HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	無限自由度の正準交換関係の表現とこれに同伴する第２量子化作用素について
Author(s)	細田, 優人
Citation	北海道大学. 修士(理学)
Issue Date	2014-03-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/54941
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	theses (master)
File Information	thesis.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

修士論文

無限自由度の正準交換関係の表現とこれに同伴する第２量子化作用素について

細田　優人

2014. 3

北海道大学大学院理学院
数学専攻博士前期課程

無限自由度の正準交換関係の表現とこれに同伴する第２量子化作用素について

細田　優人

目次

1　序文と主結果
1.1　CCR の表現
1.2　CCR の表現とフォック表現との関係
1.3　第２量子化作用素
1.4　同伴する第２量子化作用素として GSB ハミルトニアンが現れる CCR の表現

2　命題 1.2 、命題 1.3 、定理 1.4 の証明

3　定理 1.5 の証明

4　定理 1.6 の証明

5　定理 1.7、定理 1.8 の証明

6　付録

7　結語

8　参考文献

1　序文と主結果

場の量子論の数学的モデルを構成する上で基礎となるものがフォック空間である。特に、ボース場のモデルを構成する上で基礎となるものはボソンフォック空間と呼ばれ、その上で働く生成・消滅作用素は重要な役割をもち、正準交換関係（canonical commutation relations；CCR）という特徴的な交換関係を満たす。この代数的な関係式である CCR に着目し、これを満たすようなものを一般的に考察していくことにより、より普遍的な量子場の数学的構造が明らかとなる。

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ とその稠密な部分空間 $\mathcal{D}$ と、$\mathcal{D}$ 上で CCR を満たすような作用素の族の３つ組は、CCR の表現と呼ばれる。ボソンフォック空間、生成作用素によってフォック真空から生成される部分空間、消滅作用素の３つ組は CCR の表現であり、これをフォック表現と呼ぶ。CCR の表現はある同値関係によって分類されるが、CCR の表現がどのようなときにフォック表現と同値になるかという問題が考えられる。とくに筆者は、CCR の表現が真空をもちさえすれば、フォック表現に同値な CCR の表現をもとの表現にある意味で埋め込めるということを示すことができた（定理 1.4)。この問題を 1.2 節で扱う。

また、一般の CCR の表現においても、フォック表現における第２量子化作用素に相当するものを考えることができる。これを CCR の表現に同伴する第２量子化作用素と呼び、その諸性質について 1.3 節で扱う。

1.4 節では、ヒルベルト空間とボソンフォック空間のテンソル積ヒルベルト空間におけるある CCR の表現について論じた。この CCR の表現は筆者が考案したものであるが、第 2 量子化作用素をもつということを示すことができた（定理 1.7)。この同伴する第 2 量子化作用素は、一般化されたスピン-ボソンモデル（generalized spin-boson model）のハミルトニアン（GSB ハミルトニアン）に極めて類似した形で現れるという興味深い性質をもつ。

1.1　CCR の表現

まず、CCR の表現に関するいくつかの定義をしていく。これらは主に[2, pp.194-198]に準拠している。

$\mathcal{F},\mathcal{H}$ をヒルベルト空間、 $\mathcal{D}$ を $\mathcal{F}$ の稠密な部分空間、$\mathcal{V}$ を $\mathcal{H}$ の稠密な部分空間とする。ヒルベルト空間の内積とノルムをそれぞれ $(\cdot,\cdot)$ (左側について反線形、右側について線形), $\|\cdot\|$ と記す。また、線形作用素 T の定義域を $D(T)$ で表す。各 $f\in\mathcal{V}$ に対して、$\mathcal{F}$ 上の稠密に定義された線形作用素 $C(f)$ が対応して、以下の（C.1)~(C.3）を満たすとする。

(C.1)　任意の $f,g\in\mathcal{V}$ に対し $\mathcal{D}\subset D\big(C(f)C(g)\big)\cap D\big(C(f)^*C(g)\big)\cap D(C(f)C(g)^*)\cap D(C(f)^*C(g)^*)$

(C.2)(反線形性)　任意の $f,g\in\mathcal{V}$ と $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ に対して、$\mathcal{D}$ 上で、

$$C(\alpha f+\beta g)=\alpha^*C(f)+\beta^*C(g).$$

(C.3)(CCR)　任意の $\Psi\in\mathcal{D}$ と $f,g\in\mathcal{V}$ に対して、

$$[C(f),C(g)^*]\Psi=(f,g)\Psi,$$

$$[C(f),C(g)]\Psi=0,\quad [C(f)^*,C(g)^*]\Psi=0.$$

このとき、$\{\mathcal{F},\mathcal{D},\{C(f)|\,f\in\mathcal{V}\}\}$ を $\mathcal{V}$ によって添字づけられた、CCR の表現という。

さらに、この CCR の表現において、次の性質（ｉ),（ii）をみたす $\|\Omega\|=1$ なる $\Omega\in\mathcal{F}$ が存在するとき、これをこの表現における真空という。

（ｉ）　任意の $f\in\mathcal{V}$ に対して、$\Omega\in D\big(C(f)\big)$ であり、$C(f)\Omega=0$ が成立。

（ii）　任意の $n\in\mathbb{N}$ と $f,f_j\in\mathcal{V}\ (j=1,\cdots,n)$ に対して、

$$\Omega\in D(C(f_1)^*\cdots C(f_\mathrm{n})^*),$$

$$C(f_1)^*\cdots C(f_n)^*\Omega\in D\big(C(f)\big)\cap D(C(f)^*).$$

上記をみたす真空 Ω がスカラー倍を除いて一意的であるとき、この真空は一意的であるという。また、真空から生成される部分空間

$$\mathcal{F}_\mathrm{fin}(\mathcal{V})\coloneqq\mathcal{L}\big\{\Omega,C(f_1)^*\cdots C(f_\mathrm{n})^*\Omega\big|\,n\in\mathbb{N},f_\mathrm{j}\in\mathcal{V},j=1,\cdots,n\big\}$$

が定義される。$C(f)$ は $\mathcal{F}_\mathrm{fin}(\mathcal{V})$ 上でも CCR を満たすことが示される。

例 1.1

$A(\cdot)$ をボソンフォック空間 $\mathcal{F}_\mathrm{b}(\mathcal{H})$ 上の消滅作用素とし（6 章の付録を参照)、$\Omega_\mathcal{H}\coloneqq(1,0,\cdots)\in\mathcal{F}_\mathrm{b}(\mathcal{H})$ をフォック真空、フォック真空から生成される部分空間を、

$$\mathcal{F}_\mathrm{b,fin}(\mathcal{V})\coloneqq\mathcal{L}\big\{\Omega_\mathcal{H},A(f_1)^*\cdots A(f_\mathrm{n})^*\Omega_\mathcal{H}\big|\,n\in\mathbb{N},f_\mathrm{j}\in\mathcal{V},j=1,\cdots,n\big\}$$

とすると、

$$\pi_\mathrm{F}(\mathcal{V})\coloneqq\big\{\mathcal{F}_\mathrm{b}(\mathcal{H}),\mathcal{F}_\mathrm{b,fin}(\mathcal{V}),\{A(f)|\,f\in\mathcal{V}\}\big\}$$

は $\mathcal{V}$ によって添字づけられた CCR の表現となる[2, 例 4-5]。これを CCR のフォック表現という。 また $\Omega_\mathcal{H}$ は上の定義における真空の性質をみたし、真空は一意的である。

いま、$\pi_\mathcal{V}\coloneqq\{\mathcal{F},\mathcal{D},\{C(f)|\,f\in\mathcal{V}\}\}$ を真空 Ω をもつ CCR の表現とすると、全射な等長作用素 $U:\mathcal{F}_\mathrm{fin}(\mathcal{V})\longrightarrow\mathcal{F}_\mathrm{b,fin}(\mathcal{V})$ で、任意の $n\in\mathbb{N},f_\mathrm{j}\in\mathcal{V}\ (j=1,\cdots,n)$ に対して

$$U\Omega=\Omega_\mathcal{H},\ \ U\,C(f_1)^*\cdots C(f_\mathrm{n})^*\Omega=\ A(f_1)^*\cdots A(f_\mathrm{n})^*\Omega_\mathcal{H}$$

をみたすものが存在する[2, 命題 4-61]。さらに拡大定理を用いて U^{-1}を $\mathcal{F}_\mathrm{b}(\mathcal{H})$ 上に拡大したものを $\widetilde{U^{-1}}$とおく。$\widetilde{\mathcal{F}}\coloneqq R\big(\widetilde{U^{-1}}\big)$ とおくと、これは $\mathcal{F}_\mathrm{fin}(\mathcal{V})$ をその稠密な部分空間として含む $\mathcal{F}$ の閉部分空間となり、次の補題がいえる。ただし $R(\cdot)$ は作用素の値域を表す。

補題 1.1

$\pi_{\mathcal{V}} \coloneqq \{\mathcal{F}, \mathcal{D}, \{C(f) \mid f \in \mathcal{V}\}\}$ を真空 Ω をもつ CCR の表現とする。このときユニタリ作用素 $U_{\mathrm{b}} : \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ で、

$$U_{\mathrm{b}}\Omega_{\mathcal{H}} = \Omega, \quad U_{\mathrm{b}}\, A\left(f_1\right)^* \cdots A\left(f_{\mathrm{n}}\right)^* \Omega_{\mathcal{H}} = C\left(f_1\right)^* \cdots C\left(f_{\mathrm{n}}\right)^* \Omega$$

となるものが一意的に存在する。とくに、$U_{\mathrm{b}} = \widetilde{U^{-1}}$ であり、$U_{\mathrm{b}}\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V}) = \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ となる。

ところでこの $\tilde{\mathcal{F}}$ は必ずしも $\mathcal{F}$ と一致するとは限らない。これらが一致するための必要十分条件が、次の命題である。

命題 1.2

$\pi_{\mathcal{V}} \coloneqq \{\mathcal{F}, \mathcal{D}, \{C(f) \mid f \in \mathcal{V}\}\}$ を真空 Ω をもつ CCR の表現とする。 $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ となるための必要十分条件は、$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ が $\mathcal{F}$ で稠密となることである。

1.2　CCR の表現とフォック表現との関係

$\pi_{\mathcal{V}} \coloneqq \{\mathcal{F}, \mathcal{D}, \{C(f) \mid f \in \mathcal{V}\}\}$, $\pi'_{\mathcal{V}} \coloneqq \{\mathcal{F}', \mathcal{D}', \{C'(f) \mid f \in \mathcal{V}\}\}$ をそれぞれ $\mathcal{V}$ によって添字づけられた CCR の表現とする。ユニタリ作用素 $U : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ が存在し、任意の $f \in \mathcal{V}$ に対して $\overline{C'(f)} = U\overline{C(f)}U^{-1}$ が成立するとき、 $\pi_{\mathcal{V}}$ と $\pi'_{\mathcal{V}}$ は同値であるといい、これを $\pi_{\mathcal{V}} \cong \pi'_{\mathcal{V}}$ と表す。ただし $\bar{T}$ は作用素 T の閉包を表す。

あたえられた CCR の表現 $\{\mathcal{F}, \mathcal{D}, \{C(f) \mid f \in \mathcal{V}\}\}$ がフォック表現と同値であるための十分条件としては[2, 命題 4-61]があるが、これは必要条件でもあることが示せた。また真空さえ存在すれば、フォック表現と同値になる表現が、もとの表現の $C(f)$ と真空を用いて構成できることも示せた。

これらをまとめたのが次の命題と定理である。

命題 1.3

$\pi_{\mathcal{V}} \coloneqq \{\mathcal{F}, \mathcal{D}, \{C(f) \mid f \in \mathcal{V}\}\}$ を CCR の表現とする。$\pi_{\mathcal{V}}$ がフォック表現 $\pi_{\mathrm{F}}(\mathcal{V})$ と同値であるための必要十分条件は、$\pi_{\mathcal{V}}$ が真空 Ω をもち、$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ が $\mathcal{F}$ で稠密であり、任意の $f \in \mathcal{V}$ に対して $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ が $C(f)^*$ の芯となることである。

定理 1.4

$\pi_{\mathcal{V}} \coloneqq \{\mathcal{F}, \mathcal{D}, \{C(f) \mid f \in \mathcal{V}\}\}$ を真空 Ω をもつ CCR の表現とする。このとき補題 1.1 の $U_{\mathrm{b}} : \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ により、$\tilde{\mathcal{F}}$ 上の閉作用素 $\tilde{C}(f) \coloneqq \overline{C(f)} \restriction U_{\mathrm{b}} D\left(A(f)\right)$ が稠密に定義され、

$$\tilde{\pi}_{\mathcal{V}} \coloneqq \{\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V}), \{\tilde{C}(f) \mid f \in \mathcal{V}\}\}$$

は CCR の表現となり、 $\pi_{\mathrm{F}}(\mathcal{V}) \cong \tilde{\pi}_{\mathcal{V}}$ となる。

注意 1.1

さらにこのとき $\tilde{C}(f)^* = C(f)^* \restriction U_{\mathrm{b}} D(A(f)^*)$ であることがいえ、$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V}) \subset D\big(A(f)\big)$, $\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V}) \subset D(A(f)^*)$ から、

$$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V}) \subset D\left(\tilde{C}(f)\right), \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V}) \subset D\big(\tilde{C}(f)^*\big)$$

であり、真空 Ω と $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ は $\tilde{\pi}_{\mathcal{V}}$ における真空とその生成する部分空間にもなっている。

$\tilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}, \tilde{C}(f) \subset \overline{C(f)}$ より、$\tilde{\pi}_{\mathcal{V}}$ は $\pi_{\mathcal{V}}$ に埋め込まれた表現であると思うことができるが、命題 1.2 により、$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ が $\mathcal{F}$ で稠密でないときはこれは真な埋め込みとなる。

1.3　第２量子化作用素

$\pi_{\mathcal{V}} \coloneqq \{\mathcal{F}, \mathcal{D}, \{C(f) \mid f \in \mathcal{V}\}\}$ を CCR の表現とする。T を $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉作用素とし、$T = U_T|T|$ を T の標準極分解とする。$\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D\left(|T|^{\frac{1}{2}}\right)$ を $\mathcal{H}$ の完全正規直交系で、

$$U_T|T|^{\frac{1}{2}}e_n, |T|^{\frac{1}{2}}e_n \in \mathcal{V}, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1.1}$$

をみたすものとする。 $\mathcal{F}$ 上の線形作用素 $H^{(C)}(T)$ で、 $\mathcal{D} \subset D\left(H^{(C)}(T)\right)$ かつ任意の $\Psi, \Phi \in \mathcal{D}$ に対して、

$$\lim_{N\to\infty}\Big(\Phi, \sum_{n=1}^{N} C(U_T|T|^{\frac{1}{2}}e_n)^* C(|T|^{\frac{1}{2}}e_n)\Psi\Big) = \big(\Phi, H^{(C)}(T)\Psi\big) \tag{1.2}$$

をみたすようなものが存在するとき、$\pi_{\mathcal{V}}$ は T に関して第２量子化作用素をもつといい、$H^{(C)}(T)$ を $\pi_{\mathcal{V}}$ と T に同伴する第２量子化作用素とよぶ。この定義は[2, p.199]によるものであるが、ここでは $H^{(C)}(T)$ は完全正規直交系の選び方に依存してもよいものとしている。

フォック表現における第２量子化作用素 $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ は、上記の定義における第２量子化作用素となる[2, 例 4-6]。第２量子化作用素 $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の定義については、6 章の付録にまとめた。

ある条件のもとで、この $H^{(C)}(T)$ は $C(f)$ とある交換関係をみたすことがいえるが[2, 命題 4-61]、この逆に、 $\pi_{\mathcal{V}}$ が真空を一意にもち、 $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ 上である作用素 $H(T)$ が $C(f)$ といま言及したものと同じ型の交換関係をみたせば、 $H(T)$ は上記の第２量子化作用素の定義をみたすということが示せた。これが次の定理である。

定理 1.5

T を $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉作用素で $\mathcal{V} \subset D(T) \cap D(T^*)$ をみたすものとし、$\pi_{\mathcal{V}} \coloneqq \{\mathcal{F}, \mathcal{D}, \{C(f) | f \in \mathcal{V}\}\}$ を一意的な真空 Ω をもつ CCR の表現とする。 $\mathcal{F}$ 上の線形作用素 $H(T)$ で、$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V}) \subset D\big(H(T)\big)$ かつ $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ 上で交換関係

$$[H(T), C(f)^*] = C(Tf)^*, \tag{1.3}$$

$$[H(T), C(f)] = -C(T^* f) \tag{1.4}$$

をみたすものが存在するとする。さらに（1.1）をみたす $\mathcal{H}$ の完全正規直交系 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D\left(|T|^{\frac{1}{2}}\right)$ が存在すれば、$H^{(C)}(T) \coloneqq H(T) - (\Omega, H(T)\Omega)$ は $\Psi, \Phi \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ に対し（1.2）をみたす。

真空をもつ CCR の表現に同伴する第２量子化作用素が、フォック表現に同伴する第２量子化作用素 $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ を用いてどのように表せるかを述べたものが次の定理である。

定理 1.6

T を $\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された閉作用素で $\mathcal{V} \subset D(T)$ をみたすものとし、 $\pi_{\mathcal{V}} \coloneqq \{\mathcal{F}, \mathcal{D}, \{C(f) | f \in \mathcal{V}\}\}$ を真空 Ω をもち、 T に関する第２量子化作用素 $H^{(C)}(T)$ をもつ CCR の表現とする。さらに $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{D}$ とするとき、次が成り立つ。

（ｉ） 任意の $\Psi, \Phi \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ に対して、

$$\left(\Phi, H^{(C)}(T)\Psi\right) = \left(\Phi, U_{\mathrm{b}}\, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) U_{\mathrm{b}}^{-1}\Psi\right)$$

が成り立つ。

（ii） さらに $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ が稠密、T が $\mathcal{V}$ を芯とする自己共役作用素、$H^{(C)}(T)$ が対称作用素であるとき、$H^{(C)}(T)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ 上で本質的に自己共役となり、

$$\overline{H^{(C)}(T)} = U_{\mathrm{b}}\, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) U_{\mathrm{b}}^{-1}$$

となる。

注意 1.2

（ｉ）において、さらに $H^{(C)}(T)\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ を仮定すれば、 $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ 上で $H^{(C)}(T) = U_{\mathrm{b}}\, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) U_{\mathrm{b}}^{-1}$ が成り立つことがいえる。

（ii）においては $H^{(C)}(T)$ の対称性を仮定したが、T が非負な自己共役作用素であるときはこれは自然な仮定である。なぜならこのとき、任意の $\Psi, \Phi \in \mathcal{D}$ に対して、

$$\left(\Phi, H^{(C)}(T)\Psi\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\Phi, \sum_{n=1}^{N} C\left(T^{\frac{1}{2}}e_n\right)^* C\left(T^{\frac{1}{2}}e_n\right)\Psi\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} C\left(T^{\frac{1}{2}}e_n\right)^* C\left(T^{\frac{1}{2}}e_n\right)\Phi, \Psi\right)$$

$$= \left(H^{(C)}(T)\Phi, \Psi\right)$$

が成立するが、さらに $\mathcal{D}$ が $H^{(C)}(T)$ の芯であることを仮定するとこれが任意の $\Psi, \Phi \in D(H^{(C)}(T))$ についていえ、$H^{(C)}(T)$ の対称性が従うためである。

1.4　同伴する第２量子化作用素としてGSBハミルトニアンが現れるCCRの表現

$\mathcal{H}, \mathcal{K}$ をヒルベルト空間、$\mathcal{V}$ を $\mathcal{H}$ の稠密な部分空間、$\mathcal{D}$ を $\mathcal{K}$ の稠密な部分空間とする。$\{T_j\}_{j=1}^{J}$ $(J \in \mathbb{N})$ を $\mathcal{K}$ 上の対称作用素の族で、$\mathcal{D} \subset \bigcap_{j,k=1}^{J} D(T_j T_k)$ かつ $\mathcal{D}$ 上で可換であるものとする。いま $g_j \in \mathcal{H}$ $(j = 1, \cdots, J)$ を固定し、任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して、$\mathcal{K} \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H})$ 上の線形作用素

$$C(f) := I \otimes A(f) + \sum_{j=1}^{J} (f, g_j) T_j \otimes I$$

を考える。$\mathcal{D} \hat{\otimes} \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})$ 上で、

$$C(f)^* = I \otimes A(f)^* + \sum_{j=1}^{J} (g_j, f) T_j \otimes I$$

であり、$C(f)$ は、1.1 節の (C.1)~(C.3) における $\mathcal{D}$ を $\mathcal{D} \hat{\otimes} \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})$ と置き換えたものをみたすことがわかる。ただし $\hat{\otimes}$ は代数的テンソル積を表す。よって、

$$\pi_{\mathcal{V}} := \left\{\mathcal{K} \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}), \mathcal{D} \hat{\otimes} \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V}), \{C(f) \mid f \in \mathcal{V}\}\right\}$$

は CCR の表現となる。この表現は $g_j \in D(S), \mathcal{V} \subset D(S)$ なる $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 S に関して第２量子化作用素 $H^{(C)}(S)$ をもち、さらにこの $H^{(C)}(\cdot)$ はある特徴的な交換関係をみたす。この第２量子化作用素についてまとめたものが次の２つの定理である。

定理 1.7

S を $g_j \in D(S)$ $(j = 1, \cdots, J), \mathcal{V} \subset D(S)$ なる $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とし、$S = U_S|S|$ を S の標準極分解とする。$U_S|S|^{\frac{1}{2}}e_n, |S|^{\frac{1}{2}}e_n \in \mathcal{V}$, $n \in \mathbb{N}$ をみたす $\mathcal{H}$ の完全正規直交系

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D\left(|S|^{\frac{1}{2}}\right)$ が存在するとき、$\pi_{\mathcal{V}}$ と S に同伴する第２量子化作用素 $H^{(C)}(S)$ が存在し、$\mathcal{D} \hat{\otimes} \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(S))$ 上で、

$$H^{(C)}(S) = (\sum_{j,k=1}^{J} (g_j, Sg_k) T_j T_k) \otimes I + I \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + \sqrt{2} \sum_{j=1}^{J} T_j \otimes \Phi_{\mathrm{s}}(Sg_j)$$

という形をもつ。ただし $\Phi_{\mathrm{s}}(f) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2}}(A(f) + A(f)^*)$ は Segal の場の作用素を表す。

定理 1.8

S, S_1, S_2 をそれぞれ $\mathcal{H}$ 上の対称作用素とし、$g_j \in D(S), D(S_1), D(S_2)$ $(j = 1, \cdots, J)$ とする。$H^{(C)}(\cdot)$ を定理 1.7 の形のものとするとき、次の交換関係が成立する。

（ｉ） 任意の $f \in D(S)$ に対して、$\bigcap_{j,k,l=1}^{J} D(T_j T_k T_l) \hat{\otimes} \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(D(S))$ 上で、

$$\left[H^{(C)}(S), C(f)^*\right] = C(Sf)^*,$$
$$\left[H^{(C)}(S), C(f)\right] = -C(S^* f)$$

が成り立つ。

（ii） $D([S_1, S_2])$ は稠密であり、$g_j \in D([S_1, S_2])$ $(j = 1, \cdots, J)$ であるとすると、$\bigcap_{i,j,k,l=1}^{J} D(T_i T_j T_k T_l) \hat{\otimes} \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(D([S_1, S_2]))$ 上で、

$$\left[H^{(C)}(S_1), H^{(C)}(S_2)\right] = H^{(C)}([S_1, S_2]) - 2 \sum_{j=1}^{J} T_j \otimes A\left([S_1, S_2] g_j\right)$$

が成り立つ。

$\mathcal{H}, \mathcal{K}$ をヒルベルト空間とすると、一般化されたスピン-ボソンモデルのためのヒルベルト空間は $\mathcal{K} \otimes \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H})$ であたえられる。ω を $\mathcal{H}$ 上の非負な自己共役作用素、A を $\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素、B_j を $\mathcal{K}$ 上の対称作用素、$\lambda_j \in \mathcal{H}$ $(j = 1, \cdots, J\,;\, J < \infty)$ とすると一般化されたスピン-ボソンモデルのハミルトニアンは、

$$H(\alpha) := A \otimes I + I \otimes d\Gamma_b(\omega) + \alpha \overline{\sum_{j=1}^{J} B_j \otimes \Phi_s(\lambda_j)}$$

という形で定義され、これを GSB ハミルトニアンとよぶ[3, 13-6 節][4]。ここで $\alpha \in \mathbb{R}$ は結合定数を表すパラメータである。ただし[4]においては $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ $(d \in \mathbb{N})$, ω はほとんどいたるところ有限な $\mathbb{R}^d$ 上の非負値ボレル可測関数によってあたえられるかけ算作用素として考えられている。

定理 1.7 における $H^{(C)}(S)$ の形はこの GSB ハミルトニアンの形と極めてよく似ている。

たとえば、$J=1,\ T_1$を自己共役作用素、S を非負な自己共役作用素とすると $H^{(C)}(S)$ は GSB ハミルトニアンの定義を満足する。

2　命題 1.2 、命題 1.3 、定理 1.4 の証明

命題 1.2 の証明

十分条件は有界作用素の拡大定理により従う。必要条件を示す。任意の $n\in\mathbb{N}, f_{\mathrm{j}}\in\mathcal{V}\ (j=1,\cdots,n)$ に対して、$(C(f_1)^*\cdots C(f_{\mathrm{n}})^*\Omega,\Psi)=0, (\Omega,\Psi)=0$ なる $\Psi\in\mathcal{F}$ をとる。いま $\widetilde{\mathcal{F}}=R(U_{\mathrm{b}})=\mathcal{F}$ から、ある $\Phi\in\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H})$ を用いて $\Psi=U_{\mathrm{b}}\Phi$ と表せる。ここで、

$$\begin{aligned}(C(f_1)^*\cdots C(f_{\mathrm{n}})^*\Omega,\Psi)&=(U_{\mathrm{b}}A(f_1)^*\cdots A(f_{\mathrm{n}})^*\Omega_{\mathcal{H}},U_{\mathrm{b}}\Phi)\\&=(A(f_1)^*\cdots A(f_{\mathrm{n}})^*\Omega_{\mathcal{H}},\Phi),\\(\Omega,\Psi)&=(\Omega_{\mathcal{H}},\Phi)\end{aligned}$$

より、$\Phi\in\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})^{\perp}=\{0\}$ となり、$\Psi=0$ が従う。$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})^{\perp}=\{0\}$ より、$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ は稠密となる。■

命題 1.3 の証明

十分条件は[2, 命題 4-61]による。必要条件を示す。対応 $\pi_{\mathcal{V}}\cong\pi_{\mathrm{F}}(\mathcal{V})$ をあたえる $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H})$ へのユニタリ作用素を U とおくと、$\Omega:=U^{-1}\Omega_{\mathcal{H}}$ は $\pi_{\mathcal{V}}$ における真空となる。いま $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ が定義でき、$A(f)^*=UC(f)^*U^{-1}$ より、任意の $n\in\mathbb{N}, f_{\mathrm{j}}\in\mathcal{V}\ (j=1,\cdots,n)$ に対して、

$$U^{-1}A(f_1)^*\cdots A(f_{\mathrm{n}})^*\Omega_{\mathcal{H}}=C(f_1)^*\cdots C(f_{\mathrm{n}})^*\Omega$$

が成立する。よって $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})=U^{-1}\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})$ であり、$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})$ の稠密性と U^{-1} のユニタリ性から $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ の稠密性が従う。

また $A(f)^*=UC(f)^*U^{-1}$ の両辺を$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})$ に制限することにより、

$$A(f)^*\restriction\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})=U\big(C(f)^*\restriction\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})\big)U^{-1}$$

となるが、両辺の閉包をとると、

$$A(f)^*=\overline{A(f)^*\restriction\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})}=U\overline{C(f)^*\restriction\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})}U^{-1}$$

より、$C(f)^*=\overline{C(f)^*\restriction\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})}$ となり $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ は $C(f)^*$ の芯となる。■

定理 1.4 の証明

$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})=U_{\mathrm{b}}\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})$ と $\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})$ の稠密性により、$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ は $\widetilde{\mathcal{F}}=R(U_{\mathrm{b}})$ で稠密である。いま $\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})$ 上で $U_{\mathrm{b}}A(f)=C(f)U_{\mathrm{b}}$ が成立している。任意の $\Phi\in D\big(A(f)\big)$ に対し、$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})$ は $A(f)$ の芯より、$\Phi_n\in\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})\ (n\in\mathbb{N})$ で、

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n=\Phi,\qquad\lim_{n\to\infty}A(f)\Phi_n=A(f)\Phi$$

となるようなものがとれる。$U_{\mathrm{b}}A(f)\Phi_n \to U_{\mathrm{b}}A(f)\Phi\ (n\to\infty)$ より、$U\Phi \in D\big(\overline{C(f)}\big)$ かつ、

$$U_{\mathrm{b}}A(f)\Phi_n = C(f)U_{\mathrm{b}}\Phi_n \to \overline{C(f)}U_{\mathrm{b}}\Phi\ (n\to\infty)$$

であり、$U_{\mathrm{b}}A(f)\Phi = \overline{C(f)}U_{\mathrm{b}}\Phi$ となる。ここで、

$$\tilde{C}(f) \coloneqq \overline{C(f)} \restriction U_{\mathrm{b}}D\big(A(f)\big)$$

とおくと、上の関係からこれは $\tilde{\mathcal{F}}$ 上の線形作用素となる。$\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V}) \subset D\big(A(f)\big)$ より、$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V}) \subset U_{\mathrm{b}}D\big(A(f)\big) \subset \tilde{\mathcal{F}}$ であり、$A(f)$ の閉性もあわせると $\tilde{C}(f)$ は $\tilde{\mathcal{F}}$ 上で稠密に定義された閉作用素となることがわかる。さらに作用素としての等号

$$U_{\mathrm{b}}A(f)U_{\mathrm{b}}^{-1} = \tilde{C}(f)$$

が成立する。同様にして $\tilde{\mathcal{F}}$ 上の線形作用素 $\hat{C}(f) \coloneqq C(f)^* \restriction U_{\mathrm{b}}D(A(f)^*)$ も定義でき、$U_{\mathrm{b}}A(f)^*U_{\mathrm{b}}^{-1} = \hat{C}(f)$ となる。一方 $U_{\mathrm{b}}A(f)^*U_{\mathrm{b}}^{-1} = \tilde{C}(f)^*$ より、

$$\tilde{C}(f)^* = \hat{C}(f) = C(f)^* \restriction U_{\mathrm{b}}D(A(f)^*)$$

となる。

$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ 上で $\tilde{C}(f) = C(f), \tilde{C}(f)^* = C(f)^*$ となるので、$\{\tilde{C}(f) \mid f \in \mathcal{V}\}$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ 上で (C.1)~(C.3) をみたす。以上から、

$$\tilde{\pi}_{\mathcal{V}} \coloneqq \{\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V}), \{\tilde{C}(f) \mid f \in \mathcal{V}\}\}$$

は CCR の表現であり、$\pi_{\mathrm{F}}(\mathcal{V}) \cong \tilde{\pi}_{\mathcal{V}}$ となる。■

3　定理 1.5 の証明

$\Psi = C(f_1)^* \cdots C(f_{\mathrm{n}})^*\Omega$ に対し、(1.3) を繰り返し用いて、

$$H(T)\Psi = C(f_1)^* \cdots C(f_{\mathrm{n}})^*H(T)\Omega + \sum_{j=1}^{n} C(f_1)^* \cdots C\big(Tf_j\big)^* \cdots C(f_n)^*\Omega$$

と変形できるが、(1.4) と真空 Ω の性質より、任意の $f \in \mathcal{V}$ に対して $C(f)H(T)\Omega = 0$ を得る。ここで真空の一意性から、$H(T)\Omega = \alpha\Omega$ とかける。ただし $\alpha = (\Omega, H(T)\Omega)$ である。よって、

$$(H(T) - \alpha)\Psi = \sum_{j=1}^{n} C(f_1)^* \cdots C\big(Tf_j\big)^* \cdots C(f_n)^*\Omega$$

となる。補題 1.1 の U_{b} を用いて、

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{b}}^{-1}(H(T) - \alpha)\Psi &= \sum_{j=1}^{n} A(f_1)^* \cdots A\big(Tf_j\big)^* \cdots A(f_n)^*\,\Omega_{\mathcal{H}} \\ &= d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)A(f_1)^* \cdots A(f_n)^*\Omega_{\mathcal{H}} \\ &= d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)U_{\mathrm{b}}^{-1}\Psi \end{aligned}$$

となり、 $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ 上で $U_{\mathrm{b}}^{-1}(H(T) - \alpha) = d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)U_{\mathrm{b}}^{-1}$ が成立する。いま、任意の $\Psi, \Phi \in$

$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ に対して、

$$
\begin{aligned}
(\Psi,(H(T)-\alpha)\Phi) &= \left(U_{\mathrm{b}}^{-1}\Psi, U_{\mathrm{b}}^{-1}(H(T)-\alpha)\Phi\right) \\
&= \left(U_{\mathrm{b}}^{-1}\Psi, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)U_{\mathrm{b}}^{-1}\Phi\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}(U_{\mathrm{b}}^{-1}\Psi, \sum_{n=1}^{N} A(\,U_T|T|^{\frac{1}{2}}e_n)^* A(|T|^{\frac{1}{2}}e_n)U_{\mathrm{b}}^{-1}\Phi) \\
&= \lim_{N\to\infty}(\Psi, \sum_{n=1}^{N} C(\,U_T|T|^{\frac{1}{2}}e_n)^* C(|T|^{\frac{1}{2}}e_n)\,\Phi)
\end{aligned}
$$

となる。ただし３つ目の等号においては $U_{\mathrm{b}}^{-1}\Psi, U_{\mathrm{b}}^{-1}\Phi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})$ であることから[2, 命題 4-29（ⅱ)]を用いた。■

4　定理 1.6 の証明

（ⅰ）　$H^{(C)}(T)$ の定義から任意の $\Psi,\Phi \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ に対して、

$$
\begin{aligned}
\left(\Phi, H^{(C)}(T)\Psi\right) &= \lim_{N\to\infty}(\,\Phi, \sum_{n=1}^{N} C(\,U_T|T|^{\frac{1}{2}}e_n)^* C(|T|^{\frac{1}{2}}e_n)\,\Psi) \\
&= \lim_{N\to\infty}(U_{\mathrm{b}}^{-1}\,\Phi, U_{\mathrm{b}}^{-1}\sum_{n=1}^{N} C(\,U_T|T|^{\frac{1}{2}}e_n)^* C(|T|^{\frac{1}{2}}e_n)\,\Psi) \\
&= \lim_{N\to\infty}(\,U_{\mathrm{b}}^{-1}\Phi, \sum_{n=1}^{N} A(\,U_T|T|^{\frac{1}{2}}e_n)^* A(|T|^{\frac{1}{2}}e_n)\,U_{\mathrm{b}}^{-1}\Psi) \\
&= (\Phi, U_{\mathrm{b}}\,d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)U_{\mathrm{b}}^{-1}\Psi)
\end{aligned}
$$

となる。ただし４つ目の等号においては $U_{\mathrm{b}}^{-1}\Phi, U_{\mathrm{b}}^{-1}\Psi \in \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})$ であることから[2, 命題 4-29（ⅱ)]を用いた。

（ⅱ）　いま $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ は稠密より、（ⅰ）から $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ 上で $H^{(C)}(T) = U_{\mathrm{b}}\,d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)U_{\mathrm{b}}^{-1}$ が成り立つ。よって $\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})$ 上で $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) = U_{\mathrm{b}}^{-1}H^{(C)}(T)U_{\mathrm{b}}$ が成立する。仮定から U_{b} は $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H})$ から $\mathcal{F}$ へのユニタリ作用素となり、$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ は $\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(\mathcal{V})$ 上で本質的に自己共役であることから近似議論により、$H^{(C)}(T)$ は　$\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{V})$ 上で本質的に自己共役となり、作用素の等式

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) = U_{\mathrm{b}}^{-1}\overline{H^{(C)}(T)}U_{\mathrm{b}}$$

が成立する。よって $\overline{H^{(C)}(T)} = U_{\mathrm{b}}\, d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)U_{\mathrm{b}}^{-1}$ が得られる。■

5　定理 1.7、定理 1.8 の証明

定理 1.7 の証明

まず、S が自己共役であるとき U_S は自己共役であり、U_S と $|S|^{\frac{1}{2}}$ は可換であることに注意する[1, 2.11]。$\mathcal{D}\,\hat{\otimes}\,\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}\big(D(S)\big)$ 上で、

$$\begin{aligned}
C(\,U_S|S|^{\frac{1}{2}}e_n)^*C(|S|^{\frac{1}{2}}e_n) &= \left(\sum_{j,k=1}^{J}\left(g_j, U_S|S|^{\frac{1}{2}}e_n\right)(|S|^{\frac{1}{2}}e_n,\ g_k)T_jT_k\right)\otimes I \\
&\quad + \sum_{j=1}^{J}T_j\otimes\{\left(g_j, U_S|S|^{\frac{1}{2}}e_n\right)A(|S|^{\frac{1}{2}}e_n) + \left(|S|^{\frac{1}{2}}e_n, g_j\right)A\left(U_S|S|^{\frac{1}{2}}e_n\right)^*\} \\
&\quad + I\otimes A\left(U_S|S|^{\frac{1}{2}}e_n\right)^*A(|S|^{\frac{1}{2}}e_n)
\end{aligned}$$

と表せる。右辺の３項をそれぞれ順に $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, A_3^{(n)}$ とおくと、$\Psi, \Phi \in \mathcal{D}\,\hat{\otimes}\,\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}\big(D(S)\big)$ に対して、

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}A_1^{(n)}\Phi &= \left\{\left(\sum_{j,k=1}^{J}\sum_{n=1}^{N}\left(U_S|S|^{\frac{1}{2}}g_j, e_n\right)(e_n,\ |S|^{\frac{1}{2}}g_k)T_jT_k\right)\otimes I\right\}\Phi \\
&\to \left\{\sum_{j,k=1}^{J}\left(U_S|S|^{\frac{1}{2}}g_j, |S|^{\frac{1}{2}}g_k\right)T_jT_k\otimes I\right\}\Phi\ \ (N\to\infty) \\
&= \left\{\sum_{j,k=1}^{J}\left(g_j, Sg_k\right)T_jT_k\otimes I\right\}\Phi,
\end{aligned}$$

$$\left(\Psi, \sum_{n=1}^{N} A_2^{(n)}\Phi\right) = \sum_{j=1}^{J}(\Psi, T_j \otimes \{A(|S|^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{N}\left(e_n, U_S|S|^{\frac{1}{2}}g_j\right)e_n)$$

$$+ A\left(U_S|S|^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{N}\left(e_n, |S|^{\frac{1}{2}}g_j\right)e_n\right)^{*}\}\,\Phi)$$

$$\to \sum_{j=1}^{J}\left(\Psi, \{T_j \otimes \left(A\left(Sg_j\right) + A\left(Sg_j\right)^{*}\right)\}\Phi\right)\ (N \to \infty)$$

$$= (\Psi, \sqrt{2}(\sum_{j=1}^{J} T_j \otimes \Phi_{\mathrm{s}}\left(Sg_j\right))\Phi),$$

$$\left(\Psi, \sum_{n=1}^{N} A_3^{(n)}\Phi\right) = \left(\Psi, \left\{I \otimes \sum_{n=1}^{N} A\left(U_S|S|^{\frac{1}{2}}e_n\right)^{*} A\left(|S|^{\frac{1}{2}}e_n\right)\right\}\Phi\right)$$
$$\to \left(\Psi, \left(I \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)\right)\Phi\right)\ (N \to \infty)$$

となる。 $A_2^{(n)}$ に関する収束性については、CCR を繰り返し用い内積の連続性を使うことで容易に示される。以上から、

$$\lim_{N\to\infty}(\Psi, \sum_{n=1}^{N} C(\,U_S|S|^{\frac{1}{2}}e_n)^{*}C(|S|^{\frac{1}{2}}e_n)\,\Phi)$$

$$= (\Psi, \{\,(\sum_{j,k=1}^{J}(g_j, Sg_k)T_jT_k\,) \otimes I\ + I \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}(S) + \sqrt{2}\sum_{j=1}^{J} T_j \otimes \Phi_{\mathrm{s}}\left(Sg_j\right)\}\Phi)$$

となり、$\pi_{\mathcal{V}}$ は S に関して第２量子化作用素をもつ。■

定理 1.8 の証明

（ｉ） $\bigcap_{j,k,l=1}^{J} D\left(T_jT_kT_l\right) \widehat{\otimes} \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}\left(D(S)\right)$ 上で、

$$\left[H^{(C)}(S), C(f)^{*}\right] = I \otimes [d\Gamma_{\mathrm{b}}(S), A(f)^{*}] + \sqrt{2}\sum_{j=1}^{J} T_j \otimes \left[\Phi_{\mathrm{s}}\left(Sg_j\right), A(f)^{*}\right]$$

$$= I \otimes A(Sf)^{*} + \sum_{j=1}^{J}\left(g_j, Sf\right)T_j\ \otimes I$$

$$= C(Sf)^{*},$$

$$\left[H^{(C)}(S), C(f)\right] = I \otimes [d\Gamma_{\mathrm{b}}(S), A(f)] + \sqrt{2}\sum_{j=1}^{J} T_j \otimes \left[\Phi_{\mathrm{s}}(Sg_j), A(f)\right]$$

$$= -I \otimes A(Sf) - \sum_{j=1}^{J} (Sf, g_j) T_j \otimes I$$

$$= -C(Sf).$$

ただし $d\Gamma_{\mathrm{b}}(S)$ と $A(f)^*, A(f)$ の交換関係については、[2, 命題 4-26]を用いた。

（ii） $[S_1, S_2]^* \supset -[S_1, S_2]$ と $D([S_1, S_2])$ が稠密であることから $[S_1, S_2]$ は可閉である。よって[2, 命題 4-18]から $\mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(D([S_1, S_2]))$ 上で、

$$[d\Gamma_{\mathrm{b}}(S_1), d\Gamma_{\mathrm{b}}(S_2)] = d\Gamma_{\mathrm{b}}([S_1, S_2])$$

が成り立つ。よって $\bigcap_{i,j,k,l=1}^{J} D(T_i T_j T_k T_l) \hat{\otimes} \mathcal{F}_{\mathrm{b,fin}}(D([S_1, S_2]))$ 上で、

$$\left[H^{(C)}(S_1), H^{(C)}(S_2)\right] = I \otimes d\Gamma_{\mathrm{b}}([S_1, S_2])$$

$$+ \sqrt{2}\sum_{j=1}^{J} T_j \otimes \left[d\Gamma_{\mathrm{b}}(S_1), \Phi_{\mathrm{s}}(S_2 g_j)\right] + \sqrt{2}\sum_{j=1}^{J} T_j \otimes \left[\Phi_{\mathrm{s}}(S_1 g_j), d\Gamma_{\mathrm{b}}(S_2)\right]$$

$$+ 2\sum_{j,k=1}^{J} T_j T_k \otimes \left[\Phi_{\mathrm{s}}(S_1 g_j), \Phi_{\mathrm{s}}(S_2 g_k)\right]$$

となる。右辺の第２項、第３項、第４項をそれぞれ H_1, H_2, H_3 とおくと、[2, 命題 4-26]を用いて、

$$H_1 + H_2 = \sum_{j=1}^{J} T_j \otimes \{-A(S_1 S_2 g_j) + A(S_1 S_2 g_j)^* + A(S_2 S_1 g_j) - A(S_2 S_1 g_j)^*\}$$

$$= \sum_{j=1}^{J} T_j \otimes \{-A([S_1, S_2] g_j) + A([S_1, S_2] g_j)^*\}$$

$$= \sqrt{2}\sum_{j=1}^{J} T_j \otimes \Phi_{\mathrm{s}}([S_1, S_2] g_j) - 2\sum_{j=1}^{J} T_j \otimes A([S_1, S_2] g_j),$$

$$H_3 = 2\sum_{j,k=1}^{J} T_j T_k \otimes iIm\Big(\big(S_1 g_j, S_2 g_k\big)\Big)$$

$$= \sum_{j,k=1}^{J} \{\big(S_1 g_j, S_2 g_k\big) - \big(S_2 g_k, S_1 g_j\big)\} T_j T_k \otimes I$$

$$= \sum_{j,k=1}^{J} (g_j, [S_1, S_2] g_k) T_j T_k \otimes I$$

と変形できる。よって、

$$\big[H^{(C)}(S_1), H^{(C)}(S_2)\big] = H^{(C)}([S_1, S_2]) - 2\sum_{j=1}^{J} T_j \otimes A\big([S_1, S_2] g_j\big).$$

が成立する。■

6　付録

$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とし、$\otimes_s^n \mathcal{H}$ を $\mathcal{H}$ の n 重対称テンソル積とすると、$\mathcal{H}$ 上のボソンフォック空間は $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}) \coloneqq \oplus_{n=0}^{\infty}(\otimes_s^n \mathcal{H})$ と定義される。これは $(\Phi, \Psi) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty}\big(\Phi^{(n)}, \Psi^{(n)}\big)$ を内積とするヒルベルト空間となる。

いま $S_n \colon \otimes^{\mathrm{n}} \mathcal{H} \longrightarrow \otimes_s^n \mathcal{H}$ を正射影作用素とすると、任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して、$\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H})$ 上の生成作用素 $A(f)^*$ が、

$$D(A(f)^*) \coloneqq \left\{\Phi = \{\Phi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H}) \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\sqrt{n} S_n\big(f \otimes \Phi^{(n-1)}\big)\right\|^2 < \infty\right\},$$

$$(A(f)^* \Phi)^{(n)} = \sqrt{n} S_n\big(f \otimes \Phi^{(n-1)}\big)\ (n \geq 1)$$

により定義できる[2, pp.138-141]。ただし $(A(f)^* \Phi)^{(0)} = 0$ とし、$\Phi \in D(A(f)^*)$ としている。消滅作用素　$A(f)$ は $A(f)^*$ の共役作用素として定義する。

$\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された可閉作用素 T に対して、T の第２量子化作用素 $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ を、

$$d\Gamma_{\mathrm{b}}(T) \coloneqq \left(\oplus_{n=0}^{\infty} \overline{\left(\sum_{J=1}^{n} I \otimes \cdots \otimes I \otimes \overset{J\text{-th}}{\overset{\frown}{T}} \otimes I \cdots \otimes I\right) \restriction \widehat{\otimes}^n D(T)}\right)_{\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H})}$$

で定義する。ただし右辺は $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H})$ における簡約部分を意味する。これは $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H})$ 上の稠密に定義された閉作用素となり、T が自己共役のときは $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ は自己共役となる[2, 定理 4-14]。

7　結語

1.1～1.3 節においては真空が存在する CCR の表現しか考察しなかったが、もちろん真空が存在しない場合にも CCR の表現やそれに同伴する第２量子化作用素は考えられる。真空が存在しないときに、CCR の表現を適当に分類することができるか、またそれに同伴する第２量子化作用素を解析することができるかというのは興味深い問題である。また真空が存在する場合であっても、それが非一意的であったり、その生成する部分空間が稠密でない場合に、その CCR の表現自身を分類することができるかという問題も考えられるであろう。定理 1.4 においては CCR の表現が真空を持ちさえすれば、フォック表現を元の表現にある意味で埋め込むことができるということを示した。上記の二つの場合であってもこれは成立し、これによりフォック表現はもっとも基本的な、真空をもつ CCR の表現であると結論付けることができる。

$\mathcal{H}$ 上の稠密に定義された可閉作用素 T を $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H})$ 上の作用素として対応づけるとき、T の第２量子化作用素 $d\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ の他にも、第２種の第２量子化作用素 $\Gamma_{\mathrm{b}}(T)$ が考えられる[2, 4-4-3]。これは

$$\Gamma_{\mathrm{b}}(T) \coloneqq (\oplus_{n=0}^{\infty}(\otimes^{n}T))_{\mathcal{F}_{\mathrm{b}}(\mathcal{H})} \ (\otimes^{0}T \coloneqq 1)$$

によってあたえられる作用素であるが、これに相当するものが一般の CCR の表現においても定義できるかという問題が考えられる。真空が存在する CCR の表現においてはその生成する部分空間上では自然に定義することができるが、それ以外の場合における一般的な定義として適切なものがあるかという点については、現在考察中である。

1.4 節では同伴する第２量子化作用素として GSB ハミルトニアンが現れる CCR の表現を構成した。このモデルは、与えられたハミルトニアンが、ある CCR の表現に同伴する第２量子化作用素としても捉えられる可能性があるという視点を示唆している。またこの第２量子化作用素がみたす定理 1.8（ⅱ）の交換関係は特徴的であり、相互作用に相当する項が現れるのが興味深い。GSB ハミルトニアンが自己共役になるための十分条件としては[4]などがあるが、1.4 節のモデルにおける $H^{(C)}(S)$ が自己共役になるのはどのようなときかという問題については考察中である。

さらに、$T_1,\cdots,T_J$ が強可換な自己共役作用素、$(g_j, g_k) \in \mathbb{R}\ (1 \le j, k \le J)$ のとき、

$$A \coloneqq \overline{\sum_{J=1}^{J} T_J \otimes \overline{\Phi_{\mathrm{s}}(\sqrt{-2}g_j)}}$$

とおくと、これは自己共役作用素となり、

$$e^{iA}\big(I \otimes A(f)\big)e^{-iA} = \overline{I \otimes A(f) + \sum_{J=1}^{J}(f, g_J)T_J \otimes I} \ \ (= \overline{C(f)}\,)$$

となることを[2, 系 4-41]の証明と同様の要領で示すことができる。これは新井朝雄教授により助言をいただいたものである。この事実を用いると、$\|\psi\| = 1$ なる $\psi \in \mathcal{K}$ に対して $\Omega_\psi \coloneqq e^{iA}(\psi \otimes \Omega_{\mathcal{H}})$ はこの CCR の表現の非自明な真空となることがわかる。

謝辞

指導教官である新井朝雄教授には、学部時代からの３年間のセミナーを通して様々なことを学ばせていただきました。とくに、高次の視点にたち普遍的な数学的構造を追求していくという新井教授の一貫した姿勢には非常に感銘をうけ、微力ながらも、私もそうした視点の下に立って本論文を書き上げることができ感慨深いものを感じております。この場を借りて感謝申し上げます。

8　参考文献

[1] 新井朝雄, 量子力学の数学的構造 I , 朝倉書店, 1999

[2] 新井朝雄, フォック空間と量子場（上）, 日本評論社, 2000

[3] 新井朝雄, フォック空間と量子場（下）, 日本評論社, 2000

[4] Arai, A. and Hirokawa, M. ,On the existence and uniqueness of ground state of a generalized spin-boson model, J. Funct. Anal., 151, 455-503 (1997)