学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　野口　朗

学 位 論 文 題 名

Automorphisms of a non-type I C*-algebra

（I 型でない C*-環の自己同型）

作用素環とは、足し算、掛け算、スカラー倍、対合の４つの演算からなる代数構造と、ノルム位相をはじめとする様々な位相の構造を兼ね備えた環である。代数学の諸分野とは異なり、主に非可換な環が研究対象となり、単位元を持たないものもしばしば考えられる。最も簡単な非可換環の例は、同じサイズの正方行列を全て集めたものである（以下、全行列環とかく）が、無限次元の環についての研究がほとんどである。作用素環の定義は抽象的なものであるが、全ての作用素環はヒルベルト空間上の有界線型写像全体のなす環の部分環であることが知られている。行列は有限次元のベクトルをベクトルに移す変換と見られるので、作用素環は行列の概念の拡張と見ることができる。作用素環と呼ばれるものには大きく分けて C^*-環と von Neumann 環の２種類の環があり、Murray と von Neumann が 1936 年に始めて以来、いずれの研究も今もなお盛んに行われている。

作用素環論において、局所コンパクト群の C^*-環およびフォン・ノイマン環への作用の研究は、ここ数十年非常に盛んに行われている。群は物理系の対称性を記述する重要な概念で、量子力学などの分野で頻繁に登場する。群の作用とは、群から作用素環上の自己同型群への連続な群準同型写像のことであるが、これはすなわち群のもつ情報を作用素環上に実現するものと解釈することができる。群作用の研究は今もなお非常に難しいものであり、多くの場合離散群やコンパクト群までしか手がつけられず、整数群２つの直和ですら扱うことが困難であることがしばしばある。群作用の研究の大きな目標の１つは、コサイクル同値なものを除いて群作用を分類することであるが、その際には群作用を特徴付ける不変量が非常に重要であり、不変量の研究は必要不可欠である。可換群の作用の重要な不変量の１つに Connes スペクトルがある。これは、作用を考えている群の双対群の部分群であり、正確な定義は複雑だが、作用素のスペクトルの概念に似たものである。

UHF 環は 1960 年に Glimm によって研究され始めた重要な C^*-環で、全行列環の列に単位元を保つ埋め込みを考えたものの帰納的極限という簡単な形でありながら、その表現の像は σ-弱閉包が I 型以外の全てのタイプのフォン・ノイマン環になりうる。Glimm は I 型 C^*-環の研究の過程で、I 型でない可分 C^*-環にはいつも UHF 環がおよそ埋め込まれるということを証明した。この定理はのちに Glimm の定理と呼ばれるようになった。フォン・ノイマン環はそのイデアルとイデアルで割ったものの直和になることから、Glimm の定理は、I 型でない可分 C^*-環を適当なイデアルで割ることで任意の UHF 環に同型なものをつくることができる、という解釈の仕方もできる。また、UHF 環は全行列環の列のテンソル積と見ることができる。全行列環上の自己同型は全て内部的、すなわち左からユニタリ行列を、右からその随伴行列を掛けるという形で表せるので、全行列環の内部的自己同型の無限テンソル積の形（以下、積型とかく）の自己同型群を考えるのは自然である。

私は、C^*-環と群作用の組に、UHF 環とその積型の群作用の組が埋め込まれるかどうかについて考察した。この問題に関する先行している研究結果は、コンパクト群についての Bratteli-岸本-Robinson の結果および実数群についての岸本の結果がある。私はこの問題について、まだ明らかになっていなかった整数群の場合に、肯定的な結果を得ることに成功した。もっと詳細に言えば、可分かつ素な C^*-環およびその上の整数群の作用すなわち自己同型について、Connes スペクトルがトーラス全体で

あることと、任意の UHF 環の積型の自己同型が先の自己同型におよそ埋め込まれることとが同値であることを示した。ここで、C^*-環が I 型でないということは Connes スペクトルがトーラス全体であることから導かれる。この定理の系として、可分で素な C^*-環とその自己同型で Connes スペクトルがトーラス全体であるものに対し、自己同型で共変な表現による像の σ-弱閉包を射影で切ったものとして任意の AFD 因子環を実現できるということがわかる。

Connes スペクトルがトーラス全体であることから任意の UHF 環の積型の自己同型が可分かつ素な C^*-環の自己同型におよそ埋め込まれることは次のような方法で導いた。まず自己同型の implementing unitary でおよそ不変なベクトルを、Kadison's transitivity を用いて見つける。これに関するベクトル状態の台射影に収束する C^*-環の元の減少列をとり、再び Kadison's transitivity を用いて見つけた元を、減少列を使ってうまくおきかえ、擬行列単位系をつくる。これに適当な射影（C^*-環の普遍包絡フォン・ノイマン環からとる）を掛けて行列単位系をつくる。これで生成される UHF 環とこの環への自己同型の制限の組が、考えていた UHF 環とその積型の自己同型の組に同型になる。この証明で最も重要なことは、擬行列単位系の元に自己同型（にうまく摂動を加えたもの）に作用させた時に、先のベクトルの上で、その成分に応じて積型の自己同型の情報を出すところである。なお、Connes スペクトルがトーラス全体であることは至るところで用いているが、このことは、どんな積型の自己同型をも埋め込むことができることを保証している。