Title	Modulus of continuity and Martin boundary of a cylinder and a cone for p-harmonic functions [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	伊藤, 翼
Citation	北海道大学. 博士(理学) 甲第11362号
Issue Date	2014-03-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/55412
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	theses (doctoral - abstract and summary of review)
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	Tsubasa_Itoh_abstract.pdf (論文内容の要旨)

学　位　論　文　内　容　の　要　旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　伊　藤　　　翼

学　位　論　文　題　名

Modulus of continuity and Martin boundary of a cylinder and a cone for *p*-harmonic functions

（p-調和関数に関する連続率と筒領域，錐領域の Martin 境界）

本学位論文は距離測度空間上の p-調和関数に関する二つの非線形問題の研究によって構成されている．一つ目は一般の距離測度空間上の p-Dirichlet 解の大域的な連続性に関する研究であり，二つ目は距離測度空間をユークリッド空間に限定して，筒領域と錐領域上の p-調和核関数の研究である．

距離測度空間上のポテンシャル解析は擬等角写像の観点から必要とされ様々な研究が行われてきた．$1 < p < \infty$ とし，２倍条件と $(1, p)$-Poincaré 不等式を仮定した距離測度空間において p-調和関数が定義され，ユークリッド空間における Dirichlet 問題を p-調和関数に置き換えた p-Dirichlet 問題を考えることができる．領域 D が (p-Dirichlet 問題に関して) 正則で，与えられた境界関数が連続なとき，p-Dirichlet 解は $\overline{D}$ で連続になることが知られている．ここで境界関数が良い連続性を持つと仮定すると，p-Dirichlet 解も良い連続性を持つことが期待され，そのような性質を持つ領域を特徴付けていく研究が行われている．よい連続性としては Hölder 連続性など様々なものが考えられる．先行研究として，Aikawa-Shanmugalingam が一般の距離測度空間において連続性として Hölder 連続性を扱い，境界関数と p-Dirichlet 解が同じ Hölder 連続性を持つ場合を考えて研究を行っている．そこでは p-調和測度や外部領域の容量密度条件による領域の特徴付けを与えている．本研究では，Aikawa-Shanmugalingam の内容を発展させ，連続性として連続率と呼ばれる Hölder 連続性よりも一般の連続性を扱い領域の特徴付けを行った．ユークリッド空間における通常の調

和関数には線形性が成り立ち，単位球内で Poisson 積分表示することが可能なので，そこから Dirichlet 解を評価する手法がよく使われる．しかしながら，距離測度空間上の p-調和関数には線形性が成り立たなく，p-調和関数は積分表示することができないので積分によって p-Dirichlet 解を評価する手法は用いることができない．本研究では p-調和関数の比較原理を利用し，非線形方程式の変分的な手法を応用することで p-Dirichlet 解に対して連続率を保つ領域を p-調和測度に関する減衰条件を使って特徴づけることができた．特に log-Hölder 連続性と呼ばれる Hölder 連続性よりもはるかに弱い連続性を考えるとき，外部領域の容量密度条件と log-Hölder 連続性を保つ領域との間には密接な関係があることを証明した．

距離測度空間をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に限定することで，より精密な解析が可能となる．ポテンシャル論において Martin 境界の決定は非常に興味深い問題であり，たくさんの研究が行われている．調和関数に関する Martin 境界の決定を考える上で調和核関数の一意性を調べることが極めて重要である．調和核関数の定義を p-調和関数に置き換えることで p-調和核関数が定義できる．領域 D のコンパクト化 D^* を考えて，理想境界 $D^* \setminus D$ を $\partial^* D$ と書くことにする．また $x_0 \in D$ を固定する．u が境界点 $w \in \partial^* D$ に関する p-調和核関数であるとは，u が D 上の正の p-調和関数で，$\partial^* D \setminus \{x_0\}$ 上で $u = 0$ かつ $u(x_0) = 1$ を満たすこととする．$\mathbb{R}^{n-1}$ 内の有界な $C^{2,\alpha}$-領域 Ω，単位球面上の $C^{2,\alpha}$-領域 Σ に対して，$\Omega \times \mathbb{R}$ を筒領域，$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : x/|x| \in \Sigma\}$ を錐領域と呼ぶ．筒領域 $\Omega \times \mathbb{R}$ に対しては位相境界 $\partial(\Omega \times \mathbb{R})$ と理想境界 $\{-\infty, +\infty\}$ を付け加えて，錐領域 Γ には位相境界 $\partial\Gamma$ と無限遠点 $\{\infty\}$ を付け加えてコンパクト化を考える．本研究では，$\Omega \times \mathbb{R}$ 上の $\pm\infty$ に関する p-調和核関数と Γ 上の $0, \infty$ に関する p-調和核関数の一意性を明らかにした．線形の場合 $(p = 2)$，スケール不変な境界 Harnack 原理から調和核関数の一意性が導かれることが Kemper(1972) によって証明されている．一方，非線形の場合 $(p \neq 2)$，スケール不変な境界 Harnack 原理だけでは p-調和核関数の一意性を示すには不十分である．本研究では Tolksdorf の “stretching idea”を用いることで p-調和核関数の一意性を証明した．また $n = 2$ の場合はこれらの p-調和核関数を具体的な関数として与えることができた．