学位論文内容の要旨

博士の専攻分野の名称　博士（理 学）　　氏名　 梅田　耕平

学位論文題名

The edge of the wedge theorem for the sheaf of holomorphic functions of exponential type and Laplace hyperfunctions
(指数型正則関数の層に対する楔の刃の定理とラプラス超関数)

一変数ラプラス超関数の理論は、小松彦三郎氏により確立され常微分方程式及び偏微分方程式の解法等に応用されている。ラプラス超関数とは無限遠方で高々指数増大する正則関数の実軸の上下からの境界値の差として表わされる。元来、古典的なラプラス変換は無限遠方で高々指数増大する関数に対して定義された。1987 年、小松彦三郎氏はラプラス超関数を導入し、そのラプラス変換を構成する事によりすべての佐藤超関数はラプラス超関数に拡張可能であることを示した。そのおかげで、我々は超関数の枠組みの中で任意の増大度を持つ関数に対してもラプラス変換を扱うことが出来るようになった。この理論をさらに発展させるには、ラプラス超関数の概念を局所化することでその代数的取り扱いを可能とすることが望まれる。そこで、まずはじめに筆者は本多尚文氏との共著論文 ” On the sheaf of Laplace hyperfunctions with holomorphic parameters” の中で無限遠方で指数型の増大度条件を持つ正則関数に対する擬凸領域上のコホモロジー群の消滅定理を示した。その結果により、一変数ラプラス超関数のコホモロジー的な定義を与え代数的な取扱いを可能とした。本論文では、無限遠方で指数型の増大度条件を持つ正則関数の層に対する楔の刃定理について述べる。この定理は多変数ラプラス超関数の層を構成する上で本質的な役割を果たす。以下、簡単に説明する。

$\mathbb{D}^{2n}$ を $\mathbb{C}^n$ と方向別の無限遠点 $S^{2n-1}\infty$ との非連結和とし、$\overline{\mathbb{R}^n}$ で $\mathbb{R}^n$ の $\mathbb{D}^{2n}$ 内での閉包とする。$\mathcal{O}^{\exp}_{\mathbb{D}^{2n}}$ で無限遠方で指数型の増大度を持つ正則関数の $\mathbb{D}^{2n}$ 上の層とする。次数 k の局所コホモロジー群 $\mathscr{H}^k_{\overline{R^n}}(\mathcal{O}^{\exp}_{\mathbb{D}^{2n}})$ が空間次元の次数 n 以外で消滅することが指数型正則関数の層に対する楔の刃の定理である。証明の基本的なアイデアやテクニックは、佐藤幹夫氏による $\mathbb{R}^n$ の正則関数の層に関する純余次元性の証明法に基づく。証明で重要な鍵となるのが指数型正則関数に対する Martineau 型の定理である。即ち、$S = [a, \infty](a \in \mathbb{R})$ を $\overline{\mathbb{R}} \subset \mathbb{D}^2$ 内のコンパクト集合、$K = K_1 \times \cdots \times K_{n-1} \subset L = L_1 \times \cdots \times L_{n-1}$ を二つ $\mathbb{C}^{n-1}$ 内の閉多重円板の対、$W \subset V \subset \mathbb{C}^m (m \geq 0)$ を空でない連結な $Stein$ 領域の対とする。このとき、自然な写像

$$H^n_{S\times K\times V}(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{C}^{n-1} \times V,\, \mathcal{O}^{\exp}_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{C}^{n-1}\times V}) \to H^n_{S\times L\times W}(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{C}^{n-1} \times W,\, \mathcal{O}^{\exp}_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{C}^{n-1}\times V})$$

は単射となる。この Martineau 型の定理により、次のコホモロジー群の消滅定理が

得られる。$S=[a,\infty](a\in\mathbb{R})$、$K, L$ を二つの閉じた解析的多面体、V を $\mathbb{C}^m$ 内の $Stein$ 領域とする。この時、$S\times(L\setminus K)\times V$ に台を持つ次数 k のコホモロジー群 $H^k_{S\times(L\setminus K)\times V}(\mathbb{D}^2\times\mathbb{C}^{n-1}\times V, \mathcal{O}^{\exp}_{\mathbb{D}^2\times\mathbb{C}^{n-1}\times V})$ が次数 $n-1$ 以下で消滅する。以上の結果を用いて指数型正則関数の層に対する楔の刃の定理が導かれる。

指数型正則関数の層に対する楔の刃の定理のおかげで、n 変数ラプラス超関数の層を次数 n の局所コホモロジー群 $\mathscr{H}^n_{\overline{R^n}}(\mathcal{O}^{\exp}_{\mathbb{D}^{2n}})$ として採用することができる。この層は、以下の様な性質を持つ。無限遠方で高々指数増大の実解析関数の層からラプラス超関数の層への標準的な単型射が存在し、指数型の実解析関数をラプラス超関数に埋め込み可能である。また、ラプラス超関数の層から佐藤超関数の層への標準的な全型射が存在し、すべての佐藤超関数はラプラス超関数に延長可能となる。最後に、有用な性質であるラプラス超関数の層の軟弱性、即ち、ラプラス超関数の層は任意の $\overline{\mathbb{R}^n}$ の閉集合上の切断が全空間に延長可能であることについて述べる。$\partial\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の $\mathbb{D}^{2n}$ 内での境界とする。指数型正則関数の層 $\mathcal{O}^{\exp}_{\mathbb{D}^{2n}}$ は $\partial\mathbb{R}^n$ 上、次のような性質をもつ。次数 k の局所コホモロジー群 $\mathscr{H}^k_{\partial\mathbb{R}^n}(\mathcal{O}^{\exp}_{\mathbb{D}^{2n}})$ が空間次元の次数 n 以外で消滅する。また、$\partial\mathbb{R}^n$ に台をもつ次数 k のコホモロジー群 $H^k_{\partial\mathbb{R}^n}(\mathbb{D}^{2n}, \mathcal{O}^{\exp}_{\mathbb{D}^{2n}})$ が次数 n 以外で消滅する。以上の結果を用いて、層 $\mathscr{H}^n_{\partial\mathbb{R}^n}(\mathcal{O}^{\exp}_{\mathbb{D}^{2n}})$ の軟弱性が導かれる。この時、$j:\mathbb{R}^n\to\overline{\mathbb{R}^n}$ とし、層の完全列 $0\to\mathscr{H}^n_{\partial\mathbb{R}^n}(\mathcal{O}^{\exp}_{\mathbb{D}^{2n}})\to\mathscr{H}^n_{\overline{\mathbb{R}^n}}(\mathcal{O}^{\exp}_{\mathbb{D}^{2n}})\to j_*\mathscr{H}^n_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})\to 0.$ を考えれば、ラプラス超関数の層の軟弱性が得られる。以上が学位論文内容の要旨である。