学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士 (理学)　　氏名　布田　徹

学 位 論 文 題 名

Mathematical Analysis on Continuous Measurements in Quantum Mechanics
(量子連続測定の数学的研究)

本論文は量子ゼノン効果の自然な拡張としての量子連続測定についての研究である．本文は三つの章からなり，第 1 章で特にベクトル状態に対する連続測定を詳細に扱い，第 2 章では第 1 章の自然な拡張として一般の混合状態に対する連続測定を扱う．混合状態を扱うことにより，状態そのものの挙動に加えてそのフォン・ノイマンエントロピーの挙動も考察する．第 3 章は第 2 章に関係のあるいくつかの定理をまとめた付録である．第 1 章は新井朝雄教授との共著論文に基づく．

量子系 $\mathcal{S}$ のベクトル状態は, 複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の 0 でない元で表され, 物理量は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素で表される．以下, $\mathcal{H}$ の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表し, 内積から定まるノルムを $\| \cdot \|$ で表すことにする．いま, 単位ベクトル $\Psi, \Phi \in \mathcal{H}$ を状態であるとすると, 量子系が観測によって状態 Ψ から状態 Φ に遷移する確率は, $| \langle \Phi, \Psi \rangle |^2$ で与えられる．一方, 量子系の状態の時間発展は, 系のハミルトニアン H から定まる強連続 1 パラメータユニタリ群 $\{e^{-itH}\}_{t \in \mathbb{R}}$ * によって記述される．したがって, 時刻 0 で状態 Ψ であった系が時刻 t での観測によって状態 Ψ に遷移する確率は $| \langle \Psi, e^{-itH} \Psi \rangle |^2$ である．このような観測を繰り返し行うことを考える．任意の時間 $t > 0$ に対して, Δ を区間 $[0, t]$ の任意の分割で, $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = t$ であるものとし, $\Delta_k := t_k - t_{k-1}, \quad (k = 1, \cdots, N), \qquad |\Delta| := \max_{1 \le k \le N} \Delta_k$ とおく．このとき, $P_\Delta(\Psi, t) := \prod_{k=1}^N | \langle \Psi, e^{-i\Delta_k H} \Psi \rangle |^2$ を考える．$P_\Delta(\Psi, t)$ は, Δ の分点 $(t_1, \cdots, t_N)$ において順に観測を行い, いずれの観測でも状態が初期状態 Ψ に遷移する確率である．$\lim_{|\Delta| \to 0} P_\Delta(\Psi, t) = 1$ のとき, 初期状態 Ψ に対する, 時間 t の**量子ゼノン効果**が起こるという．本研究では $\Psi \in D(H), \quad \|\Psi\| = 1$ のとき量子ゼノン効果が生起することを厳密に示した．また, 仮定 $\Psi \in D(H)$ がない場合は必ずしも量子ゼノン効果が起るわけではないことを例を挙げて示した．さらに, Δ が等分割であるとき, 単位ベクトル $\Psi \in D(H)$ に対して, $P_\Delta(\Psi, t) = 1 - t^2 (\Delta H)_\Psi^2 \frac{1}{N} + o(\frac{1}{N}), \quad (N \to \infty)$ が成り立つことも示した．ただし, $(\Delta H)_\Psi^2$ は Ψ におけるエネルギーの分散である．次に, $\mathcal{H}$ 上のある条件を満たす曲

---

* ただし, ここでは $\hbar := \frac{h}{2\pi}$ (h はプランク定数) が 1 となる単位系を用いる．

線を考え, この曲線の分割によって指定される状態の観測を通して, 確率 1 で状態ベクトルを曲線に乗せて移動させることができることを示した．つまり，$\Psi(\cdot)$ を区間 $[0,t]$ 上の $\mathcal{H}$-値関数で, 任意の $\lambda \in [0,t]$ に対して, $\Psi(\lambda) \in D(H), \|\Psi(\lambda)\| = 1$ であるものとし，さらにいくつかの条件を課すと $\lim_{|\Delta|\to 0} \prod_{k=1}^{N} |\left\langle \Psi(t_k), e^{-i\Delta_k H}\Psi(t_{k-1})\right\rangle|^2 = 1$ が成り立つ．この定理は量子ゼノン効果の生起に関する最初の定理を直接の系として含む．応用として次の事実を示した: $\|\Psi\| = \|\Phi\| = 1$ であるような任意の $\Psi, \Phi \in D(H)$ に対して, Ψ と Φ を結ぶ曲線が存在して, この曲線の分割によって指定される状態の観測を通して, 確率 1 で状態 Ψ から状態 Φ へ遷移させることができる.

以上までが第 2 章の内容であり，専らベクトル状態に関する考察であった．混合状態について同様の連続観測を定義することを考える．$\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ を密度作用素の全体からなる集合とする．量子系 $\mathcal{S}$ の混合状態は $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ の元で表される．また，トレースノルムを $\|\cdot\|_1 := \mathrm{Tr}|\cdot|$ とする．$\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ への写像を次のように二つ定義する: (**ユニタリチャンネル**) $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 U に対して，$\mathcal{E}_U\rho := U\rho U^*$, $\forall\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. (**射影チャンネル**) $\mathfrak{P} := \{P_n\}_n$ を $P_m \perp P_n$ $(m \neq n), I = \sum_n P_n$ を満たす $\mathcal{H}$ 上の射影作用素の族とする．このとき $\mathcal{E}_{\mathfrak{P}}\rho := \sum_n P_n\rho P_n$, $\forall\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$. 特に，$e^{-itH}$ $(t \in \mathbb{R})$ に対しては, $\mathcal{E}_t := \mathcal{E}_{e^{-itH}}$ と略記する．次に，ρ のシャッテン分解 (の一つ) を $\rho = \sum_{n=1}^{d} \lambda_n|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$ とする．ただし，$d := \dim\mathcal{H}$ とし，$\{\Psi_n\}_{n=1}^{d}$ が $\mathcal{H}$ の完全正規直交系 (CONS) となるようにしておく．この分解に対し，$\{\Psi_n(\lambda)\}_{n=1}^{d}$ を $\Psi_n(0) = \Psi_n$ $(1 \leq \forall n \leq d)$ を満たす, 時刻パラメータ $\lambda \in [0,t]$ を持つ $\mathcal{H}$ の CONS であるとし，$\mathfrak{P}(t) := \{|\Psi_n(t)\rangle\langle\Psi_n(t)|\}_n$ とする．さらに $\rho_\Delta(t) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ を次のように定義する：

$$\rho_\Delta(t) := \mathcal{E}_{\mathfrak{P}(t_N)} \circ \mathcal{E}_{\Delta_N} \circ \mathcal{E}_{\mathfrak{P}(t_{N-1})} \circ \mathcal{E}_{\Delta_{N-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{E}_{\mathfrak{P}(t_1)} \circ \mathcal{E}_{\Delta_1}\rho.$$

$\rho_\Delta(t)$ は，物理的には Δ の各分点 $t_1, \cdots, t_N$ において，それぞれ射影作用素の族 $\mathfrak{P}(t_1), \cdots, \mathfrak{P}(t_N)$ による量子測定を行ったときの時刻 t における状態である．$\rho(\lambda) := \sum_n \lambda_n|\Psi_n(\lambda)\rangle\langle\Psi_n(\lambda)|$, $(\forall\lambda \in [0,t])$ と定義すると，いくつかの仮定の下, $\lim_{|\Delta|\to 0} \|\rho_\Delta(\tau) - \rho(\tau)\|_1 = 0$ が成り立つことを示した．これにより，特に $d < \infty$ の場合，任意のユニタリチャンネルを連続測定によってトレースノルムの意味で近似できることがわかる．また，混合状態に対する量子ゼノン効果の生起条件も得られる．次に，$S(\rho)$ を $\rho \in \mathfrak{S}$ に対するフォン・ノイマンエントロピーとする．$d < \infty$ のときは Fannes の不等式によりフォン・ノイマンエントロピーのトレース・ノルムに関する連続性がわかるが，$d = \infty$ のとき，一般にフォン・ノイマンエントロピーはトレースノルムに関して連続であるとは限らない．しかし，いくつかの条件のもとで $\lim_{|\Delta|\to 0} S(\rho_\Delta(\tau)) = S(\rho(\tau))$ が成り立つことを示した.