$ を構成する.

$\mathcal{K}$ を次で定まる $\mathbb{C}$ 上の斜体とする.

$$\begin{aligned}&\text{生成元:}\quad \hat{f}_i,\epsilon_i,\quad (i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}),\\ &\text{関係式:}\quad [\hat{f}_i,\hat{f}_{i+1}]=h,\quad [\hat{f}_i,\alpha_j]=[\alpha_i,\alpha_j]=0,\quad (h\in\mathbb{C}).\end{aligned}$$

$\mathcal{K}$ 上に $\mathbb{C}$-derivation ∂ を次で定めることができる.

$$\partial(\hat{f}_i)=\hat{f}_i\hat{f}_{i+1}-\hat{f}_{i-1}\hat{f}_i+\alpha_i,\quad \partial(\alpha_i)=0,$$

ただし, $\alpha_i=\epsilon_i-\epsilon_{i+1}$. この方程式の事を量子 $\mathrm{P_{IV}}$ という. $h=0$ のとき古典 $\mathrm{P_{IV}}$ となることは明らかであろう.

$\hat{H}\in\mathcal{K}$ を次で定める.

$$\hat{H}=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\hat{f}_i\hat{f}_{i+1}\hat{f}_{i+2}+\sum_{i=1}^{3}\epsilon_i(\hat{f}_i+\hat{f}_{i-1}).$$

このとき,

$$\partial(\hat{f}_i) = \frac{1}{h}[\hat{H}, \hat{f}_i] + \delta_{i,0}\sum_{i=1}^{3}\alpha_i.$$

さらに, $\mathcal{K}$ 上の準同型 s_i $(i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ を次で定めることができる.

$$s_i(\hat{f}_i) = \hat{f}_i, \quad s_i(\hat{f}_{i\pm1}) = \hat{f}_{i\pm1} \pm \frac{\alpha_i}{\hat{f}_i},$$
$$s_i(\alpha_i) = -\alpha_i, \quad s_i(\alpha_{i\pm1}) = \alpha_{i\pm1} + \alpha_i.$$

このとき,

$$\partial(s_i(\hat{f}_j)) = s_i(\hat{f}_j)s_i(\hat{f}_{j+1}) - s_i(\hat{f}_{j-1})s_i(\hat{f}_j) + s_i(\alpha_j).$$

また s_i は $A_2^{(1)}$ 型 Affine Weyl 群の作用をなす.

3 Quantum Painlevé Systems of type $A_{n-1}^{(1)}$

最後に一般的な取り扱いを述べる.

3.1 Lax equations

$\mathcal{K}_{m,n}$ $(m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 2})$ を次の生成元と関係式で定まる $\mathbb{C}$ 上の斜体とする.

$$\text{生成元:} \quad f_{i,i+j}, \epsilon_i \quad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m-1) \tag{1}$$
$$\text{関係式:} \quad \epsilon_i \text{は他と可換}, \tag{2}$$
$$[f_{ij}, f_{kl}] = h(\delta_{j\equiv k} f_{i,l+j-k} - \delta_{l\equiv i} f_{k,l+j-i}), \tag{3}$$

ただし $h \in \mathbb{C}$ とし

$$\delta_{i\equiv j} = \begin{cases} 1 & (i \equiv j \pmod n) \\ 0 & (i \not\equiv j \pmod n) \end{cases}, \quad f_{ij} = \begin{cases} 1 & (j-i=m) \\ 0 & (j-i>m) \end{cases} \tag{4}$$

であるとする. また $\epsilon_{i+n} = \epsilon_i$, $f_{i+n} = f_i$ とする. 上の関係式で定まる代数は Ore domain であることが示され, その商体が $\mathcal{K}_{m,n}$ である. 定義関係式は $f_{i,j+ns}$ を $z^{-s}E_{ji}$ と見たものに対応している. (E_{ij} は行列単位)

Definition 1 $\mathcal{K}_{m,n}[z, z^{-1}]$ を z, z^{-1} の多項式環とし, $Mat(n, \mathcal{K}_{m,n}[z, z^{-1}])$ の元である行列 M_i $(0 \leq i)$, Λ, M, B を次で定める.

$$M_0 = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}\epsilon_i, \quad M_j = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}f_{i,i+j} \quad (1 \leq j), \quad \Lambda = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} + zE_{n,1}, \tag{5}$$
$$M = \sum_{i=0}^{\infty} M_i\Lambda^i, . \tag{6}$$

行列 M の例として $m=4, n=5$ のときを挙げる.

$$M=\begin{bmatrix} \epsilon_1 & f_{12} & f_{13} & f_{14} & 1 \\ z & \epsilon_2 & f_{23} & f_{24} & f_{25} \\ zf_{36} & z & \epsilon_3 & f_{34} & f_{35} \\ zf_{46} & zf_{47} & z & \epsilon_4 & f_{45} \\ zf_{56} & zf_{57} & zf_{58} & z & \epsilon_5 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

このように変数の場所と添え字が一致している.

∂_z を $\mathcal{K}_{m,n}[z,z^{-1}]$ の $\mathcal{K}_{m,n}$-derivation で z を 1 に移すものとする. 行列 $C=\sum_{i=0}^{p} c_i\Lambda^i$ を Λ の多項式と見て, $C_{\geq q}=\sum_{i=q}^{p} c_i\Lambda^i$, $C_{<q}=\sum_{i=0}^{q-1} c_i\Lambda^i$ と定める.

Theorem 2 $s,k\in\mathbb{N}$ とし $ns>m(k-1)$ と仮定する. このとき $\mathcal{K}_{m,n}[z,z^{-1}]$ 上の $\mathbb{C}[z,z^{-1}]$-*derivation* $\partial_{s,k}$ を次の *Lax* 方程式で定めることができる.

$$\partial_{s,k}(M)=[M,B_{s,k}]+\kappa z\partial_z(B_{s,k}), \tag{8}$$

ただし $B_{s,k}=(M^k)_{\geq ns}\cdot z^{-s}$, $\kappa\in\mathbb{C}$ とする.

M や $B_{s,k}$ を Λ の多項式と見たとき, 条件 $ns>m(k-1)$ は $\partial_{s,k}(M)$ の次数が $z\partial_z(B_{s,k})$ の次数以上であることを意味することがわかる.

$m=2$, $s=1$, $n=2k+1$ $(k\in\mathbb{N})$ のときの例を与える. 定義関係式は次のようになる.

$$[f_{i,i+1},f_{i+1,i+2}]=h,\quad [f_{i,i+1},f_{j,j+1}]=0\quad (j\neq i\pm 1).$$

Lax 方程式 (8) から次を得る.

$$\begin{aligned}\partial_{1,k}(M_1)&=\sum_{p+q=1}\left(M_p(M_{n+q}^k)^{(p)}-M_{n+q}^kM_p^{(q)}\right)+\kappa\lambda_1M_{n+1}^k\\ &=M_1\left(\sum_{p=1}^{k-1}M_1^{2(p-1)}\right)^{(1)}-\left(\sum_{p=2}^{k}M_1^{2(p-1)}\right)M_1+M_0-M_0^{(1)}+\kappa\lambda_1.\end{aligned}$$

従って $1\leq i\leq n$ に対して次を得る.

$$\partial_{1,k}(f_{i,i+1})=f_{i,i+1}\left(\sum_{p=1}^{k-1}f_{i+2p-1,i+2p}\right)-\left(\sum_{p=1}^{k-1}f_{i+2p,i+2p+1}\right)f_{i,i+1}+\alpha_i,$$

ただし $\alpha_i=\epsilon_i-\epsilon_{i+1}$ $(1\leq i\leq n-1)$, $\alpha_n=\epsilon_n-\epsilon_1+\kappa$. $\partial_{1,k}$ が定めるこれらの微分方程式系は $A_{2k}^{(1)}$ 型の量子野海・山田系 である [1].

3.2 Affine Weyl group symmetry

Definition 3 行列 G_i $(1\leq i\leq n)$ を次で定義する.

$$G_i=\exp\left(E_{i+1,i}\frac{\alpha_i}{f_{i,i+1}}\right)\quad (1\leq i\leq n-1),\quad G_n=\exp\left(z^{-1}E_{1,n}\frac{\alpha_i}{f_{i,i+1}}\right) \tag{9}$$

ただし $\alpha_i=\epsilon_i-\epsilon_{i+1}$ $(1\leq i\leq n-1)$, $\alpha_n=\epsilon_n-\epsilon_1+\kappa$.

Proposition 4 $\mathcal{K}_{m,n}$ 上の準同型 s_i $(1 \leq i \leq n)$ を次で定めることができる.

$$\kappa z\partial_z + s_i(M) = G_i(\kappa z\partial_z + M)G_i^{-1}. \tag{10}$$

Theorem 5 *(1)* s_i $(1 \leq i \leq n)$ は $\mathcal{K}_{m,n}$ 上に $A_{n-1}^{(1)}$ 型アフィン *Weyl* 群の表現を構成する. すなわち次の関係式を満たす.

$$s_i^2 = 1, \quad (s_is_j)^3 = 1 \ (j = i \pm 1), \quad s_is_j = s_js_i \ (j \neq i \pm 1), \tag{11}$$

ただし $n = 2$ のときは $(s_is_{i\pm1})^3 = 1$ はみたさない.

(2) $s, k \in \mathbb{N}$ に対して, s_i $(1 \leq i \leq n)$ は $\partial_{s,k}$ と可換である.

すなわち前節で構成した Lax 方程式は $A_{n-1}^{(1)}$ 型のアフィン Weyl 群対称性を持つ.

3.3 Hamiltonians

$g(z) \in \mathcal{K}_{m,n}[z, z^{-1}]$ に対して g_i を z^i の係数とする.

Definition 6 *(Hamiltonians)* $s, k \in \mathbb{N}$ に対して, $H_{s,k} \in \mathcal{K}_{m,n}$ を次式で定める.

$$H_{s,k} = \frac{\operatorname{tr}\left(M^{k+1}\right)_s}{k+1}. \tag{12}$$

$m = 2$, $n = 3$, $s = 1$, $k = 2$ のとき

$$H_{1,2} = \operatorname{tr}\left(\frac{M^3}{3}\right)_1 = \frac{1}{3}\left(f_{1,2}f_{2,3}f_{3,4} + f_{2,3}f_{3,4}f_{1,2} + f_{3,4}f_{1,2}f_{2,3}\right)$$
$$+ \epsilon_1(f_{1,2} + f_{3,4}) + \epsilon_2(f_{2,3} + f_{1,2}) + \epsilon_3(f_{3,4} + f_{2,3}).$$

$H_{1,2}$ は量子 $\mathrm{P_{IV}}$ のハミルトニアンである [1].

$r \in \mathbb{N}$ に対して, $\bar{r}$ $(0 \leq \bar{r} \leq m-1)$ を m で割ったあまりとする. 集合 $A_{m,n}$ を次で定める.

$$A_{m,n} = \left\{ (s,k) \in \mathbb{N}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} ns = mk \\ \text{or} \\ mk > ns > m(k-1), \quad \overline{ns} \geq \overline{n}, \overline{2n}, \ldots, \overline{n(s-1)} \end{array} \right\}. \tag{13}$$

Theorem 7 $(s,k), (s',k') \in A_{m,n}$ であればこのとき次が成立する.

$$\frac{1}{h}[H_{s,k}, M] = [M, B_{s,k}], \tag{14}$$

$$[H_{s,k}, H_{s',k'}] = 0. \tag{15}$$

対応する古典系では任意の (s,k) に対して上の定理 (に対応する命題で交換子はポワソン括弧となる) は成り立つ.

参考文献

[1] Nagoya, H.: Quantum Painlevé Systems of Type of $A_l^{(1)}$, Int. J. Math. **15** (2004), no. 10, 1007–1031

[2] Nagoya, H.: Quantum Painlevé Systems of Type $A_{n-1}^{(1)}$ with higher degree Lax operators, preprint

ON THE COLORED JONES POLYNOMIAL AND THE VOLUME CONJECTURE

KOJI OHNUKI

The colored Jones polynomial is one of link invariants which includes the Jones polynomial. It is obtained from the quantum group $\mathcal{U}_q(sl_2)$ and it's irreducible representation.

Let L be an m-component oriented link and N_i $(i = 1, \ldots, m)$ be a positive integer. We can calculate the colored Jones polynomial of L denoted by $J_{\{N_1,\ldots,N_m\}}(L;q)$ as follows. First we associate the i-th component of L with the positive integer N_i and present L into a (1,1)-tangle T by cutting a component. Next we label each edge of T in the component associated with N_i an element in $\{0, 1, \ldots, N_i - 1\}$. Here two edges containing end points of T are labeled 0. (Figure 1)

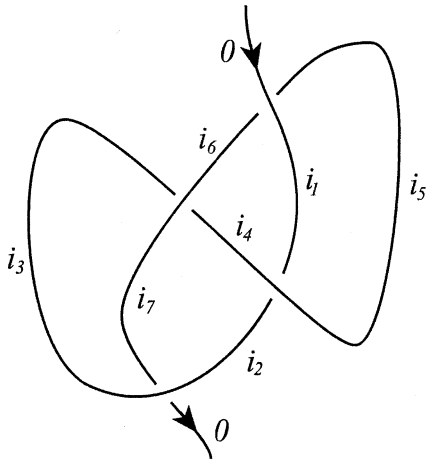
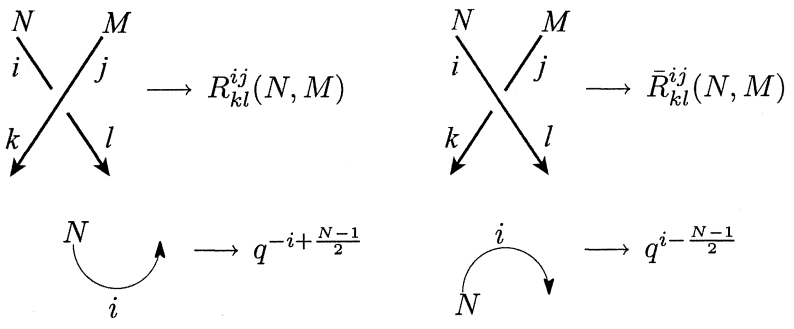


FIGURE 1. (1,1)-tangle decomposition of the figure-eight knot 4_1.

Next We assign each crossing and each edge containing a local maximal point or minimal point to some values as follows.



Here $R^{ij}_{kl}(N,M)$ and $\bar{R}^{ij}_{kl}(N,M)$ are given by

$$\begin{aligned} R^{ij}_{kl}(N,M) &= \sum_{n=0}^{\min\{j,M-1-j\}} \delta_{l,i+n}\delta_{k,j-n}\,(-1)^n \frac{(q)_{i+n}(q)_{M-1+n-j}}{(q)_n(q)_i(q)_{M-1-j}} \\ &\qquad \times q^{-\frac{n^2}{2}-n\left(\frac{N+M}{4}+i-j\right)+\left(i-\frac{N-1}{2}\right)\left(j-\frac{M-1}{2}\right)}, \\ \bar{R}^{ij}_{kl}(N,M) &= \sum_{n=0}^{\min\{i,N-1-i\}} \delta_{l,i-n}\delta_{k,j+n} \frac{(q)_{j+n}(q)_{M-1+n-i}}{(q)_n(q)_j(q)_{M-1-i}} \\ &\qquad \times q^{\frac{-3N+M+2}{4}n-\left(i-\frac{N-1}{2}\right)\left(j-\frac{M-1}{2}\right)}, \end{aligned}$$

where $(q)_n = \prod_{k=1}^{n}(1-q)^k$. After multiplying all elements obtained from T as above we sum over all indices. Then we have $J_{\{N_1,\ldots,N_m\}}(L;q)$.

For example the colored Jones polynomial of the figure-eight knot is

$$\begin{aligned} J_N(4_1;q) &= \sum_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5,i_6,i_7=0}^{N-1} \bar{R}^{0i_5}_{i_6i_1}(N,N)R^{i_3i_6}_{i_7i_4}(N,N)\bar{R}^{i_4i_1}_{i_2i_5}(N,N)R^{i_7i_2}_{i_30}(N,N)\,q^{i_3-i_5} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} q^{iN}\prod_{k=1}^{i}(1-q^{-N+k})(1-q^{-N-k})\,. \end{aligned}$$

If all components are colored by 2 then the colored Jones polynomial coincides with the Jones polynomial. (see [9])

We have no explicit geometric interpretation of the quantum invariant but the volume conjecture implies some relation between the colored Jones polynomial and the geometric invariant of knot exterior. R. Kashaev defined certain link invariants by constructing the R-matrix and he conjectured in [3] that for hyperbolic knots the asymptotic behavior of his link invariant determines their hyperbolic volumes. H. Murakami and J. Murakami proved in [7] that Kashaev's invariant coincides with the N colored Jones polynomial evaluated at $\exp(2\pi\sqrt{-1}/N)$ which is also coincides with the Akutsu-Deguchi-Ohtsuki invariant, and they generalized Kashaev's conjecture to the volume conjecture.

Let $J_N(L;q)$ be the colored Jones polynomial of a link L whose all components are colored by N and it is normalized such that the value of the trivial knot is 1. Then the volume conjecture is described as follows.

Conjecture 1. *Let K be a knot in the three-sphere S^3. Then*

$$2\pi \lim_{N\to\infty} \frac{\log|J_N(K;\exp(2\pi\sqrt{-1}/N))|}{N} = v_3||S^3-K||,$$

where $||S^3-K||$ is the simplicial volume of S^3-K and v_3 is the volume of the ideal regular tetrahedron. If K is a hyperbolic knot which means its complement admits the hyperbolic structure, then $v_3||S^3-K||$ is equal to the hyperbolic volume of S^3-K.

This conjecture holds for the figure-eight knot, torus knots [4] and the Borromean rings [1]. Also the relation between Kashaev's R-matrix and the geometric structure of the knot exterior was considered in [10]. Recently we considered some generarization of the volume conjecture. We expect that the asymptotic behavior of the colored Jones polynomial evaluated at $\exp(2\pi\alpha\sqrt{-1}/N)$ determines the

some geometric invariant of 3-manifolds obtained from the knot. In fact for the figure-eight knot it was proved in [6] that the asymptotic behavior of the colored Jones polynomial evaluated at $\exp(2\pi r\sqrt{-1}/N)$ for a real number r determines the volume of the cone-manifold with singularity along the figure-eight knot. Moreover it was proved in [8] that the asymptotic behavior of the colored Jones polynomial of the figure-eight knot evaluated at $\exp(2\pi\alpha\sqrt{-1}/N)$ for complex number α determines the Neumann-Zagier function.

We consider the colored Jones polynomial of the Borromean rings B evaluated at $\exp(2\pi r\sqrt{-1}/N)$ for a fixed real number r. Let $\Lambda(z)$ be the Lobachevsky function defined as $\Lambda(z) = -\int_0^z \log|2\sin t|dt$. We define two functions $V_1(r)$ and $V_2(r)$ as follows.

$$\begin{aligned} V_1(r) &= 2\left(3(\Lambda(\pi r+\theta)-\Lambda(\pi r-\theta))-4\Lambda(\theta+\pi/2)-2\Lambda(\theta)\right), \\ V_2(r) &= 2\left(-3(\Lambda(\psi+\pi r)+\Lambda(\psi-\pi r))+4\Lambda(\psi+\pi/2)+2\Lambda(\psi)\right), \end{aligned}$$

where $\theta = \theta(r)$ and $\psi = \psi(r)$, $0 < \theta, \psi < \frac{\pi}{2}$ are principal parameters defined by conditions

$$\begin{aligned} &T = \tan\theta,\ T^4 - (3\tan^2(\pi r)+1)T^2 - \tan^6(\pi r) = 0, \\ &T' = \tan^2\psi, \\ &T'^3 - 3\tan^2(\pi r)T'^2 + (\tan^6(\pi r)+6\tan^4(\pi r)+3\tan^2(\pi r)+1)T' - \tan^6(\pi r) = 0. \end{aligned}$$

Let r_1 and r_2 be solutions of the equation $V_1(r) = V_2(r)$ and $0 < r_1 < r_2 < 1$. Then we have the following theorem.

Theorem 2. *Let r be the irrational number satisfying $r_2 < r < 1 + r_1$. Then*

$$2\pi \lim_{N\to\infty} \frac{\log\left|J_N(B;\exp(2\pi r\sqrt{-1}/N))\right|}{N} = \frac{1}{r}V_1(r).$$

Here $V_1(r)$ coincides with the hyperbolic volume of the cone manifold whose underlying space is the three-sphere and whose singular set consists of three components of the Borromean rings with cone angles $2\pi|1-r|$, $2\pi|1-r|$ and $2\pi|1-r|$.[5]

Next we consider some extension of this theorem. We denote $J_{\{N_1,N_2,N_3\}}(B;q)$ by the colored Jones polynomial of B whose components are colored by N_1, N_2 and N_3. We consider $J_{\{N,aN,bN\}}(B;q)$ for positive integer a and b. By some numerical computation we can see that the asymptotic behavior of $J_{\{N,aN,bN\}}(B;q)$ also determine the volume of the cone manifold with cone angles $2\pi|1-r|$, $2\pi|1-ar|$ and $2\pi|1-br|$.

References

[1] S. Garoufalidis and TTQ. Le, *On the volume conjecture for small angles* , preprint, Math.GT/0502163.

[2] K. Habiro, *On the colored Jones polynomials of some simple links*, Recent progress towards the volume conjecture (Japanese) (Kyoto, 2000). Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No. 1172 (2000), 34–43.

[3] R. M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys. 39 (1997), no. 3, 269–275.

[4] R. M. Kashaev and O. Tirkkonen, *Proof of the volume conjecture for torus knots*, J. Math. Sci. 115(2003), 2033-2036.

[5] A. D. Mednykh, *On hyperbolic and spherical volumes for knot and link cone-manifolds*, Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds (Warwick, 2001), 145–163, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 299, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[6] H. Murakami, *Some limits of the colored Jones polynomials of the figure-eight knot*, Kyungpook Math. J. 44 (2004), no. 3, 369–383.
[7] H. Murakami and J. Murakami, *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot*, Acta Math. 186 (2001), no. 1, 85–104.
[8] H. Murakami and Y. Yokota, *The colored Jones polynomials of the figure-eight knot and its Dehn surgery spaces,* arXiv:math.GT/0401084.
[9] T. Ohtsuki, *Quantum invariants, A study of knots and 3-manifolds, and their sets,* World Scientific Publishing, 2002.
[10] Y. Yokota, *On the volume conjecture for hyperbolic knots*, preprint.

Department of Mathematical Science, School of Science and Engineering, Waseda University, 3-4-1 Okubo Shinjuku-ku Tokyo, 169-8555, Japan
E-mail address: ohnuki@toki.waseda.jp

The stability of Coxeter type arrangements

Takuro Abe

0 Introduction

A *hyperplane arrangement* (or simply an *arrangement*) is a finite collection of affine hyperplanes in a fixed vector space V over a field $\mathbb{K}$. This is a very simple geometric object, but there are a lot of interesting problems on arrangements. Especially, one of the most interesting problems is that called Terao conjecture, which asserts some algebraic structure associated to an arrangement depends only on the combinatorial characterization of the arrangement. In this abstract, we introduce some basic definitions, results and concepts of the hyperplane arrangement theory to explain what Terao conjecture is. Moreover, we show the results on the stability of some arrangements which give a new way to consider Terao conjecture.

1 Hyperplane arrangements

In this section we introduce some elementary definitions and results on hyperplane arrangements, for which we refer the reader to [OT].

1.1 General Definition

Let $\mathbb{K}$ be a field of any characteristic and V be an l-dimensional vector space over $\mathbb{K}$. A *hyperplane arrangement* $\mathcal{A}$ is a finite collection of affine hyperplanes in V. We say an arrangement $\mathcal{A}$ is *central* if each hyperplane $H \in \mathcal{A}$ is a vector subspace of V, and *essential* if $\bigcap_{H\in\mathcal{A}} H$ is the origin. An arrangement in an l-dimensional vector space is called an *l-arrangement*.

1.2 Combinatorics of arrangements

We define two polynomials associated to an arrangement, which contain a lot of information of arrangements and its complements. To define them, we introduce the *intersection lattice* of an arrangement.

Definition 1.1
Let $\mathcal{A}$ be an arrangement in a fixed vector space V of dimension l. The intersection lattice $L(\mathcal{A})$ of $\mathcal{A}$ is defined by

$$L(\mathcal{A}) := \{\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H \neq \emptyset \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\},$$

where we agree $\bigcap_{H\in\mathcal{B}} H = V$ when $\mathcal{B} = \emptyset$.

The intersection lattice contains all the combinatorial information of an arrangement. We introduce the partial order in $L(\mathcal{A})$ by the following manner:

$$\text{For } X,\ Y \in L(\mathcal{A}),\ X \geq Y \iff X \subseteq Y.$$

Next we introduce the Möbius function on $L(\mathcal{A})$.

Definition 1.2
For an arrangement $\mathcal{A}$ and its intersection lattice $L(\mathcal{A})$, the Möbius function μ from $L(\mathcal{A})$ to $\mathbb{Z}$ is defined as follows:

$$\begin{aligned} \mu(V) &= 1, \\ \sum_{V\leq Y\leq X} \mu(Y) &= 0 \text{ for } V \neq X \in L(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

By using these concepts, we can define two important polynomials.

Definition 1.3
The characteristic polynomial of an l-arrangement $\mathcal{A}$ is defined by

$$\chi(\mathcal{A}, t) := \sum_{X\in L(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim X},$$

and the Poincaré polynomial $\pi(\mathcal{A}, t)$ by

$$\pi(\mathcal{A}, t) := \sum_{X\in L(\mathcal{A})} \mu(X)(-t)^{\operatorname{codim} X}.$$

It is obvious that

$$\chi(\mathcal{A},\ t) = t^l \pi(\mathcal{A},\ -1/t).$$

There are a lot of interesting relations between these polynomials and algebra, topology of arrangements. For example, we can see the number of chambers as follows:

Theorem 1.1 (Zaslavsky)
Let $\mathbb{K}$ be a real number field, $\mathcal{A}$ be an arrangement and $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ be the set of chambers in $V \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{A}} H$. Then

$$\sharp\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \pi(\mathcal{A}, 1).$$

1.3 Logarithmic vector fields

Now we define the module of logarithmic vector fields which we are the most interested in. Let $\{X_1, \ldots, X_l\}$ be a basis for the dual vector space V^*, S be a symmetric algebra of V^* (hence $S \simeq \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_l]$) and $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(S)$ be the set of $\mathbb{K}$-linear derivations of S. For an arrangement $\mathcal{A}$ and each hyperplane $H \in \mathcal{A}$, fix an element $\alpha_H \in S$ such that $\ker(\alpha_H) = H$.

Definition 1.4
For an arrangement $\mathcal{A}$, an S-module $D(\mathcal{A})$ is defined by

$$D(\mathcal{A}) := \{\theta \in Der_{\mathbb{K}}(S) \mid \theta(\alpha_H) \in S \cdot \alpha_H \ (\forall H \in \mathcal{A})\}.$$

Roughly speaking, $D(\mathcal{A})$ consists of the vector fields tangent to hyperplanes in $\mathcal{A}$. We want to consider the structure of this module. Here we introduce an example of interesting structures of $D(\mathcal{A})$ determined by the combinatorics. We say $\mathcal{A}$ is *free* if $D(\mathcal{A})$ is a free S-module. If $\mathcal{A}$ is free with a homogeneous basis $\theta_1, \ldots, \theta_l \in D(\mathcal{A})$, then the *exponents* of $\mathcal{A}$ are defined by $(\deg(\theta_1), \ldots, \deg(\theta_l))$, where $\deg(\theta_i) := \deg(\theta_i(\alpha_i))$ for some linear form α_i with $\theta_i(\alpha_i) \neq 0$. It is easy to see the exponents of a free arrangement do not depend on the choice of bases. For a free arrangement, its combinatorics and the structure of $D(\mathcal{A})$ are related as follows:

Theorem 1.2 (Terao's factorization)
For a free arrangement $\mathcal{A}$ with exponents $(d_1, \ldots, d_l)$, it holds that

$$\chi(\mathcal{A}, t) = \prod_{i=1}^{l}(t - d_i).$$

In particular, this theorem shows the degrees of a basis of a free arrangement depend only on its combinatorics. One of the most important problems related with the logarithmic vector fields is the following conjecture due to Terao, which is on the relation between the freeness and the combinatorics.

Conjecture 1.1 (Terao)
A freeness of an arrangement depends only on its combinatorics.

2 Stability of arrangements and main results

2.1 Main theorem

In this section we assume all arrangements are non-empty and central. Then it is obvious that

$$\theta_E := \sum_{i=1}^{l} X_i \frac{\partial}{\partial X_i} \in D(\mathcal{A}).$$

Define

$$\begin{aligned} D_0(\mathcal{A}) : &= D(\mathcal{A})/S \cdot \theta_E, \text{ and} \\ E(\mathcal{A}) : &= \widetilde{D_0(\mathcal{A})}. \end{aligned}$$

It is known that $E(\mathcal{A})$ is a rank $l-1$ reflexive sheaf on $\mathbf{P}(V) \simeq \mathbf{P}_{\mathbb{K}}^{l-1}$, where we say a torsion free sheaf on the projective space is *reflexive* if $E \simeq E^{**}$. From now on, we assume $l = 3$ and $\mathbb{K}$ is an algebraically closed field of characteristic zero. In this case $E(\mathcal{A})$ is a rank two vector bundle on $\mathbf{P}^2$. Recently instead of $D(\mathcal{A})$ the sheaf $E(\mathcal{A})$ is studied by using algebraic geometry and such studies give a new insight into the arrangement theory. In this section we consider the stability of $E(\mathcal{A})$, where the stability of torsion free sheaves is defined as follows:

Definition 2.1
A torsion free sheaf E on $\mathbf{P}^{l-1}$ is said to be stable if for any subsheaf $F \subset E$ with $0 < \operatorname{rank}(F) < \operatorname{rank}(E)$, it holds that

$$\frac{c_1(F)}{\operatorname{rank}(F)} < \frac{c_1(E)}{\operatorname{rank}(E)}.$$

Moreover, we say an l-arrangement is stable if $E(\mathcal{A})$ is stable on $\mathbf{P}(V)$.

To apply algebraic geometry it is important to consider the stability of $E(\mathcal{A})$, since the stability enables us, for example, to use the Beilinson's monad and so on. However, there are few studies on the stability of arrangements, e.g., those which are normal crossing. We consider the stability of arrangements which are not normal crossing, especially that of a family of rank two vector bundles $E(\mathcal{A}(k))$ for families of 3-arrangements $\{\mathcal{A}(k)\}$ defined as follows:

Definition 2.2
A family of arrangements $\{\mathcal{A}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}_{>0}}$ *is called a family of* A_2*-type arrangements if each* $\mathcal{A}(k)$ *is defined as follows:*

$$\begin{aligned} X &= (-k+1)Z, \ldots, (k+c-1)Z \ (c \geq 0), \\ X &= (-k+1)Z, \ldots, (k+f-1)Z \ (f \geq 0), \\ Y+X &= (-k+a)Z, \ldots, (k+a+b-1)Z \ (b \geq -1), \\ Z &= 0, \end{aligned}$$

here $a, b, c, f \in \mathbb{Z}$.

When $(a, b, c, f) = (1, -1, 0, 0)$ and $k = 1$ this is the coning of the Coxeter arrangement of type A_2. Hence we call this a family of A_2-type arrangements, and by the same way, we can define arrangements of other Coxeter types, e.g., a family of B_2-type arrangements. The main theorem is the complete classification of families of A_2-type arrangements from the view point of the freeness and stability.

Theorem 2.1
Let $\{\mathcal{A}(k)\}$ *be a family of* A_2*-type arrangements defined in Definition 2.2. By the induction and the proper choice of coordinates, we may assume* $f = 0$ *or* 1. *Let us put* $N := 2a + b - c - f$. *Then the following hold:*

(a) *For* $k \gg 0$, $\mathcal{A}(k)$ *is free if and only if* $N = 0,\ 1,\ 2$.

(b) *For* $k \gg 0$, $\mathcal{A}(k)$ *is stable if and only if* $N > 2$ *or* $N < 0$.

In particular, Theorem 2.1 shows the stability and the freeness of the family of A_2-type arrangements are determined by the combinatorics (more precisely, by the characteristic polynomials). We can show the similar results for the family of B_2-type arrangements, and these pose the problem whether the stability of arrangements (especially those of 3-arrangements) are determined by the combinatorics or not. As an application of Theorem 2.1, we give a partial answer to some problem on the relation between the combinatorics and geometry of A_2-type arrangements.

References

[OT] P. Orlik and H. Terao, Arrangements of hyperplanes. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

TWISTED TORIC STRUCTURE

TAKAHIKO YOSHIDA

1. Introduction

By Delzant's classification theorem [3], there is a one-to-one correspondence between a symplectic toric manifold which is one of the special objects in the theory of Hamiltonian torus actions and a Delzant polytope which is a combinatorial object. Through this correspondence, various researches on the relationship between symplectic geometry, transformation groups, topology with combinatorics have been done [2, 3, 4].

On the other hand, there exists a manifold which is locally diffeomorphic to a symplectic toric manifold and whose local structures are patched together in certain sense. In this talk, as a formulation of such manifolds, we shall introduce the notion of twisted toric manifolds and generalize Delzant's classification theorem to them. Recently, some generalizations are also considered [7, 8, 9, 10, 11]. In general, a twisted toric manifold no longer has a global torus action like that of a original symplectic toric manifold, but it has a local torus action, i.e. a torus action on a neighborhood of any point and they are patched together in certain sense. One of our motivation is to generalize the topological theory of transformation group to such a "*twisted group action*" case. The content of this talk is a part of the paper [12]. We have no time to describe the topology of twisted toric manifolds in this talk. For the topology of twisted toric manifolds, see [12].

This abstract is organized as follows. In Section 2, we recall Hamiltonian torus action and symplectic toric manifolds. Then we shall give the definition of the twisted toric manifold and some examples in Section 3. Section 4 is devoted to the classification of twisted toric manifolds.

In this talk, all manifolds are assumed to be oriented, and all maps are assumed to preserve orientations, unless otherwise stated. For simplicity, we shall consider only for the four-dimensional case, but all arguments in this talk go well for general even dimensional cases.

2. Symplectic toric manifold

A four-dimensional *symplectic manifold* (X, ω) is a smooth four-dimensional manifold equipped with a non-degenerate closed 2-form ω. Let a k-dimensional torus T^k act on X which preserves ω. In this paper, we identify T^k with $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$. and the Lie algebra $\mathfrak{t}$ of T^k with $\mathbb{R}^k$.

Definition 2.1 ([2, 6]). The T^k action is called *Hamiltonian, if there is a moment map which is the map* $\mu : X \to \mathbb{R}^k$ *satisfying the following two conditions*

(1) $\iota(v_\xi)\omega = d\langle \mu, \xi \rangle$

(2) $\mu(\theta \cdot x) = \mu(x)$

The author is supported by Research Fellowship of the Japan Society for the Promotion of Science for Young Scientists.

for $\xi \in \mathfrak{t}$, $x \in X$, and $\theta \in T^k$, where v_ξ is the infinitesimal action, i.e. the vector field which is defined by

$$v_\xi(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{2\pi\sqrt{-1}t\xi} \cdot x,$$

and $\langle , \rangle$ is the natural inner product on $\mathbb{R}^k$. Note that a moment map of a T^k-action is determined up to additive constant.

Example 2.2. Consider the two-dimensional complex vector space $\mathbb{C}^2$ with the symplectic form $\omega_{\mathbb{C}^2} = -\dfrac{\sqrt{-1}}{2\pi}\displaystyle\sum_{i=1}^{2} dz_i \wedge d\bar{z}_i$. T^2 acts on $\mathbb{C}^2$ by $\theta \cdot z = (e^{2\pi\sqrt{-1}\theta_i} z_i)$ for $\theta = (\theta_i) \in T^2$ and $z = (z_i) \in \mathbb{C}^2$. This action is Hamiltonian and a moment map $\mu_{\mathbb{C}^n} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^2$ is defined by $\mu_{\mathbb{C}^2}(z) = (|z_i|^2)$.

In the rest of this talk, all manifolds are assumed to be compact and connected. The following fact is fundamental for the theory of Hamiltonian T^k-actions.

Theorem 2.3 ([4]). *If T^k acts effectively on a four-dimensional symplectic manifold (X, ω) in a Hamiltonian fashion, then $k \leq 2$.*

In particular, in the maximal case of Theorem 2.3, i.e. $k = 2$, a compact, connected four-dimensional symplectic manifold (X, ω) equipped with an effective Hamiltonian T^2-action is called a four-dimensional *symplectic toric manifold.* Symplectic toric manifolds are classified with its moment map image.

Theorem 2.4 ([3]). (1) *The image $\Delta = \mu(X)$ of the moment map of a symplectic toric manifold is Delzant polytope. (For Delzant polytope, see Remark 2.5.)*
(2) *By associating the image of a moment map to a symplectic toric manifold, the set of equivariantly symplectomorphism classes of four-dimensional symplectic toric manifolds corresponds one-to-one to the set of Delzant polytopes in $\mathbb{R}^2$ up to parallel transport in $\mathbb{R}^2$.*

Remark 2.5. (1) In general, it is well known that the image of a moment map of a Hamiltonian torus action on a compact, connected symplectic manifold is the convex hull of the images of the fixed points. See [1, 5].
(2) Let $u_1, \cdots, u_d \in \mathbb{Z}^2$ and $\lambda_1, \cdots, \lambda_d \in \mathbb{R}$. A convex polytope Δ in $\mathbb{R}^2$ defined by

$$\Delta = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \colon \langle \xi, u_i \rangle \geq \lambda_i \ (i = 1, \cdots, d)\}$$

is called *Delzant*, if Δ is compact and for each vertex $v \in \Delta$,

(i) v is defined by exactly 2-equalities $\langle v, u_{i_a} \rangle = \lambda_{i_a}$ $(a = 1, 2)$
(ii) $\{u_{i_1}, u_{i_2}\}$ in (i) spans $\mathbb{Z}^2$.

For more details, see [3].
(3) Theorem 2.4 says the symplectic toric manifold X_Δ associated with a Delzant polytope $\Delta \in \mathbb{R}^2$ is recovered from Δ. As a topological set, X_Δ is obtained as the quotient space $X_\Delta = \Delta \times T^2 / \sim$ of the trivial T^2-bundle on Δ by the equivalent relation $\sim$ which is defined as follows. Two elements (ξ, θ) and (ξ', θ') are equivalent, or $(\xi, \theta) \sim (\xi', \theta')$, if and only if $\xi' = \xi$ and

$$\begin{cases} \theta' = \theta & \text{if } \xi \text{ is in the interior of } \Delta \\ \theta' - \theta \in S^1_{u_i} & \text{if } \xi \text{ is in an edge } \{\langle \xi, u_i \rangle = \lambda_i\} \text{ of } \Delta \\ \xi \text{ is a vertex of } \Delta. \end{cases}$$

where $S^1_{u_i}$ is the sub-circle of T^2 generated by u_i.
(4) Locally, symplectic toric manifold is equivariantly symplectomorphic to the Hamiltonian T^2-action on $\mathbb{C}^2$ in Example 2.2. More precisely, for any $\xi \in \Delta$, there exist an open neighborhood U of ξ in Δ, an open set U' in the first quadrant

$\mathbb{R}^2_{\geq 0} = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \colon \xi_i \geq 0 \ i = 1, 2\}$, an equivariant symplectomorphism $\varphi : \mu^{-1}(U) \to \mu^{-1}_{\mathbb{C}^2}(U')$, and a diffeomorphism $\phi : U \to U'$ such that the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccccc} X \supset & \mu^{-1}(U) & \overset{\varphi}{\cong} & \mu^{-1}_{\mathbb{C}^2}(U') & \subset \mathbb{C}^2 \\ \mu \downarrow & \mu \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \mu_{\mathbb{C}^2} & \downarrow \mu_{\mathbb{C}^2} \\ \Delta \supset & U & \overset{\phi}{\cong} & U' & \subset \mathbb{R}^2_{\geq 0}. \end{array}$$

3. TWISTED TORIC MANIFOLD

By the topological construction, a four-dimensional symplectic toric manifold X_Δ is obtained from the trivial T^2-bundle on the Delzant polytope Δ by collapsing fibers on each edge $\{\xi \in \Delta \colon \langle u_i, \xi \rangle = \lambda_i\}$ by the circle subgroup $S^1_{u_i}$ generated by u_i. By replacing the trivial T^2-bundle on Δ to a fiber bundle with fiber T^2 on a surface with corners, we can obtain the notion of four-dimensional twisted toric manifolds.

Let B be a surface with corners, $\pi_P : P \to B$ a principal $SL_2(\mathbb{Z})$-bundle, and the associated T^2-bundle and $\mathbb{Z}^2$-bundle of P with respect to the natural action of $SL_2(\mathbb{Z})$ on T^2 and on $\mathbb{Z}^2$ are denoted by $\pi_T : T^2_P \to B$ and $\pi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}^2_P \to B$, respectively. Consider a four-dimensional manifold X, surjective maps $\nu : T^2_P \to X$ and $\mu : X \to B$ such that the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} T^2_P & \xrightarrow{\nu} & X \ . \\ & {\scriptstyle \pi_T} \searrow \quad \circlearrowleft \quad \swarrow {\scriptstyle \mu} & \\ & B & \end{array}$$

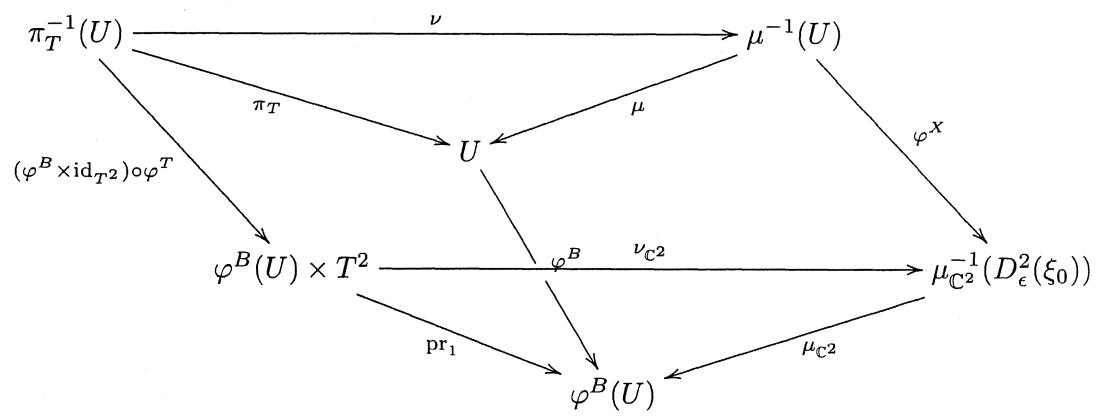
Definition 3.1. The above tuple $\{X, \nu, \mu\}$ is called a four-dimensional *twisted toric manifold associated with the principal* $SL_2(\mathbb{Z})$*-bundle* $\pi_P : P \to B$ (or if there are no confusions, we call simply X a twisted toric manifold), if for arbitrary $b \in B$, there exist

(i) (U, φ^B):coordinate neighborhood of $b \in B$, i.e. U is an open neighborhood of b in B and φ^B is a diffeomorphism from U to $\mathbb{R}^2_{\geq 0} \cap D^2_\epsilon(\xi_0)$ which sends b to ξ_0, where $D^2_\epsilon(\xi_0) = \{\xi \in \mathbb{R}^2 \colon \|\xi - \xi_0\| < \epsilon\}$

(ii) $\varphi^P : \pi_P^{-1}(U) \cong U \times SL_2(\mathbb{Z})$:local trivialization of P (then φ^P induces the local trivializations $\varphi^T : \pi_T^{-1}(U) \cong U \times T^2$ and $\varphi^{\mathbb{Z}} : \pi_{\mathbb{Z}}^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{Z}^2$ of T^n_P and $\mathbb{Z}^n_P$, respectively)

(iii) $\varphi^X : \mu^{-1}(U) \cong \mu^{-1}_{\mathbb{C}^2}(D^2_\epsilon(\xi_0))$:diffeomorphism

such that the following diagram commutes



where $\mu_{\mathbb{C}^2}$ is the moment map of T^2-action on $\mathbb{C}^2$ in Example 2.2 and $\nu_{\mathbb{C}^2}$ is the map which is defined by

$$\nu_{\mathbb{C}^2}(\xi, \theta) = (\sqrt{\xi_i} e^{2\pi\sqrt{-1}\theta_i}). \tag{3.1}$$

The tuple $(U, \varphi^P, \varphi^X, \varphi^B)$ is called a *locally toric chart.*

Remark 3.2. We do not assume that X has a symplectic structure, in certain sense, compatible with a twisted toric structure. It seems too strong condition. See [12].

Example 3.3 (Torus bundle)**.** Let $\pi_P : P \to B$ be a principal $SL_2(\mathbb{Z})$-bundle on a closed surface B. Then the associated T^2-bundle $\pi_T : T^2_P \to B$ itself is an example of a twisted toric manifold associated with $\pi_P : P \to B$. In particular, the four-dimensional torus T^4 is a twisted toric manifold, which is a T^2-bundle on T^2.

Example 3.4 (Symplectic toric manifold)**.** A four-dimensional symplectic toric manifold X with Delzant polytope Δ has a twisted toric structure associated with the trivial $SL_2(\mathbb{Z})$-bundle on Δ.

Example 3.5. $S^1 \times S^3$ has a twisted toric structure associated with the trivial $SL_2(\mathbb{Z})$-bundle on a two-dimensional unit disc. For more details, see [12].

Example 3.6. The four-dimensional sphere S^4 has a twisted toric structure associated with the trivial $SL_2(\mathbb{Z})$-bundle on a two-dimensional disc with two corner points (the shape of leaf). For more details, see [12].

We also have another interesting examples associated with non trivial $SL_2(\mathbb{Z})$-bundles on a surface with corners, see [12] for more details.

4. Classification

In this section, we shall prove the classification theorem for twisted toric manifolds. Let $\mathcal{S}^{(0)}B$ be the set of corner points, $\mathcal{S}^{(1)}B = \partial B \backslash \mathcal{S}^{(0)}B$, and $\mathcal{S}^{(2)}B = B \backslash \partial B$. $\{\mathcal{S}^{(k)}B\}$ defines the natural stratification of B. Let $\pi_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathcal{S}^{(1)}B$ be a rank one sub-lattice bundle of the restriction $\pi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}^2_P\big|_{\mathcal{S}^{(1)}B} \to \mathcal{S}^{(1)}B$ of the lattice bundle $\pi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}^2_P \to B$.

Definition 4.1. $\pi_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathcal{S}^{(1)}B$ is **primitive**, if for arbitrary $b \in B$ included in $\mathcal{S}^{(k)}B$, there exist

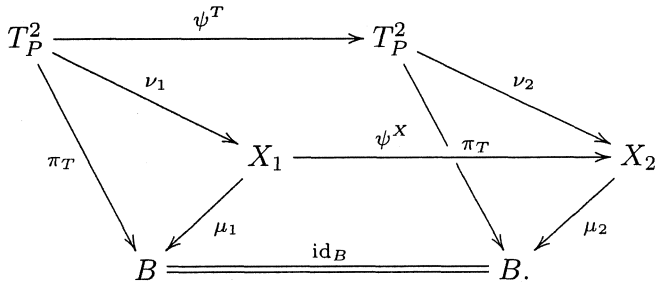
(i) $U(\subset B)$: a locally toric chart whose intersection $U \cap \mathcal{S}^{(1)}B$ with $\mathcal{S}^{(1)}B$ has exactly $2-k$ connected components
(ii) $\{u_1, \cdots, u_{2-k}\} \subset \mathbb{Z}^2$: a *primitive* tuple of vectors, i.e. they generate over $\mathbb{Z}$ a rank $(2-k)$ direct summand of $\mathbb{Z}^2$

such that for $j = 1, \cdots, 2-k$, the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{Z}^2_P\big|_U & \overset{\varphi^{\mathbb{Z}}}{\cong} & U \times \mathbb{Z}^2 \\
\cup & \circlearrowleft & \cup \\
\mathbb{Z}^2_P\big|_{(U\cap \mathcal{S}^{(1)}B)_j} & \cong & \left(U \cap \mathcal{S}^{(1)}B\right)_j \times \mathbb{Z}^2 \\
\cup & \circlearrowleft & \cup \\
\mathcal{L}\big|_{(U\cap \mathcal{S}^{(1)}B)_j} & \cong & \left(U \cap \mathcal{S}^{(1)}B\right)_j \times \mathbb{Z}u_j.
\end{array}$$

Remark 4.2. (1) Definition 4.1 does not depend on the choice of a locally toric chart U, since the notion of primitivity is invariant under the action of $SL_2(\mathbb{Z})$.
(2) The automorphism group $\mathrm{Aut}(P)$ of P acts on the set of primitive rank one sublattice bundles of $\pi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}^2_P\big|_{\mathcal{S}^{(1)}B} \to \mathcal{S}^{(1)}B$ as the automorphisms of the restriction of the associated lattice bundle $\pi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}^2_P \to B$ to $\mathcal{S}^{(1)}B$.

Definition 4.3. Two twisted toric manifolds $\{X_1, \nu_1, \mu_1\}$ and $\{X_2, \nu_2, \mu_2\}$ associated with $\pi_P : P \to B$ are *isomorphic*, if there exist an automorphism ψ^P of $\pi_P : P \to B$ which covers identity map of B (then ψ^P induces the automorphism ψ^T of $\pi_T : T^2_P \to B$), and a diffeomorphism ψ^X from X to itself such that the following commutes



Fix a principal $SL_2(\mathbb{Z})$-bundle on a surface B with corners.

Theorem 4.4 ([12]). *(1) For any twisted toric manifold $\{X, \nu, \mu\}$ associated with $\pi_P : P \to B$, there is the primitive rank one sub-lattice bundle $\pi_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathcal{S}^{(1)}B$ of $\pi_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}^2_P\big|_{\mathcal{S}^{(1)}B} \to \mathcal{S}^{(1)}B$ which is determined uniquely by $\{X, \nu, \mu\}$. $\pi_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathcal{S}^{(1)}B$ is called a characteristic bundle of $\{X, \nu, \mu\}$.*
(2) By associating the characteristic bundle to a twisted toric manifold, the set of isomorphism classes of twisted toric manifolds associated with $\pi_P : P \to B$ corresponds one-to-one to the set of equivalent classes of primitive rank one sublattice bundles on $\mathcal{S}^{(1)}B$ of $\mathbb{Z}^2_P\big|_{\mathcal{S}^{(1)}B}$ by the action of the automorphism group of P.

References

[1] M.F.Atiyah: *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. 14 (1982), no.1, 1–15.

[2] M.Audin: *Torus acions on symplectic manifolds*, Second revised edition. Progress in Mathematics, 93. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

[3] T.Delzant:*Hamiltoniens périodiques et image convexe de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France 116 (1988), no. 3, 315–339.
[4] V.Guillemin:*Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian T^n-spaces*, Progress in Mathematics, 122. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.
[5] V.Guillemin, S.Sternberg: *Convexity properties and the moment mapping*, Invent. Math. 67 (1982), no.3, 491–513.
[6] V.Guillemin, S.Sternberg: *Symplectic techniques in physics*, Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
[7] A.Hattori, M.Masuda:*Theory of multi-fans*, Osaka J. Math. 40 (2003), no. 1, 1–68.
[8] S.Kaufman:*Delzant-type classification of near-symplectic toric 4-manifolds*, arXiv:math.SG/0505369.
[9] N.C.Leung, M.Symington:*Almost toric symplectic four-manifolds*, arXiv:math.SG/0312165.
[10] M.Symington:*Four dimensions from two in symplectic topology*, In Proceedings of the 2001 Georgia International Topology Conference, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, pages 153–208, 2003.
[11] S.Vũ Ngoc:*Moment polytopes for symplectic manifolds with monodromy*, arXiv:math.SG/0504165.
[12] T.Yoshida:*Twisted toric structure*, in preparation.

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo,
3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914, Japan
e-mail:takahiko@ms.u-tokyo.ac.jp

Hom stacks and Picard stacks

Masao AOKI

1 Introduction

The concept of *algebraic stack* is a generalizations of the concept of scheme, in the same sense that the concept of scheme is a generalization of the concept of variety. The study of algebraic stacks is motivated by problems of moduli. In many moduli problems, the moduli functor we want to study is not representable by a scheme. But if we enlarge the category of schemes, we can construct "moduli stacks", which carries all the information we want.

Moduli stacks are now an important tool in the Gromov-Witten theory. Some people use algebraic stacks to study a variety with quotient singularity, which is approximated by a smooth algebraic stack. Algebraic stacks are also used in the study of non-abelian cohomology and non-abelian Hodge theory.

In the first half of this talk I talk what is algebraic stacks, and why we need them. In the second half I introduce the Hom stacks and the Picard stacks.

2 Algebraic Stacks

2.1 Functor of points – Grothendieck's viewpoint

The origin of algebraic geometry is the study of varieties. A variety is, roughly speaking, the set of zero points of polynomials. However, the set of zero points depends on the field (or ring) in which we consider "zero points". For instance, the set zero points of the polynomial $X^n + Y^n - 1$ is:

- a curve on a plane, if we consider zero points in the field $\mathbb{R}$.
- a Riemann surface of genus $n(n+1)/2$, in $\mathbb{C}$
- a finite set of points, in $\mathbb{Q}$
- a curve and its tangent lines on each point, in the ring $\mathbb{R}[\epsilon]/(\epsilon^2)$

The idea of Grothendieck is to consider the functor which corresponds a ring R with the set of zero points in R, or the set of R-valued points. In the words of schemes, the set of R-valued points of a scheme (or a variety) X is identified with the set of morphisms from $\operatorname{Spec} R$ to X.

Now we have a natural question: when a functor X : (Rings) $\to$ (Sets) is representable by a variety (or a scheme)? No definite condition is known, but there is a consequent:

Theorem (étale descent). *Let X be a scheme and $\{U_i \xrightarrow{p_i} U\}_{i\in I}$ an étale covering of an affine scheme. Then*

- *The map $X(U) \to \prod_i X(U_i)$ is injective.*
- *For any $\{x_i\} \in \prod_i X(U_i)$, there exists $y \in X(U)$ such that $y|_{U_i} = x_i$ $(\forall i \in I)$ if and only if $x_i|_{U_i \times_U U_j} = x_j|_{U_i \times_U U_j}$ $(\forall i, j \in I)$.*

In other words, if we endow the category of affine schemes with étale topology, the functor X is a sheaf.

2.2 Problems of moduli

A moduli space is a space which parametrizes a certain kind of (equivalence classes of) objects, such as curves, surfaces, line bundles and so on. With the viewpoint of Grothendieck, a problem of moduli is formulated as follows. Let F be a functor from (Rings) to (Sets) defined by

$$F(U) = \{\text{objects defined over } U\}.$$

When is the functor F represented by a scheme?

There are some examples of moduli spaces. Let X be a scheme. Under certain conditions, the functors

$$\begin{aligned} \mathrm{Hilb}_X(U) &= \{\text{subschemes of } X \times U, \text{ proper and flat over } U\} \\ \mathrm{Pic}_X(U) &= \{\text{line bundles on } X \times U\}/\text{equivalence relation} \end{aligned}$$

are representable by schemes, namely the Hilbert schemes and the Picard schemes.

Unfortunately, some moduli functors – for example moduli of curves and moduli of vector bundles on a scheme – are not representable by schemes or do not have good properties we want. This is because curves and vector bundles have nontrivial automorphisms and the functor to the category of sets loses informations of automorphisms.

We replace the set of points by the "category (groupoid) of points". A groupoid is a category whose morphisms are all isomorphisms. To give a groupoid of points is equivalent to give a set of points and automorphism groups of each points. A moduli functor is replaced by 2-functors, for example

$$\begin{aligned} \mathscr{M}_g(U) &= \text{the category of stable curves of genus } g \text{ over } U \\ \mathscr{M}_X(U) &= \text{the category of vector bundles on } X \times U \end{aligned}$$

These 2-functors have some good properties so that we can treat them like schemes.

2.3 What are algebraic stacks?

We define two generalizations of schemes – algebraic spaces and algebraic stacks.

Recall the definition of schemes. A scheme is a ringed space (a topological space and a sheaf of rings on it) (X, O_X) which is locally isomorphic to an affine scheme Spec R.

An **algebraic space** is a functor X : (Rings) $\to$ (Sets) which satisfies the following conditions (plus some minor conditions):

- X is a sheaf on the category of affine schemes with étale topology.
- There is an étale surjection $P : X^0 \to X$ from a scheme X^0.

The first condition means that X looks like a ringed space. We can consider sheaves on X and the structural sheaf O_X. The second condition means that X is locally (in étale topology) isomorphic to a scheme.

A 2-functor $\mathscr{X}$: (Rings) $\to$ (groupoids) relates to any ring R the category of R-valued points $\mathscr{X}(R)$ "functorially" in 2-categorical sense. An **algebraic stack (champ algébrique**[1]**)** is a 2-functor $\mathscr{X}$: (Rings) $\to$ (groupoids) which satisfies the following conditions (plus some minor conditions):

- $\mathscr{X}$ satisfies a 2-categorical analogue of the descent condition.
- There is a smooth surjection $P : X^0 \to \mathscr{X}$ from a scheme X^0.

The morphism P is called a presentation of $\mathscr{X}$. If P is étale, $\mathscr{X}$ is called a Deligne-Mumford stack.

The moduli stack of curves $\mathscr{M}_g$ is a Deligne-Mumford stack and the moduli stack of verctor bundles $\mathscr{M}_X$ is an algebraic stack. We can generalize many properties and concepts related to schemes to algebraic stacks.

3 Hom stacks and Picard Stacks

3.1 Picard stacks

We generalize the concept of Picard schemes to algebraic stacks.

Let S be a noetherian noetherian scheme and $\mathscr{X}$ an algebraic stacks over S. The **Picard stack**[2] $\mathscr{P}ic_{\mathscr{X}}$ is a stack over S defined by

$$\mathscr{P}ic_{\mathscr{X}}(U) = \text{ the category of line bundles on } \mathscr{X} \times_S U$$

A line bundle on $\mathscr{X}$ is identified with a $\mathbb{G}_m$-bundle on $\mathscr{X}$. On the other hand, there is an algebraic stack $B\mathbb{G}_m = [S/\mathbb{G}_m]$, whose category of points over U is the category of $\mathbb{G}_m$-bundles over U. So we can identify a line bundle on $\mathscr{X}$ with a morphism from $\mathscr{X}$ to the algebraic stack $B\mathbb{G}_m$.

Thus the representability of Picard stacks follows from that of another kind of stacks — Hom stacks.

---

[1] French

[2] This word may be confusing. Deligne used the word "champ de Picard" for a stack with commutative monoid structure. As we see later, the Picard stack in our sense is an example of "champ de Picard" in Deligne's sense.

3.2 Hom stacks

Let S be a noetherian noetherian scheme and $\mathscr{X}$ and $\mathscr{Y}$ algebraic stacks over S. Suppose that $\mathscr{X}$ and $\mathscr{Y}$ are of finite presentation.

We define the **Hom stack** $\mathscr{HOM}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ as follows:

$$\mathscr{HOM}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})(U) = \mathrm{HOM}(\mathscr{X} \times_S U, \mathscr{Y} \times_S U)$$

The right hand side is the category whose objects are 1-morphisms between algebraic stacks, and whose morphisms are 2-morphisms.

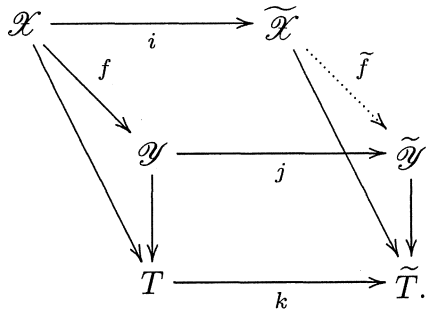
Theorem 1. *If $\mathscr{X}$ is proper and flat over S, then $\mathscr{HOM}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ is an algebraic stack in Artin's sense.*

Corollary 2. *If $\mathscr{X}$ is proper and flat over S, then $\mathscr{Pic}_{\mathscr{X}} = \mathscr{HOM}(\mathscr{X}, B\mathbb{G}_m)$ is an algebraic stack in Artin's sense.*

If $\mathscr{X}$ and $\mathscr{Y}$ are schemes, We can identify a morphism $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ with the graph of f, which is a closed subscheme of $\mathscr{X} \times_S \mathscr{Y}$. Thus the Hom scheme $\mathscr{HOM}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ is identified with a subscheme of the Hilbert scheme $\mathrm{Hilb}_{\mathscr{X} \times_S \mathscr{Y}}$. However, in the case of algebraic stacks, we have no "Hilbert stacks" yet, and the graph of a morphism f is not a closed substack of $\mathscr{X} \times_S \mathscr{Y}$.

To prove Theorem 1 we use the Artin's criterion [Ar]. The key of the proof is the deformation theory of morphisms of algebraic stacks.

Let $\mathscr{X}$ and $\mathscr{Y}$ be algebraic stacks over a noetherian scheme T, $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ a morphism over T. Consider the diagram of solid arrows.



Here i, j and k are closed immersions defined by a square-zero ideals. Then we have the following theorem. This is a generalization of the deformation theory of schemes.

Theorem 3.

1. *There is an obstruction $o \in \mathrm{Ext}^1(Lf^* L_{\mathscr{Y}/T}, I)$, and a deformation $\tilde{f}$ exists if and only if $o = 0$.*
2. *If $o = 0$, then the set of isomorphism classes of f is a torsor under the group $\mathrm{Ext}^0(Lf^* L_{\mathscr{Y}/T}, I)$.*
3. *The 2-automorphism group of a deformation $\tilde{f}$ is isomorphic to $\mathrm{Ext}^{-1}(Lf^* L_{\mathscr{Y}/T}, I)$.*

Here $L_{\mathscr{Y}/T}$ is the cotangent complex induced by Laumon and Moret-Bailly [LM].

3.3 Group stacks

Group stacks are 2-categorical analogue of group schemes. A group structures on an algebraic stack $\mathcal{G}$ over S is given by morphisms

$$m : \mathcal{G} \times_S \mathcal{G} \to \mathcal{X}$$
$$e : S \to \mathcal{G}$$
$$i : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$$

and 2-isomorphisms

$$m(\mathrm{id} \times m) \Rightarrow m(m \times \mathrm{id}), \qquad \text{(associativity)}$$
$$m(\mathrm{id} \times e) \Rightarrow \mathrm{id}, \quad m(e \times \mathrm{id}) \Rightarrow \mathrm{id}, \qquad \text{(unit)}$$
$$m(\mathrm{id} \times i) \Rightarrow e, \quad m(i \times \mathrm{id}) \Rightarrow e \qquad \text{(inverse)}$$

with certain commutativities.

The Picard stack $\mathscr{P}ic_{\mathscr{X}}$ has a group structure given by tensor products. Another example of group stacks is the stack of automorphisms $\mathscr{A}ut(\mathscr{X})$, which is a substack of the Hom stack $\mathscr{H}\mathscr{O}\mathscr{M}(\mathscr{X}, \mathscr{X})$.

The author intends to study the theory of group stacks, which generalizes the theory of group schemes and will be applied on many kinds of moduli problems.

References

[Ao1] M. Aoki, *"Hom stacks"*, manuscripta mathematica **119** (2006) 37 – 56

[Ao2] 青木 昌雄, **「代数スタック入門」**, 第 2 回城崎新人セミナー報告集

[Ar] M. Artin, *"Versal deformation and algebraic stacks"*, Invent. Math. **27** (1974) 165-189

[Go] T. L. Gómez, *"Algebraic stacks"*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **111** (2001) 1–31

[LM] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *"Champs algébriques"*, Ergebnisse der Mathematik **39**, Springer-Verlag (2000)

[Ol] M. Olsson, *"Hom-stacks and restriction of scalars"*, to appear in Duke Math. J.

青木 昌雄
Department of Mathematics, Kyoto University
aoki@math.kyoto-u.ac.jp
http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~aoki/

On the blow-up at space infinity for solutions to the quasi-linear parabolic equations *

Yukihiro Seki †

1 Introduction

In this talk, the speaker would like to consider the blow-up problem for the quasilinear parabolic equations

$$u_t = \triangle u^m + u^p \qquad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0 \tag{1}$$

where m and p are physical constant such that $m > 1$ and $p > 1$ with initial value $u_0(x)$. The equation (1) is also called porous medium equation. It arises e.g., in the study of thermal diffusion phenomena with heat source. In this case, $u(x,t)$ repesents a temperature at the point x and at the time t.

Under the suitable condition on the intial data, the intial value problem (1) has a unique solution at least localy in time. Here the meaning of *solution* is understood in some weak sence.

The solution of (1) may not exist globally in time; it may blow up in finite time (the concrete definition of "blow up" is defined later). We are interested in the blow-up at space infinity and nonblow-up for the solution of (1).

The blow-up problem has been studied for a long time since Fujita's classical paper [2] at 1966 was published. He considered the initial value problem for the semilinear parabolic equations

$$u_t = \triangle u + u^p, \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0 \tag{2}$$

where $p > 1$ with initial value $u(x,0) = u_0(x)$. If u_0 is bounded and continuous in $\mathbb{R}^N$, there exsists a unique solution of the (2) at least locally in time

*Joint work with Prof. Ryuichi Suzuki and Dr. Noriaki Umeda

†Department of Mathematics Graduate School of Science and Engineering Chuo University

and it can be extended as time increase as far as $u(\cdot,t)$ belongs to L^∞. He discovered the exponent

$$p_f = 1 + \frac{2}{N}$$

, in which the situation extremely changes: When $p < p_f$, none of the solutions of (2) exsist globally in time except for the trivial one $u \equiv 0$ no matter how the initial value u_0 is small. On the other hands when $p > p_f$, the soution of (2) can be global in time if the initial value u_0 is small enough. In the first case the solution is said to *blow up* in finite time. After that, it was also shown that the solution of (2) blows up in finite time in the case of $p = p_f$ for $N = 1, 2$ by [7]. Thus the number p_f is called "critial exponent" or "Fujita exponent". Similar results were shown for the quasilinear parabolic equation (1) by [3]. Let us put

$$p^* \equiv p^*(m,N) = m + \frac{2}{N}.$$

When $p < p^*$, none of the solutions of (1) exisit globally in time except for the trivial one $u \equiv 0$ no matter how the initial value u_0 is small. On the other hands, when $p \geq p^*$, the solution of (1) can be global in time if the initial value u_0 is small enough.

The various problems concerning blow-up for (1) and (2) have been studied. The one of these problems is determing the locations of *blow-up points* defined below. *Blow-up* and *blow-up point* are defined for the solution of (1) as follows: For a given u_0, m and p, let $T^* = T^*(u_0,m,p)$ be a maximal existence time of the solution of (1). If $T^* = \infty$, we call the solution exists globally in time. When $T^* < \infty$, we say that the solution blows up in finite time and call T^* *blow-up time* of the solution. By this definition, it follows that

$$\lim_{t \uparrow T^*} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u(x,t)| = \infty.$$

Because if it does not hold, the solution will be uniquely prolonged. A point $x_{BU} \in \mathbb{R}^N$ is called *blow-up point* (at the time T^*) of the solution provided there exists a sequence $\{(x_n,t_n)\}$ such that

$$t_n \uparrow T^*, \quad x_n \to x_{BU} \quad \text{and} \quad u(x_n,t_n) \to \infty \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

We shall denote by S the set of all blow-up points of u and call it *blow-up set* of u. If there exists a sequence $\{(x_n,t_n)\}$ satisfying

$$t_n \uparrow T^*, \quad |x_n| \to \infty \quad \text{and} \quad u(x_n,t_n) \to \infty \quad \text{as} \quad n \to \infty,$$

we say that the solution blows up at space infinity (at the time T^*).

There is a huge literature on the locations of blow-up points since earlyer work by Weissler [9] and A. Friedman and B. Mcleod [1]. Here we shall introduce the results about this topic by Mochizuki and Suzuki [8]. They treated the Cauchy problems (1) as examples and classified the blow-up sets in terms of the relations between m and p: Assume that $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$ and u_0 is bounded continuous in $\mathbb{R}^N$. Suppose that u_0 has a compact support in $\mathbb{R}^N$ or decays at space infinity. Note that if $p \leq m$, then all nontrivial solution of the (1) blow up in finite time.

i) *Let $m > p$ and u be a blow-up solution of* (1). *Then u blows up at any points in $\mathbb{R}^N$, in other words,*

$$S = \mathbb{R}^N.$$

Moreover u blows up uniformly in each compact set K of $\mathbb{R}^N$:

$$\lim_{t \uparrow T^*} \inf_{x \in K} u(x,t) = \infty.$$

ii) *Let $p = m$ and u be a blow-up solution of* (1). *Then S includes some ball.*

iii) *Let $p > m$ and u be a blow-up solution of* (1). *Then S is included in a domain depending only on the shape of the initial data $u_0(x)$. Especially, if u_0 is radially symmetric and decreasing with respect to origin, then so called, single point blow-up occurs i.e., $S = \{0\}$.*

These results represent quite defferences between semilinear case and quasi-linear case. But it is always imposed that u_0 is decaying at space infinity.

We would like to consider the initial value problems (1) for more gerneral initial datas. Let us consider a continuous function u_0 in $\mathbb{R}^N$ which satisfies

$$0 \leq u_0(x) \leq M \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^N \tag{A1}$$

$$\lim_{|x| \to \infty} u_0(x) = M \tag{A2}$$

for some $M > 0$.

We compare (1) with the associating initial value problem for the ordinary differential equation;

$$\begin{cases} v' = v^p, \\ v(0) = M, \end{cases} \tag{3}$$

The initial value problem (3) is immediately solved,

$$v(t) = \frac{\alpha^\alpha}{(T_v - t)^\alpha}$$

where

$$\alpha = \frac{1}{p-1} \quad \text{and} \quad T_v = \frac{\alpha}{M^{p-1}} \ : \text{maximal existence time of } v.$$

The solution of (3) is considered to be the solution of (1) which is spatially constant for all $\mathbb{R}^N$ and necessarily blows up at the time T_v. We are now in the position to state our main results. We restrict ourselves in the case of $1 \leq m < p$.

Theorem 1. *Let u be a solution of* (1) *with* (A1) *and* (A2). *Then u blows up at $T^* = T_v$ and satisfies*

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x,t) = v(t) \tag{4}$$

and the convergence is uniform in every compact subset of $[0, T_v)$.

In fact, Theorem 1 ensures that the solution of (1) with (A1) and (A2) at least blows up at space infinity and describes its asymptotic behaviour as $|x| \to \infty$. On the other hands, we can obtain the fact that the solution of (1) does not blow up at any points in $\mathbb{R}^N$ under the assumptions (A1) and (A2):

Theorem 2. *Let u be a solution of* (1) *with* (A1) *and* (A2) *and assume that $u_0 \not\equiv M$. Then u has no blow up points in $\mathbb{R}^N$. In other words, u blows up only at space infinity.*

There are few works on the solution which blows up at space infinity. We mention that this problem is discussed by Y. Giga and N. Umeda in [4] and [5] for the semilinear case. They proved in [4] above Theorems in the case of $m = 1$. But their proofs heavily depend on the fundamental solution for the heat equation. However one can not use same method for the case $m > 1$ since there are no fundamental solutions to the quasilinear equations.

Let us describe a brief sketch of our method. To show Theorem 1, we adopt comparison arguments. We can easily see the fact that the solution of (1) is estimate from above by the solution of (3). We shall focus atention on the construction of the subfunction which converges to the the solution of (3) uniformly as $|x| \to \infty$. From the assumption (A1), u_0 takes very close value to M at far away from origin. So we consider the zero-Dirichlet boundary value problems on the balls centered at the points far away from origin and estimate these solutions from below making use of, so called, "Kaplan's method" which is using the eigenfunction of $-\triangle$ for Dirichlet

problem as suitable test functions (c.f. [6]). Here it is essentially used that $p \geq m$. We adopt comparison arguments also to prove Theorem 2. We construct a supersolution for the investigated Cauchy problem which has no blow-up points in $\mathbb{R}^N$ and use the methods having been established in [1], [8], and so on.

References

[1] A. Friedman and B. Mcleod, *Blow-up of positive Solutions of semilinear Heat equations,* Indiana Univ. Math. J., **34**(1985),425-447.

[2] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \triangle u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **13**(1966), 109-124.

[3] V. A. Galaktinov, S. P. Kuedyumov, A. P. MIkhailov and A. A. Samarskii, *Unbounded solutions of the Cauchy problem for the parabolic equation* $u_t = \nabla(u^\sigma \nabla u) + u^\beta$, Soviet Phys. Dokl., **25**(1980), 458-459.

[4] Y. Giga and N. Umeda, *On Blow-up at Space Infinity for Semilinear Heat Equations*, J. Math. Anal. Appl. **316**(2006) 538-555.

[5] Y. Giga and N. Umeda, *Blow-up directions at space infinity for solutions of semilinear heat equations*, preprint.

[6] T. Imai and K. Mochizuki, *On blow-up of solutions for quasilinear degenerate parabolic equations*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **27**(1991), 695-709.

[7] K. Hayakawa, *On Nonexistence of Global Solutions of Some Semilinear Parabolic Differential Equations*, Proc. Japan Acad., **49**(1973), 503-505.

[8] K. Mochizuki and R. Suzuki, *Blow-up sets and asymptotic behavior of interfaces for quasilinear parabolic equations in* R^N, J. Math. Soc. Japan., **44**(1992), 485-504.

[9] F. B. Weissler, *Single point blow-up for a semilinear intial value problem*, J. Differential Equation, **55**(1984), 204-224

量子群における結晶基底の多面体表示

星野 歩*

上智大学大学院 理工学研究科 数学専攻

1 Abstract and Introduction

The quantum algebra $U_q(\mathfrak{g}) := \langle e_i, f_i, q^h \rangle_{i \in I}$ $(I = \{1, 2, \cdots, n\})$ which was introduced in the study of solvable lattice models is applied to the reserches of mathematical physics and plays important roles. The nilpotent part $U_q^-(\mathfrak{g}) := \langle f_i \rangle_{i \in I}$ of $U_q(\mathfrak{g})$ has a crystal base $B(\infty)$ and the irreducible integrable highest weight representaion of $U_q(\mathfrak{g})$ also has crystal base $B(\lambda)$ which were constructed by Kashiwara [K1].

The crystal base has been realized by several methods but it is not so easy to obtain the explicit form. Polyhedral realization of crystal bases is one of the methods for realizing crystal bases explicitly, which was introduced by Nakashima and Zelevinsky [NZ]. We can describe a vector in the crystal base $B(\infty)$ as a lattice point of certain convex polyhedron in an infinite $\mathbb{Z}$-lattice by this method. This method can be applied to the crystal base $B(\lambda)$ of the irreducible integrable highest weight module for symmetrizable Kac-Moody Lie algebras.

In this paper, we introduce the notion of the polyhedral realization and recent results.

2 準備

まず基本事項の復習をする. 量子群 $U_q(\mathfrak{g}) := \langle e_i, f_i, q^h \rangle_{i \in I} / \mathbb{Q}(q)$ は Kac-Moody Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra の q-analogue $(U(\mathfrak{g}) \rightsquigarrow U_q(\mathfrak{g}))$ で $q \to 1$ の極限で Kac-Moody Lie 代数が復元される. 量子群の表現論 (可積分表現、最高ウェイト 表現) は q が generic の場合 Kac-Moody Lie 代数の表現論と同じ (特に、有限次元 Kac-Moody Lie 代数に付随する量子群の有限次元表現は $L(\lambda)$: Verma module の simple quotient (λ: dominant integral weight) と同型) であるが、違いの一つに結晶基底の存在がある. 結晶基底とは、$q \to 0$ の極限において部分代数 $U_q^-(\mathfrak{g})$ と 可積分最高ウェイト 表現 $V(\lambda)$ に存在する性質の良い基底であり、柏原によって構成された. この基底はある操作によって一般の q についての基底 (global base) に持ち上がり、特に $q \to 1$ の基底としても新しい.

3 結晶基底 (crystal base)

ここでは簡単に結晶基底の定義と性質を復習する. M を $U_q(\mathfrak{g})$ の可積分表現とする. 任意の $u \in M_\lambda$ $(\lambda \in P)$ は $u_n \in \ker e_i \cap M_{\lambda + n\alpha_i}$ に対して $u = \sum_{n \geq 0} f_i^{(n)} u_n$ ($f_i^{(n)} := \frac{f_i^n}{[n]_i!}$, $[n]_i := \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}$, $q_i := q^{(\alpha_i, \alpha_i)}$) という表示を持つ. このとき柏原作用素 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i \in \mathrm{End}(M)$ $(i \in I)$ を以下で定義する:

$$\tilde{e}_i u := \sum_{n \geq 1} f_i^{(n-1)} u_n, \quad \tilde{f}_i u := \sum_{n \geq 0} f_i^{(n+1)} u_n.$$

以下 $A := \{ f(q) \in \mathbb{Q}(q) : f(q)$ は $q = 0$ で正則 $\}$ とする.

*e-mail address: a-hoshin@mm.sophia.ac.jp

本研究は日本学術振興会 特別研究員奨励費の助成を受けています

Definition 1 (結晶基底).
組 (L,B) が可積分表現 M の結晶基底とは以下を満たすことである:
(i) L は M の A 部分加群で $M \cong \mathbb{Q}(q) \otimes_A L$.
(ii) B は $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 L/qL の基底.
(iii) $L = \oplus_{\lambda \in P} L_\lambda$, $B = \sqcup_{\lambda \in P} B_\lambda$. ここで $L_\lambda := L \cap M_\lambda$, $B_\lambda := B \cap L_\lambda / qL$.
(iv) $\tilde{e}_i L \subset L$ かつ $\tilde{f}_i L \subset L$.
(v) $\tilde{e}_i B \subset B \sqcup \{0\}$ かつ $\tilde{f}_i B \subset B \sqcup \{0\}$.
(vi) $u, v \in B$ に対して $\tilde{f}_i u = v \iff \tilde{e}_i v = u$.

ここで u_λ を $V(\lambda)$ の最高ウェイトベクトルとし

$$L(\lambda) := \sum_{i_j \in I, l \geq 0} A \tilde{f}_{i_l} \cdots \tilde{f}_{i_1} u_\lambda, \quad B(\lambda) := \{ \tilde{f}_{i_l} \cdots \tilde{f}_{i_1} u_\lambda \bmod qL(\lambda) \ : \ i_j \in I, l \geq 0 \}$$

とおくと、以下の定理を得る:

Theorem 2 ([K1]). 組 $(L(\lambda), B(\lambda))$ は $V(\lambda)$ の結晶基底.

また同様に $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i \in \mathrm{End}(U_q^-(\mathfrak{g}))$ が定義でき

$$L(\infty) \ := \sum_{i_j \in I, l \geq 0} A \tilde{f}_{i_l} \cdots \tilde{f}_{i_1} u_\infty \quad (u_\infty : \text{単位元}), \quad B(\infty) := \{ \tilde{f}_{i_l} \cdots \tilde{f}_{i_1} u_\infty \bmod qL(\infty) \ : \ i_j \in I, l \geq 0 \}$$

とおくと、組 $(L(\infty), B(\infty))$ は $U_q^-(\mathfrak{g})$ の結晶基底になる ([K1]).

Theorem 3 ([K2]). 可積分最高ウェイト表現 $V(\lambda)$ に対してある写像 G があって

$$\{G(b) : b \in B(\lambda)\}$$

は $V(\lambda)$ の基底. この基底を $V(\lambda)$ の大域結晶基底 (*global base*) という.

Theorem 4 (テンソル積). $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 V_1, V_2 に対し (L_1, B_1), (L_2, B_2) をそれぞれの結晶基底とする. さらに

$$L := L_1 \otimes_A L_2, \quad B := B_1 \otimes B_2 := \{b_1 \otimes b_2 : b_i \in B_i\}$$

とし $u \in B_1, v \in B_2$ に対し $\varphi_i(u) := max\,\{n \geq 0 : \tilde{f}_i^n u \neq 0\}$, $\varepsilon_i(v) := max\,\{n \geq 0 : \tilde{e}_i^n v \neq 0\}$ とすると
(i) (L, B) は $V_1 \otimes_{\mathbb{Q}(q)} V_2$ の結晶基底.
(ii) $\tilde{f}_i$, $\tilde{e}_i$ の $u \otimes v$ への作用は以下で得られる:

$$\tilde{f}_i(u \otimes v) \ = \begin{cases} \tilde{f}_i u \otimes v & \varphi_i(u) > \varepsilon_i(v) \text{ のとき}, \\ u \otimes \tilde{f}_i v & \varphi_i(u) \leq \varepsilon_i(v) \text{ のとき}, \end{cases}$$

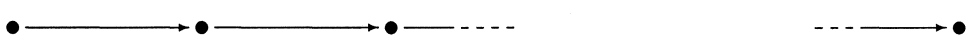
$$\tilde{e}_i(u \otimes v) \ = \begin{cases} \tilde{e}_i u \otimes v & \varphi_i(u) \geq \varepsilon_i(v) \text{ のとき}, \\ u \otimes \tilde{e}_i v & \varphi_i(u) < \varepsilon_i(v) \text{ のとき}. \end{cases}$$

Definition 5 (クリスタルグラフ). 結晶基底 B のクリスタルグラフとは、以下の規則で与えられる色付き有向グラフである:

$$b_1 \xrightarrow{\ i\ } b_2 \iff b_2 = \tilde{f}_i b_1 \ (b_1, b_2 \in B).$$

Remark 6. 結晶基底 B が "連結" とは、B のクリスタルグラフが "連結" であることをいう.

Example 7. 有限次元 $U_q(sl_2)$ 加群 V_l $(dim V_l = l+1)$ のクリスタルグラフは $l+1$ 個の元を用いて以下で与えられる:



Definition 8 (クリスタル). 集合 B がクリスタルとは $i \in I$ に対して

$$
\begin{aligned}
&wt : B \longrightarrow P,\\
&\varepsilon_i : B \longrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}, \quad \varphi_i : B \longrightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\},\\
&\tilde{e}_i : B \sqcup \{0\} \longrightarrow B \sqcup \{0\}, \quad \tilde{f}_i : B \sqcup \{0\} \longrightarrow B \sqcup \{0\},\\
&\tilde{e}_i(0) = \tilde{f}_i(0) = 0
\end{aligned}
$$

という写像があって、以下の性質を満たすことである:

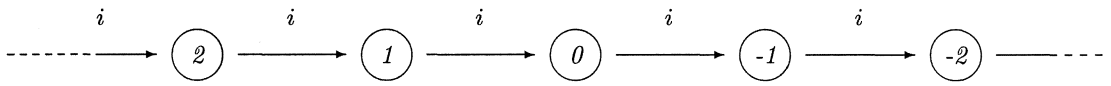
$$
\begin{aligned}
&\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, wt(b) \rangle,\\
&wt(\tilde{e}_i b) = wt(b) + \alpha_i \quad \textit{if } \tilde{e}_i b \in B,\\
&wt(\tilde{f}_i b) = wt(b) - \alpha_i \quad \textit{if } \tilde{f}_i b \in B,\\
&\tilde{e}_i b_2 = b_1 \Longleftrightarrow \tilde{f}_i b_1 = b_2 \ (b_1, b_2 \in B),\\
&\varepsilon_i(b) = -\infty \Longrightarrow \tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = 0.
\end{aligned}
$$

Remark 9. 結晶基底はクリスタルの性質を満たす.

Example 10. $i \in I$ に対して、$B_i := \{(x)_i : x \in \mathbb{Z}\}$ を以下のように定義すると B_i はクリスタルである:

$$
\begin{aligned}
&wt((x)_i) = x\alpha_i, \quad \tilde{e}_j(x)_i = \delta_{i,j}(x+1)_i, \quad \tilde{f}_j(x)_i = \delta_{i,j}(x-1)_i,\\
&\varepsilon_i((x)_i) = -x, \quad \varphi_i((x)_i) = x, \quad \varepsilon_j((x)_i) = -\infty \quad \varphi_j((x)_i) = -\infty \quad \text{for} \quad j \neq i.
\end{aligned}
$$

このとき B_i のクリスタルグラフは以下のようになる:



ただし、 $\tilde{f}_i$ (t) = (t-1) ($t \in \mathbb{Z}$). ここに B_i と $\mathbb{Z}$ は集合としては等しい.

Example 11. $R_\lambda := \{r_\lambda\}$ ($\lambda \in P$) を一元からなる集合で $wt(r_\lambda) := \lambda$, $\varepsilon_i(r_\lambda) := -\langle h_i, \lambda \rangle$, $\varphi_i(r_\lambda) := 0$, $\tilde{e}_i(r_\lambda) = \tilde{f}_i(r_\lambda) := 0$ と定めると R_λ はクリスタルである.

Example 12. *index* の無限列 $\iota = (\cdots, i_2, i_1)$ が次の条件 (A) を満たすとする:

$$(A) \ \ i_k \neq i_{k+1} \ \ \textit{and} \ \ \sharp\{\, k \mid i_k = i \,\} = \infty \ \ \textit{for any} \ \ i \in I.$$

このとき

$$\mathbb{Z}^\infty := \{\, (\cdots, x_2, x_1) : x_j \in \mathbb{Z},\ x_k = 0 \ (k \gg 0) \,\} \ (\subset \cdots \otimes B_{i_2} \otimes B_{i_1})$$

は ι に付随したクリスタルの構造を持つ (詳細は略). さらに

$$\mathbb{Z}^\infty[\lambda] := \{\, (\cdots, x_2, x_1, r_\lambda) : x_j \in \mathbb{Z},\ x_k = 0 \ (k \gg 0) \,\} = \mathbb{Z}^\infty \otimes R_\lambda \ (\subset \cdots \otimes B_{i_2} \otimes B_{i_1} \otimes R_\lambda)$$

も ι に付随したクリスタルの構造を持つ. 集合としては $\mathbb{Z}^\infty$ と $\mathbb{Z}^\infty[\lambda]$ は等しいが、そのクリスタルの構造は異なることに注意する.

4 結晶基底の実現と例

[KN] において柏原、中島は A_n, B_n, C_n, D_n 型の可積分最高ウェイト表現の結晶基底 $B(\lambda)$ の semi standard tableaux による実現を与えた. ここでは A_n 型について詳細を述べる. $\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i \Lambda_i$ ($\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, Λ_i: fundamental weights, $i \in I$) とすると $B(\lambda)$ は shape が $(m_1, m_2, \cdots, m_n)$ ($m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n$) で entry が $1, 2, \cdots, n+1$ の semistandard tableaux の集合で、次の条件を満たすものと等しい: $m_1 - m_2 = \lambda_1, m_2 - m_3 = \lambda_2, \cdots, m_{n-1} - m_n = \lambda_{n-1}, m_n = \lambda_n$.

Example 13 (A_2-case). $\lambda = 2\Lambda_1 + \Lambda_2$ とすると $B(\lambda)$ は以下で与えられる:

$$B(\lambda) = \left\{ \begin{array}{ccccc} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}, \\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, \\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} \end{array} \right\}$$

• Tableau どうしのテンソル積も具体的に記述できるので Littlewood-Richardson rule も記述できる ([N1]).

5 結晶基底の多面体表示

結晶基底の多面体表示とはある区分線形変換で不変な一次不等式系で定められた領域の、整数点として結晶基底を具体的に表示する手法で 1997 年に中島と Zelevinsky [NZ] によって導入された、一般の Kac-Moody 型の量子群に適応できる手法である.

Known results

- $B(\infty)$: 古典 A_n 型、アフィン $A^{(1)}_{n-1}$ 型、rank 2 一般 (中島、Zelevinsky [NZ] 1997)
- $B(\lambda)$: 古典 A_n 型、アフィン $A^{(1)}_{n-1}$ 型、rank 2 一般 (中島 [N2] 1999)

New results

- $B(\infty)$, $B(\lambda)$: 例外型を含む半単純型 (B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4 [H1] 2005)
- 変形量子群の多面体表示: 古典 A_n 型、rank 2 一般 (ウェイト に条件あり [HN] 2005, [H2] to appear)

•$B(\infty)$ の多面体表示

ここでは、$B(\infty)$ の多面体表示の背景と構成法を紹介する. まず、クリスタル $B_i := \{ (x)_i \mid x \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z}$ $(i \in I)$ に対して以下の埋め込みの存在が知られている:

$$\Psi_i : B(\infty) \hookrightarrow B(\infty) \otimes B_i \quad u_\infty \mapsto u_\infty \otimes (0)_i.$$

ここで先の条件 (A) を満たす index の無限列 $\iota = (\cdots, i_2, i_1)$ $(i_k \in I)$ をとり Ψ_i を ι に沿って繰り返し作用させると以下の埋め込みを得る (柏原の埋め込み [K3]):

$$\Psi_\iota : B(\infty) \hookrightarrow B(\infty) \otimes B_{i_1} \hookrightarrow B(\infty) \otimes B_{i_2} \otimes B_{i_1} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow B(\infty) \otimes \cdots \otimes B_{i_l} \otimes \cdots \otimes B_{i_2} \otimes B_{i_1} \cong \mathbb{Z}^\infty$$
$$(u_\infty \mapsto (\cdots, 0, 0), \ \mathbb{Z}^\infty := \{ (\cdots, x_2, x_1) \mid x_j \in \mathbb{Z}, \ x_k = 0 \ (k \gg 0) \}).$$

• 多面体表示とは Image Ψ_ι を具体的に記述する手法の一つである.

Example 14 (A_3-case). $\iota := (\cdots, 3, 2, 1, 3, 2, 1)$ とすると

$$Im(\Psi_\iota) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{Z}^\infty \mid \begin{array}{l} x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq x_4 \geq 0, \\ x_3 \geq x_5 \geq x_7 \geq 0, \ \text{その他の } x_j \equiv 0 \end{array} \right\}.$$

ここでは柏原の埋めこみの像 $Im\Psi_\iota$ $(\cong B(\infty))$ を記述するために $B(\infty)$ の多面体表示を構成する ([NZ]). 条件 (A) を満たす index の無限列 $\iota := (\cdots, i_k, \cdots, i_2, i_1)$ を固定し、$k \geq 1$ に対し

$$\begin{array}{rcl} k^{(+)} & := & min \{ j \mid i_k = i_j \ (k < j) \}, \\ k^{(-)} & := & max \{ j \mid i_k = i_j \ (k > j) \} \ (\text{ただし } k^{(-)} \text{ が存在しない場合は } k^{(-)} = 0) \end{array}$$

とおく. $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $\mathbb{Q}^\infty$ を以下で定める:

$$\mathbb{Q}^\infty := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^\infty = \{ \vec{x} = (\cdots, x_2, x_1) \mid x_j \in \mathbb{Q}, \ x_k = 0 \ (k \gg 0) \}.$$

また $\mathbb{Q}^\infty$ 上の一次形式 $\beta_k(\vec{x})$ $(\vec{x} \in \mathbb{Q}^\infty)$ を以下で定める:

$$\beta_k(\vec{x}) \;=\; x_k + \sum_{k<j<k^{(+)}} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_j} \rangle x_j + x_{k^{(+)}}.$$

この $\beta_k(\vec{x})$ を用いて $\varphi(\vec{x}) = \sum_{k\geq 1} \varphi_k x_k$ $(\varphi_k \in \mathbb{Q})$ に対する区分線型作用素 S_k を以下で定める:

$$S_k(\varphi) := \begin{cases} \varphi - \varphi_k \beta_k & \text{if } \varphi_k > 0, \\ \varphi - \varphi_k \beta_{k^{(-)}} & \text{if } \varphi_k \leq 0. \end{cases}$$

Example 15 (A_3-case). $\iota := (\cdots, 3, 2, 1, 3, 2, 1)$, $\varphi = x_1$ とすると

$$\begin{aligned} S_1(x_1) &= x_1 - \beta_1(\vec{x}) = x_1 - (x_1 - x_2 + x_4) = x_2 - x_4, \\ S_2 S_1(x_1) &= x_2 - x_4 - \beta_2(\vec{x}) = x_2 - x_4 - (x_2 - x_3 - x_4 + x_5) = x_3 - x_5, \\ S_3 S_2 S_1(x_1) &= x_3 - x_5 - \beta_3(\vec{x}) = x_3 - x_5 - (x_3 - x_5 + x_6) = -x_6. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \Xi_\iota &:= \{\, S_{j_l} \cdots S_{j_1}(x_{j_0}) \mid l \geq 0,\ j_0, \cdots, j_l \geq 1 \,\}, \\ \Sigma_\iota &:= \{\, \vec{x} \in \mathbb{Z}^\infty (\subset \mathbb{Q}^\infty) \mid \varphi(\vec{x}) \geq 0 \text{ for any } \varphi \in \Xi_\iota \,\} \end{aligned}$$

と定める. また index の無限列 ι に対し

$$\iota^{(j)} := min\{\, k \mid i_k = j \,\} \quad (j \in I)$$

と定め ι に対し 以下のような仮定 (P) を課す:

$$(P) \quad \varphi_{\iota^{(j)}} \geq 0 \text{ for any } \varphi \in \Xi_\iota.$$

このとき、以下の定理が成立する:

Theorem 16 ([NZ]). ι は条件 (A), (P) を満たすとする. このとき

$$Im\,(\Psi_\iota)\ (\cong B(\infty)) = \Sigma_\iota.$$

この Σ_ι を ι に付随する $B(\infty)$ の多面体表示と呼ぶ.

Remark 17. *Theorem 16* より、$B(\infty)$ の具体形を求めるには Ξ_ι, Σ_ι の具体形を求めればよいことが分かる.

Remark 18. 多面体表示において恒等的に 0 でない x_j の個数、つまり $B(\infty)$ を記述するために必要な、柏原の埋め込みで用いたクリスタル B_i のテンソル積の個数は、付随する *Weyl* 群の最長元の長さに等しいことが分かっている. アフィン型や一般の *Kac-Moody* 型の場合、無限個のテンソル積が必要になる.

以下 $\mathfrak{g}$ を単純型とする. $\iota := (\cdots, n, \cdots, 2, 1, \cdots, n, \cdots, 2, 1)$ (n: カルタン行列のサイズ) と定め、この ι に対し $\vec{x} \in \mathbb{Z}^\infty$ の index を $x_{j;i} := x_{(j-1)n+i}$ の対応で次のように付けかえる:

$$\vec{x} := (\cdots, x_{j;i}, \cdots, x_{2;2},\ x_{2;1},\ x_{1;n}, \cdots, x_{1;2},\ x_{1;1}) \in \mathbb{Z}_\iota[\lambda], \quad \text{ただし} \quad i \notin [1, n] \text{ のときは } x_{j;i} = 0.$$

ここでは B_n 型の場合の結果を紹介する.

Theorem 19 (B_n-case). $B(\infty)$ の多面体表示は以下である:

$$\begin{aligned} & x_{j;i} = 0 \quad \textit{for } j, i \notin [1, n], \\ & x_{1;i} \geq x_{2;i-1} \geq \cdots \geq x_{i;1} \geq 0 \quad \textit{for } 1 \leq i \leq n-1, \\ & x_{j;n} \geq x_{j+1;n-1} \geq \cdots \geq x_{n;j} \geq 0 \quad \textit{for } 1 \leq j \leq n, \\ & x_{j;n-j+1} \geq x_{j;n-j+2} \geq \cdots \geq x_{j;n} \geq 0 \ \textit{for } 2 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

•$B(\lambda)$ の多面体表示

ここでは $B(\lambda)$ の多面体表示の背景と構成法を紹介する. $B(\lambda)$ の単位元を u_λ とする. 一元からなるクリスタル $R_\lambda := \{r_\lambda\}$ に対して以下の埋め込みを得る:

$$\Omega_\lambda \ : \ B(\lambda) \hookrightarrow B(\infty) \otimes R_\lambda \quad u_\lambda \mapsto u_\infty \otimes r_\lambda.$$

この埋め込み Ω_λ と柏原の埋め込み Ψ_ι を合成し以下の unique な埋め込みを得る:

$$\begin{aligned} \Psi_\iota^\lambda \ : \quad B(\lambda) \quad &\hookrightarrow B(\infty) \otimes R_\lambda \quad \hookrightarrow \quad \mathbb{Z}^\infty \otimes R_\lambda \ (=: \mathbb{Z}^\infty[\lambda]) \\ u_\lambda \quad &\mapsto \quad u_\infty \otimes r_\lambda \quad \mapsto (\cdots, 0, 0) \otimes r_\lambda. \end{aligned}$$

ここではクリスタルの埋め込みの像 $Im\Psi_\iota^\lambda$ ($\cong B(\lambda)$) を記述するために $B(\lambda)$ の多面体表示を構成する ([N2]). 条件 (A) を満たす index の無限列 $\iota := (\cdots, i_k, \cdots, i_2, i_1)$ を固定し $k^{(+)}$, $k^{(-)}$, $\mathbb{Q}^\infty$ は前出のものとする. $\mathbb{Q}^\infty$ 上の線型関数 $\beta_k^{(\pm)}(\vec{x})$ ($\vec{x} \in \mathbb{Q}^\infty$) を以下で定める:

$$\begin{aligned} \beta_k^{(+)}(\vec{x}) \quad &= \quad x_k + \sum_{k<j<k^{(+)}} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_j} \rangle x_j + x_{k^{(+)}}, \\ \beta_k^{(-)}(\vec{x}) \quad &= \quad \begin{cases} x_{k^{(-)}} + \sum_{k^{(-)}<j<k} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_j} \rangle x_j + x_k & \text{if } \ k^{(-)} > 0, \\ -\langle h_{i_k}, \lambda \rangle + \sum_{1 \le j<k} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_j} \rangle x_j + x_k & \text{if } \ k^{(-)} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

ここで次に注意する:

$$\beta_k^{(+)} = \beta_k, \ \ \beta_k^{(-)} = \beta_{k^{(-)}} \ \text{ if } \ k^{(-)} > 0 \tag{5.1}$$

この $\beta_k^{(\pm)}(\vec{x})$ を用いて $\varphi(\vec{x}) = c + \sum_{k \ge 1} \varphi_k x_k$ ($c, \varphi_k \in \mathbb{Q}$) に対する区分線型作用素 S'_k を以下で定める:

$$S'_k(\varphi) := \begin{cases} \varphi - \varphi_k \beta_k^{(+)} & \text{if } \varphi_k > 0, \\ \varphi - \varphi_k \beta_k^{(-)} & \text{if } \varphi_k \le 0. \end{cases} \tag{5.2}$$

ここで index の無限列 ι に対し

$$\begin{aligned} \iota^{(j)} &:= min \{ \, k \mid i_k = j \ (j \in I) \, \}, \\ \lambda^{(j)}(\vec{x}) &:= \langle h_{i_k}, \lambda \rangle - \sum_{1 \le l < \iota^{(j)}} \langle h_{i_k}, \alpha_{i_l} \rangle x_l + x_{\iota^{(j)}} \end{aligned}$$

と定め

$$\begin{aligned} \Xi'_\iota &:= \{ S'_{j_k} \cdots S'_{j_1} \lambda^{(m)}(\vec{x}) \mid m \in I, \ j_1, \cdots, j_k \ge 1 \}, \\ \Xi_\iota[\lambda] &:= \Xi_\iota \ \cup \ \Xi'_\iota \\ &= \{ S'_{j_l} \cdots S'_{j_1}(x_{j_0}) \mid l \ge 0, \ j_0, \cdots, j_l \ge 1 \} \cup \{ S'_{j_k} \cdots S'_{j_1} \lambda^{(m)}(\vec{x}) \mid m \in I, \ j_1, \cdots, j_k \ge 1 \}, \\ \Sigma_\iota[\lambda] &:= \{ \vec{x} \in \mathbb{Z}_\iota[\lambda] \mid \varphi(\vec{x}) \ge 0 \text{ for any } \varphi \in \Xi_\iota[\lambda] \} \end{aligned}$$

と定める. ここで (5.1), (5.2) により、条件 (P) を満たす ι に対しては Ξ_ι は $B(\infty)$ の多面体表示で定めたものと等しいことに注意する. このとき以下の定理が成立する:

Theorem 20 ([N2]). $(\cdots, 0, 0) \in \Sigma_\iota[\lambda]$ であるとする. このとき

$$Im\,(\,\Psi_\iota^\lambda\,)\,(\cong B(\lambda)) = \ \Sigma_\iota[\lambda].$$

この $\Sigma_\iota[\lambda]$ を ι に付随する $B(\lambda)$ の多面体表示と呼ぶ.

Remark 21. *Theorem 20* より $B(\lambda)$ の具体形を求めるには $\Xi_\iota[\lambda]$, $\Sigma_\iota[\lambda]$ の具体形を求めればよいことが分かる.

以下 $\mathfrak{g}$ を単純型とする. $\iota, \vec{x}$ は前出のものと同様のものとする. ここで

$$\begin{aligned}
\Xi'_\iota :=& \{S'_{j_k} \cdots S'_{j_1} \lambda^{(m)}(\vec{x}) \,|\, m \in I,\ j_1, \cdots, j_k \geq 1\},\\
\Xi_\iota[\lambda] :=& \ \Xi_\iota \cup \Xi'_\iota\\
=& \{S'_{j_l} \cdots S'_{j_1}(x_{k;1}) \,|\, k \geq 1,\ j_1, \cdots, j_l \geq 1\} \cup \{S'_{j_k} \cdots S'_{j_1} \lambda^{(m)}(\vec{x}) \,|\, m \in I,\ j_1, \cdots, j_k \geq 1\},\\
\Sigma_\iota[\lambda] :=& \{\vec{x} \in \mathbb{Z}_\iota[\lambda] \,|\, \varphi(\vec{x}) \geq 0 \text{ for any } \varphi \in \Xi_\iota[\lambda]\}
\end{aligned}$$

と定めると $\Sigma_\iota[\lambda]$ は $B(\lambda)$ の多面体表示となる.

ここでは B_n 型の場合の結果を紹介する. 整数列 $\mu := (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_l, 0, 0, \cdots)$ $(l \geq 1,\ \mu_i \in \mathbb{Z})$ に対し、μ が *admissible pattern* であるとは以下を満たすことである:

$$\mu:\ \text{admissible} \iff \begin{cases} 1 \ \leq\ \mu_1 \ \leq\ n, \\ 0 \ \leq\ \mu_k \ \leq\ \mu_{k-1} - 1 \quad \text{for } 2 \leq k \leq l. \end{cases}$$

また簡単のため次の記号を準備する:

$$X_{j;i} := \begin{cases} 2x_{j;i} & \text{if } i \neq n, \\ x_{j;n} & \text{if } i = n. \end{cases}$$

Theorem 22 (B_n-case). $\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i \Lambda_i$ $(\lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ とする. このとき $B(\lambda)$ の多面体表示は以下である:

$$\begin{aligned}
& x_{j;i} = 0 \quad \textit{for } \ j, i \notin [1, n],\\
& x_{1;i} \geq x_{2;i-1} \geq \cdots \geq x_{i;1} \geq 0 \quad \textit{for } \ 1 \leq i \leq n-1,\\
& x_{j;n} \geq x_{j+1;n-1} \geq \cdots \geq x_{n;j} \geq 0 \quad \textit{for } \ 1 \leq j \leq n,\\
& x_{j;n-j+1} \geq x_{j;n-j+2} \geq \cdots \geq x_{j;n} \geq 0 \ \textit{for } \ \leq j \leq n
\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}
& \lambda_i + x_{j\,;\,i-j} - x_{j\,;\,i+1-j} \geq 0 \quad \textit{for } \ 1 \leq i \leq n-1,\ 1 \leq j \leq i,\\
& \lambda_n + \Sigma_{k=1}^l \left(X_{k-1+\mu_k\,;\,n-\mu_k} - X_{k-1+\mu_k\,;\,n+1-\mu_k}\right) \ \geq \ 0
\end{aligned}$$

ただし、$\mu := (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_l, 0, 0, \cdots)$ とし、それぞれの $l = 1, 2, \cdots, n$ に対し μ: *admissible.*

6 応用

Litllewood-Richardson rule

可積分表現のテンソル積は、既約な表現達の直和と同型になることが知られている. その既約成分の重複度を Littlewood-Richardson number という ($c^\mu_{\lambda\nu}$: $V(\lambda) \otimes V(\nu)$ の直和成分 $V(\mu)$ の重複度). ここで dominant integral weight λ に対し

- $V(\lambda)_\beta$: $V(\lambda)$ のウェイト β のウェイト空間,
- $\nu := \sum_{i=1}^n n_i \Lambda_i$ $(\Lambda$: 基本ウェイト, $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ i \in I)$,
- $V(\lambda)_{\beta,\nu} := \{ v \in V(\lambda)_\beta : e_i^{n_i+1} v = 0 \text{ for any } i \in I \}$

とする。このとき次が知られている:

Fact 23.

$$c^\mu_{\lambda\,\nu} = \ dim\ V(\lambda)_{\mu-\nu,\,\nu}.$$

また、global base の性質として次が知られている:

Proposition 24 (柏原). 任意の $i \in I$ と $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$\{v \in V(\lambda) : e_i^{n+1} v = 0\} = \mathbb{Q}(q) \otimes G(\{b \in B(\lambda) : \tilde{e}_i^{n+1} b = 0\}).$$

よって上記の2 つの事実から、$c_{\lambda\,\nu}^{\mu}$ は $\nu := \sum_{i=1}^{n} n_i \Lambda_i$ に対し
1. ウェイトが $\mu - \nu$, 2. $\varepsilon_i(b) \leq n_i$ for any $i \in I$
の条件を満たす $b \in B(\lambda)$ の個数で与えられる.

実際 1, 2 は容易に多面体表示に組み込むことができる. 不等式系で定められた領域の整数点の個数を数えることによる $c_{\lambda\,\nu}^{\mu}$ の記述法は、A_n 型については Gelfand, Zelevinsky [GZ] が、また B_n、C_n、D_n 型は Berenstein, Zelevinsky [BZ] が得ているが、多面体表示を用いると例外型を含む半単純型の Littlewood-Richardson number が記述できることになる. 今後の課題としてはアフィン型の多面体表示を求めることや、レベル 0 の変形量子群の結晶基底の多面体表示を求めることなどが挙げられる.

Reference

[BZ] A. Berenstein, A. Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, Invent. Math., **143** (2001), 77–128.

[GZ] I. M. Gelfand and A. Zelevinsky, Multiplicities and regular bases for gl_n, Group Theoretical Methods in Physics, vol. II, Science Press, Utrecht, 1986, 147–159.

[H1] A. Hoshino, Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Quantum Algebras of Finite Types, to appear J. Math. Phys.

[H2] A. Hoshino, Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Modified Quantum Algebras of Rank 2, to appear Comm. Algebra.

[HN] A. Hoshino, T. Nakashima, Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Modified Quantum Algebras of Type A, Comm. Algebra, **33** (2005), no.7, 2167–2191.

[K1] M. Kashiwara, On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras, Duke Math. J.,**63** (1991),465–516.

[K2] M. Kashiwara, Global crystal bases of quantum groups, Duke Math. J., **69** (1993), 455–485.

[K3] M. Kashiwara, Crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula, Duke Math. J., **71** (1993), 839–858.

[KN] M. Kashiwara and T. Nakashima, Crystal graph for representations of the q-analogue of classical Lie algebras, J. Algebra, **165** (1994), 295–345.

[N1] T. Nakashima, Crystal bases and a generalization of the Littlewood-Richardson rule for the classical Lie algebras, Comm. Math. Phys., **154** (1993), 215–243.

[N2] T. Nakashima, Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Integrable Highest Weight Modules, J.Algebra **219**, (1999),571–597.

[NZ] T. Nakashima, A. Zelevinsky, Polyhedral Realizations of Crystal Bases for Quantized Kac-Moody Algebras, Advances in Mathematics **131**, No.1,(1997),253–278.

非等方的 Allen–Cahn 方程式による界面運動の近似の一様性

大塚 岳 (東京大学大学院数理科学研究科 研究拠点形成特任研究員)

Abstract

The Allen–Cahn equation is introduced for approximating the motion of grain boundaries in a crystal. It is already known that internal transition layers of solutions of Allen–Cahn equations approximates the motion of interfaces by a mean curvature flow equation. We shall discuss on an anisotropic version of Allen–Cahn equations and a mean curvature equation. The convergence of solutions of anisotropic Allen–Cahn equations is studied when the interface thickness parameter (denoted by ε) tends to zero. It is shown that the convergence to a level set solution of the corresponding anisotropic interface equations is uniform with respect to the derivatives of a surface energy density function. As an application a crystalline motion of interfaces is shown to be approximated by anisotropic Allen–Cahn equations.

1. イントロダクション

本講演では非等方的 Allen–Cahn 方程式の内部遷移層による界面の運動の近似について考察する。非等方的 Allen–Cahn 方程式とは次のような方程式である。

$$\beta(\nabla v)\partial_t v - \operatorname{div}\{\gamma(\nabla v)D\gamma(\nabla v)\} + \frac{1}{\varepsilon^2}(f(v) - \varepsilon\lambda a) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T). \tag{1.1}$$

ここで a は定数、$f(v) = 2v(v^2-1)$、λ は f から決まる定数でこの場合では $\lambda = 2/3$、β、γ は $\mathbb{R}^n$ 上の関数で次をみたすものとする。

(A1) $\beta \in C(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$、$\gamma \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$。

(A2) 任意の $r > 0$ と $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対し $\beta(rp) = \beta(p)$、$\gamma(rp) = r^2\gamma(p)$。

(A3) 次をみたす正の定数 Λ_β、Λ_γ が存在する。

$$\Lambda_\beta^{-1} \le \beta \le \Lambda_\beta,\ \Lambda_\gamma^{-1} \le \gamma \le \Lambda_\gamma \quad \text{on } S^{n-1}.$$

(A4) γ は凸関数、γ^2 は狭義凸関数である。

(A5) $\sigma \mapsto f(\sigma) - \varepsilon\lambda a$ は 3 つの零点 h_-、h_0、$h_+ (h_- < h_0 < h_+)$ を持つ。

とくに $\beta \equiv 1$、$\gamma(p) = |p|$、$a = 0$ のとき (1.1) は Allen–Cahn 方程式と呼ばれる。方程式 (1.1) の解 v の内部遷移層が非等方的平均曲率流方程式と呼ばれる方程式によって動く界面を近似していることは知られている。本講演ではこの Allen–Cahn 方程式と平均曲率流方程式の関係を明らかにすることを目標とする。

1.1. 等方的な場合

まず Allen–Cahn 方程式、すなわち $\beta \equiv 1$、$\gamma(p) = |p|$、$a = 0$ の場合である

$$\partial_t v - \Delta v + \frac{1}{\varepsilon^2} f(v) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T) \tag{1.2}$$

と平均曲率流方程式の関係について紹介する。

Allen–Cahn 方程式は Allen–Cahn が 1979 年に、結晶中の流界の運動を表す方程式として導入した ([AC])。粒界とは結晶中にある、2 つの向きの異なる結晶格子の境界のことである。一方の結晶格子の状態を $v = -1$、他方の結晶格子の状態を $v = 1$ とし、次のエネルギー汎関数

$$E(v) = \int \left[\frac{1}{2} |\nabla v|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left\{ \frac{1}{2}(v^2 - 1)^2 - \varepsilon \lambda a v \right\} \right] dx$$

の値を小さくするように変化する運動として、(1.2) が導出された。Allen–Cahn([AC]) は $a = 0$ の場合の方程式について、内部遷移層と呼ばれる、v の値が -1 から 1 へ移り変わる幅 $O(\varepsilon)$ の薄い層が平均曲率流方程式にしたがって動く界面を近似していることを指摘した。平均曲率流方程式とは、

$$V = -\kappa \quad \text{on } \Gamma_t \tag{1.3}$$

で表される界面 Γ_t の運動方程式である。ここで V は Γ_t の外向き単位法線ベクトル方向への移動速度、κ は Γ_t の平均曲率である。

両者の関係については、形式的には漸近展開によって得られている ([RSK])。Chen([C])、Evans–Soner–Souganidis([ESS]) らは両者の関係について厳密な議論を展開した。

以下に両者の結果の本質的な部分を述べる。方程式 (1.3) を Level set 法によって定式化した等高面方程式

$$\partial_t u - |\nabla u| \mathrm{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0 \quad \text{in } \mathrm{R}^n \times (0, T) \tag{1.4}$$

を考える。u を (1.4) の '解'、v を (1.2) の '解' で、$\{x; u(x,0) > 0\} = \{x; v(x,t) > 0\}$ かつ $\{x; u(x,0) < 0\} = \{x; v(x,t) < 0\}$ をみたすものとする。このとき次が成立する。

$$v \to \left\{ \begin{array}{l} +1 \text{ in } \{(x,t); u(x,t) > 0\} \\ -1 \text{ in } \{(x,t); u(x,t) < 0\} \end{array} \right\} \text{ locally uniformly as } \varepsilon \to 0. \tag{1.5}$$

[C] はこの収束の結果を古典解の範囲で得ている。しかし (1.3) にしたがって動く界面は有限時間で特異点を生じることがある。[ESS] は (1.5) を粘性解なる弱解の範囲で得ている。これは界面に特異点が生じた後も (1.2) の内部遷移層で界面の運動が近似できることを示している。Barles–Soner–Souganidis([BSS]) はこの結果を一般の駆動力 a について拡張した。

1.2. 非等方的な場合

非等方的 Allen–Cahn 方程式 (1.1) は [MWBCS] によって導入された。方程式 (1.1) に対応する界面の運動方程式は

$$\beta(\vec{\mathbf{n}})V = -\gamma(\vec{\mathbf{n}})\{\mathrm{div}_{\Gamma_t} D\gamma(\vec{\mathbf{n}}) + a\} \quad \text{on } \Gamma_t. \tag{1.6}$$

で与えられる。ここで $\vec{\mathbf{n}}$ は Γ_t の外向き単位法線ベクトル、div_{Γ_t} は Γ_t 上での表面拡散を表す。右辺の第 1 項は Γ_t の非等方的な曲率を表す。物理学的には γ は表面エネルギー密度関数、$D\gamma$ は Cahn-Hoffman vector、γ/β は mobility と呼ばれる量である。β、γ はそれぞれ移動速度の移動速度、界面の平衡状態の非等方性を与えるものである。方程式 (1.1) と (1.6) のと表した等高面方程式は次で与えられる。

$$\beta(\nabla u)\partial_t u - \gamma(\nabla u)\{\mathrm{div} D\gamma(\nabla u) + a\} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T). \tag{1.7}$$

方程式 (1.1) と (1.7) に対する収束の結果 (1.5) は、$\beta \equiv 1$ の場合に [ElS1]、一般の β については [ElS2] によって得られている。しかしこれらの結果では γ について

$$\|\gamma\|_{C^2(B_2(0)\setminus B_{1/2}(0))} \leq \Lambda \tag{1.8}$$

なる正の定数 Λ の存在を仮定している。これは平衡状態の界面の形状が一様にある程度滑らかであることを示している。それは単独の方程式を考える限り自明であるが、クリスタラインと呼ばれる、γ が滑らかでないような状況での (1.6) による界面の運動の近似方程式として (1.1) を用いようとすると (1.8) は取り除くべき仮定となる。とくに [ElS1] や [ElS2] において (1.5) の収束は Λ に依存することに注意する。

そこで、本講演ではこの γ の微分に対する仮定を取り除いた状況で (1.5) を示すことを目標とする。

収束定理の証明は比較定理を用いた解の評価による。ここで比較原理とは、方程式の劣解 (方程式の左辺が非正) と優解 (方程式の右辺が非負) が初期時刻 $t = 0$ において' 劣解 $\leq$ 優解' なる大小関係をもつとき、その大小関係が時刻 T まで保存される、という性質である。そこで界面の近傍で値が -1 から 1 に移り変わるような劣解と優解を構成し、比較原理によって解を評価することで収束定理を証明する。劣解と優解は界面からの距離関数と、進行波解なる $v(x,t) = q(\varepsilon^{-1}x \cdot e - \varepsilon^{-2}ct)$ の形で与えられる解のアイデアから構成される。

本講演では初期曲面 Γ_0 をコンパクトな曲面とし、有限時間での界面の動きを考える。したがって界面はある大きな立方体 Q の内部に留まる。そこで本講演では各方程式を周期境界条件を導入して考える。各方程式の解の存在は [ElS2]、[CGG]、[ES] を参照せよ。また本講演では粘性解を単に解と言い、全て粘性解の意味で考える。厳密な証明は粘性解の理論を介してなされるが、ここでは話の簡略化のために解を滑らかなものとして通常の微分のように計算する。粘性解の詳しい定義等は [CIL] を参照せよ。

2. 主結果

2.1. Modified Allen–Cahn 方程式

本講演では非等方的 Allen–Cahn 方程式による界面運動の近似を、Evans–Soner–Souganidis([ESS]) の手法から考察する。この手法では Allen–Cahn 方程式の優解と劣解を構成し、比較定理を用いて解を評価する。ところが (1.1) は β による $\nabla v = 0$ での特異性が非常に強く、比較定理が得られない。Elliott–Schätzle([ElS2]) はこの困難を、比較定理を改良することで克服した。しかしここでは (1.1) を、[ElPS] にあるような比較定理が容易に得られる形に変形する。

関数 $\zeta\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数で次をみたすものとする。

$$\zeta(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma \le 1/2, \\ 0 & \text{if } \sigma \ge 3/4. \end{cases}$$

これを用いて $\tilde{\beta}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$\tilde{\beta}(p) = (1 - \zeta(|p|))\beta(p) + \Lambda_\beta \zeta(|p|)$$

と定義する。そして (1.1) のかわりに次の方程式を考える。

$$\tilde{\beta}(\nabla v)\partial_t v - \operatorname{div}\{\gamma(\nabla v) D\gamma(\nabla v)\} + \frac{1}{\varepsilon^2}(f(v) - \varepsilon\lambda a) = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T). \tag{2.1}$$

方程式 (2.1) の (1.1) に対する優位性は粘性解の理論がそのまま適用できること、とくに一般の比較定理が成立することである。

2.2. 距離関数

Allen–Cahn 方程式では通常の距離で Γ_t からの符号つき距離関数を導入した。しかし (1.1) や (2.1) の考察では γ の支持関数から得られる非等方的な'距離'を導入する方がより適切である。

関数 γ の支持関数 γ° を

$$\gamma^\circ(p) := \sup\{p \cdot q;\ \gamma(q) \le 1\}$$

で定義する。これを用い、非等方的な'距離' $d(x,y)$ を

$$d(x,y) := \gamma^\circ(x - y)$$

で定義する。部分集合 K と点 x の距離は

$$d(x,K) := \inf\{d(x,y);\ y \in K\}$$

で与えられる。界面 $\Gamma_t = \{x;\ u(x,t) = 0\}$ の符号つき距離関数 $d(x,t)$ は

$$d(x,t) := \begin{cases} d(x,\Gamma_t) & \text{if } x \in \{y;\ u(y,t) \ge 0\}, \\ -d(x,\Gamma_t) & \text{if } x \in \{y;\ u(y,t) < 0\} \end{cases}$$

で定義する。

2.3. 進行波解

進行波解は、Allen–Cahn 方程式における進行波解と同じものを導入する。次の常微分方程式をみたす定数 c と関数 q の組 (c,q) を考える。

$$\begin{cases} q''+cq'=f(q)-\varepsilon\lambda a \quad \text{in } \mathbb{R}, \\ q(\pm\infty)=h_{\pm},\ q(0)=h_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Aronson–Weinberger([AW]) は (c,q) の組の一意存在を証明している。また、Barles–Soner–Souganidis([BSS]) は (c,q) が h_-、h_0、h_+ から得られることを示している。以下に q の性質をまとめておく。

(i) 次をみたす $\hat{\varepsilon}$ が存在する; 正の定数 C_1、C_2、C_3 で任意の $\varepsilon\in(0,\hat{\varepsilon})$ に対し

$$\left.\begin{aligned} |q(s)^2-1| &\le C_1\exp(-C_2|s|)+C_3\varepsilon, \\ |q'(s)| &\le C_1\exp(-C_2|s|), \\ |q''(s)| &\le C_1\exp(-C_3|s|) \end{aligned}\right\} \quad \text{for } s\in\mathbb{R}$$

をみたすものが存在する。

(ii) 任意の $R>0$ に対し

$$\inf_{\varepsilon\in(0,\hat{\varepsilon})}\inf_{s\in[-R,R]} q'(s)>0$$

が成り立つ。

2.4. 収束定理

主結果を述べる。

Theorem 2.1. *(A1)-(A5)* を仮定する。O_0 を有界な開集合とし、$\Gamma_0=\partial O_0$ とする。$d_0\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を O_0 で正である Γ_0 の符号つき距離関数とする。u は d_0 を初期値とする (1.7) の解とし、$d(x,t)$ を Γ_t の符号つき距離関数とする。v は $q(d_0/\varepsilon)$ を初期値とする (2.1) の解とする。このとき、任意の $\theta>0$ に対し次をみたす $\delta=\delta(\theta)$、$\varepsilon_0=\varepsilon_0(\theta,\Lambda_\beta,\Lambda_\gamma)$、$C=C(\theta,\Lambda_\beta,\Lambda_\gamma)$ が存在する;
任意の $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$、$(x,t)\in\{(y,s);\ d(y,s)\le-\theta\}$ に対し

$$v(x,t)\le -1+C_1\exp\left(-\frac{C_2\delta}{\varepsilon}\right)+C\varepsilon \tag{2.3}$$

となる。

上の評価から $\varepsilon \to 0$ として $\{u < 0\}$ 上局所一様に $v \to -1$ を得る。$\{u > 0\}$ 上での評価は $-v$ と $-u$ がみたす方程式、すなわち各項を $\bar{\beta}(p) = \beta(-p)$、$\bar{\gamma}(p) = \gamma(-p)$、$\bar{f}(\sigma) = f(-\sigma)$、$\bar{a} = -a$ に置き換えた非等方的 Allen–Cahn 方程式と非等方的平均曲率流方程式の等高面方程式を考え、上の議論を繰り返せばよい。

上の結果の重要な応用としてクリスタラインによる界面の運動の Allen–Cahn 方程式による近似を考える。クリスタラインによる界面の運動は表面エネルギー密度関数 γ が滑らかさを持たない、または $\partial\{\gamma \leq 1\}$ が平らな面を持つような状況での非等方的平均曲率流方程式による運動として与えられる。Taylor([T]) などによって定式化されていて、Y. Giga–M.-H. Giga([GG]) が空間 2 次元でクリスタラインによる界面の運動の等高線法を与えている。我々の主結果は収束定理が γ の微分に依存しないことを示している。このことから、滑らかでない γ を近似する γ_τ を用いた非等方的 Allen–Cahn 方程式によりクリスタラインによる界面の運動の近似が得られる。

3. 証明のアイデア

主結果の証明は [ESS] の手法にそって解を評価するための優解を構成する。具体的には [ESS] の方法で次をみたす関数 $\psi = \psi_{\varepsilon,\delta}$ を構成する。

(i) 任意の θ に対しある $\delta > 0$、$C > 0$ で $\{(y,s);\ d(y,s) \leq -\theta\}$ 上 (2.3) をみたす。

(ii) 任意の $\delta > 0$ に対しある $\varepsilon_0 > 0$ で任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対し ψ は (1.1) の優解である。

(iii) $\psi(x,0) \leq q(d_0(x)/\varepsilon)$.

この構成した ψ が (2.1) の優解でもあることを証明する。

$$R_\varepsilon = \beta(\nabla\psi)\partial_t\psi - \mathrm{div}\{\gamma(\nabla\psi)D\gamma(\nabla\psi)\} + \frac{1}{\varepsilon^2}(f(\psi) - \varepsilon\lambda a)$$
$$\tilde{R}_\varepsilon = \tilde{\beta}(\nabla\psi)\partial_t\psi - \mathrm{div}\{\gamma(\nabla\psi)D\gamma(\nabla\psi)\} + \frac{1}{\varepsilon^2}(f(\psi) - \varepsilon\lambda a)$$

とおくと、直接計算から

$$\tilde{R}_\varepsilon = R_\varepsilon + (\Lambda_\beta - \beta(\nabla\psi))\zeta(|\nabla\psi|)\partial_t\psi$$

となることがわかる。したがってあとは $\partial_t\psi$ の評価が得られれば良い。

この $\partial_t\psi$ の評価が主結果の証明のもっとも重要なポイントである。何故ならばこの項を評価する際の証明において、[ElS2] は γ の微分のノルムを評価に用いているからである。その評価におけるもっとも重要な点は

$$\mathrm{div}D\gamma(D\gamma^\circ(p))$$

なる項の評価である。[ElS2] はこの項の評価を微分の直接計算から与えている。これに対し我々はこの項について、凸解析の理論を用いることにより

$$\mathrm{div} D\gamma(D\gamma^\circ(p)) = \frac{n-1}{\gamma^\circ(p)}$$

なる等式を得た。これにより γ の微分の依存なしに収束の評価を得ることができた。

References

[AC] S. Allen and J. Cahn, A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsing, Acta Metall 27(1979), 1084–1095

[AW] D. G. Aronson and H. F. Weinberger, Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics, Adv. in Math., 30(1978), 33–76

[BSS] G. Barles, H. M. Soner and P. E. Souganidis, Front propagation and phase field theory, SIAM J. Cont. Opt. 31(1993), 439–469

[C] X. Chen, Generation and propagation of interface in reaction-diffusion equations, J. Differential Equations, 96(1992), 116–141

[CGG] Y.-G. Chen, Y. Giga and S. Goto, Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations, J. Differential Geometry, 33(1991), 749–786

[CIL] M. G. Crandall, H. Ishii and P. L. Lions, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, Bull. Amer. Math. Soc., 27(1992), 1–67

[ElPS] C. M. Elliott, M. Paolini and R. Schätzle, Interface estimates for the fully anisotropic Allen-Cahn equation and anisotropic mean-curvature flow, Math. Models Methods. Appl. Sci., 6(1996), 1103–1118

[ElS1] C. M. Elliott and R. Schätzle, The limit of the anisotropic double-obstacle Allen-Cahn equation, Proc. Royal Soc. Edinburgh 126A(1996), 1217–1234

[ElS2] C. M. Elliott and R. Schätzle, The limit of the fully anisotropic double-obstacle Allen-Cahn equation in the nonsmooth case, SIAM J. Math. Anal., 28(1997), 274–303

[ES] L. C. Evans and J. Spruck, Motion of level sets by mean curvature, I, J. Differential Geometry, 33(1991), 635–681

[ESS] L. C. Evans, H. M. Soner and P. E. Souganidis, Phase transitions and generalized motion by mean curvature, Comm. Pure Appl. Math., 45(1992), 1097–1123

[GG] M.-H. Giga and Y. Giga, Generalized motion by nonlocal curvature in the plane, Arch. Ration. Mech. Anal., 159(2001), 295–333

[MWBCS] G. B. McFadden, A. A. Wheeler, R. J. Braun, S. R. Coriell and R. F. Sekerka, Phase field models for anisotropic interfaces, Phys. Rev. E, 48(1993), 2016–2024

[RSK] J. Rubinstein, P. Sternberg and J. B. Keller, Fast reaction, slow diffusion, and curve shortening, SIAM J. Appl. Math., 49(1989), 116–133

[T] J. Taylor, Constructions and conjectures in crystalline nondifferential geometry, In: Differential Geometry (eds. B. Lawson and K. Tanenblat), Proceedings of the Conference on Differential Geometry, Rio de Janeiro, Pitman Monographs in Pure and Applied Math., **52** (1991) pp.321–336, Pitman, London