学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　陶　山　　大　輔

学 位 論 文 題 名

Basis construction for the Shi and Catalan arrangements

（Shi 配置と Catalan 配置における基底の構成）

超平面とは体 $\mathbb{K}$($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$) 上の ℓ 次元ベクトル空間 V 内の余次元 1 のアフィン部分空間のことであり，有限枚の超平面の集合を超平面配置とよぶ．V の双対空間 V^* の基底として $\{x_1,\dots,x_\ell\}$ を取ったとき，V^* の対称代数 S は多項式環 $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_\ell]$ と同一視できる．このとき，S-加群 $\mathrm{Der}(S)$ を $\mathrm{Der}(S)=\{\theta: S\to S \mid \theta$は $\mathbb{K}$-線形, $\theta(fg)=\theta(f)g+f\theta(g)\ (f,g\in S)\}$ と定義し導分加群と呼ぶ．超平面配置 $\mathcal{A}$ に対し，S-加群 $D(\mathcal{A})$ を $D(\mathcal{A})=\{\theta\in\mathrm{Der}(S)\mid \theta(Q(\mathcal{A}))\in Q(\mathcal{A})S\}$ と定義する．但し，$Q(\mathcal{A})=\prod_{\alpha_H\in\mathcal{A}}\alpha_H$ で，α_H は超平面 H を定義する 1 次式である．$D(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ に含まれる全ての超平面に接する代数的ベクトル場全体と見ることができ，対数的ベクトル場加群と呼ばれる．$D(\mathcal{A})$ が自由加群であるとき，$\mathcal{A}$ は自由配置であるという．このとき，$D(\mathcal{A})$ の斉次基底 $\{\theta_1,\dots,\theta_\ell\}$ を取ることができ，その次数の組 $(\deg\theta_1,\dots,\deg\theta_\ell)$ を冪指数と呼ぶ．冪指数は斉次基底の取り方に依らずに決まる．超平面配置 $\mathcal{A}$ に含まれる超平面の共通部分の集合 $L(\mathcal{A})$ に包含関係と逆に半順序を定める．このとき，メビウス関数 $\mu: L(\mathcal{A})\to\mathbb{Z}$ を $\mu(V)=1$，$\mu(X)=-\sum_{V\le Y<X}\mu(Y)$ と定義する．更に，$\mathcal{A}$ の特性多項式を $\chi(\mathcal{A},t)=\sum_{X\in L(\mathcal{A})}\mu(X)t^{\dim X}$ と定める．自由超平面配置の理論における主要な結果の一つとして，超平面配置 $\mathcal{A}$ が自由配置のとき，その特性多項式 $\chi(\mathcal{A},t)$ が自由配置の冪指数 $(d_1,\dots,d_\ell)$ を用いて，$\chi(\mathcal{A},t)=\prod_{i=1}^{\ell}(t-d_i)$ と分解されるという寺尾宏明の分解定理 (1981 年) が挙げられる．これは，代数的に定義される冪指数が組合せ論的に定義される特性多項式によって決定させることを主張するものである．更にこの定理は，$\mathcal{A}$ の複素補集合 $M(\mathcal{A})$ のポアンカレ多項式 $\pi(M(\mathcal{A}),t)$ が，$\mathcal{A}$ の特性多項式を用いて，$\pi(M(\mathcal{A}),t)=t^{\ell}\chi(\mathcal{A},-t^{-1})$ と表されるという結果から，幾何学的不変量であるベッチ数とも関係していることを示している．自由超平面配置の最も重要な例として，Coxeter 群の鏡映に関する鏡映面の集合である Coxeter 配置がある．

$P_1, \dots, P_\ell$ を Coxeter 群 W に関する基本不変式，I^* を V 上の内積 I によって誘導される微分 1-形式の加群 $\Omega(S)$ 上の内積としたとき，W-不変な代数的ベクトル場の加群は $\mathrm{Der}(S)^W = S^W \cdot I^*(dP_1) \oplus \cdots \oplus S^W \cdot I^*(dP_\ell)$ となり，更に $\mathrm{Der}(S)^W \otimes_{S^W} S = D(\mathcal{A})$ となることが齋藤恭司によって示された (1980 年)．すなわち，Coxeter 配置の自由性が，具体的な基底を与えることにより示されたのである．Coxeter 配置の中でも，特に Weyl 群の鏡映に関する鏡映面の集合を Weyl 配置と呼ぶ．Weyl 群に対応する V^* 内のルート系を Φ，Φ の正のルート系の一つを Φ^+ とする．正のルート $\alpha \in \Phi^+$，整数 i に対して V 内の超平面 $H_{\alpha,i}$ を $H_{\alpha,i} = \{v \in V \mid \alpha(v) = i\}$ により定める．このとき，非負整数 k に対し拡張 Shi 配置 Shi^k，拡張 Catalan 配置 Cat^k とはそれぞれ，$\mathrm{Shi}^k = \{H_{\alpha,i} \mid \alpha \in \Phi^+, -k+1 \le i \le k\}$，$\mathrm{Cat}^k = \{H_{\alpha,i} \mid \alpha \in \Phi^+, -k \le i \le k\}$ で定義される超平面配置である．まず空配置 Shi^0 があり，次に Weyl 配置 Cat^0 が続く．更に Cat^0 に，Cat^0 に属する超平面を平行移動したものをそれぞれ 1 枚ずつ付け加えたものが Shi^1 となっている．Shi^1 に，平行移動した超平面を 1 枚ずつ付け加えると Cat^1 となり，この後は Shi^2，Cat^2，Shi^3，$\mathrm{Cat}^3, \dots$ と，超平面の枚数を増やしていったものになっている．特に，Shi^1 は Shi 配置と呼ばれ，J. Y. Shi のアフィン Weyl 群の Kazhdan-Lusztig cell の研究において初めて導入された．拡張 Shi 配置，拡張 Catalan 配置の自由性とその冪指数は Edelman-Reiner によって予想され (1996)，吉永正彦によって解決された (2004)．吉永の証明は代数幾何学的な手法によるものであり，Coxeter 配置の場合とは異なり，具体的な基底の構成はなされなかった．拡張 Shi 配置，拡張 Catalan 配置の対数的ベクトル場加群の基底の構成については部分結果として，吉永正彦による，多重超平面配置に関する以下の定理 (2002 年) が知られている．基本不変式 $P_1, \dots, P_\ell$ $(\deg P_1 < \deg P_2 \le \cdots \le \deg P_{\ell-1} < \deg P_\ell)$ に対し，S の商体 F 上の導分 D を，$D(P_i) = 0$，$D(P_\ell) = c \in \mathbb{R}^\times$ により定義し，原始微分と呼ぶ．原始微分 D は基本不変式の取り方に依らず，定数倍を除いて一意的に定まる．アフィン接続 $\nabla : \mathrm{Der}(F) \times \mathrm{Der}(F) \to \mathrm{Der}(F)$ を $\nabla_\theta(\sum_{i=1}^\ell f_i \frac{\partial}{\partial x_i}) = \sum_{i=1}^\ell \theta(f_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ と定める．Coxeter 配置 $\mathcal{A}$ に対し，$\mathcal{A}$ 内の超平面に重複度 m を付けたものを考え，$D(\mathcal{A}, m) = \{\theta \in \mathrm{Der}(S) \mid \theta(\alpha_H) \in \alpha_H^m S \ (H \in \mathcal{A})\}$ とする．このとき，$D(\mathcal{A}, 2k)$ の基底として，$(\nabla_{\partial_1} \nabla_D^{-k} \theta_E, \dots, \nabla_{\partial_\ell} \nabla_D^{-k} \theta_E)$ が取れ，$D(\mathcal{A}, 2k+1)$ の基底として，$(\nabla_{I^*(dP_1)} \nabla_D^{-k} \theta_E, \dots, \nabla_{I^*(dP_\ell)} \nabla_D^{-k} \theta_E)$ が取れる．但し，$\theta_E = \sum_{i=1}^\ell x_i \partial_i$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ である．$D(\mathcal{A}, 2k), D(\mathcal{A}, 2k+1)$ はそれぞれ拡張 Shi 配置，拡張 Catalan 配置の対数的ベクトル場加群を無限遠超平面 $\{z = 0\}$ に制限したものとなっている．本論文ではまず A_ℓ 型，B_ℓ 型，C_ℓ 型の Shi 配置の基底の具体的な構成法について紹介する．これらの構成の中で，ベルヌーイ多項式 $B_k(x)$ の類似として $B_{p,q}(x)$ という多項式を導入し，これが構成の中で最も重要な役割を果たす．また，本論文では A_2 型の拡張 Shi 配置，拡張 Catalan 配置の基底の構成法についても紹介する．この構成法では，阿部拓郎-寺尾宏明によって導入された，単純ルート基底と呼ばれる拡張 Shi 配置の特別な基底と，無限遠超平面に制限するという多重超平面配置の理論が証明のアイデアとして用いられる．