HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	SUR LES ESPACES À STRUCTURE UNIFORME
Author(s)	Inagaki, Takeshi
Citation	Journal of the Faculty of Science Hokkaido Imperial University. Ser. 1 Mathematics, 10(4), 179-256
Issue Date	1943
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/55961
Type	bulletin (article)
File Information	JFSHIU_10_N4_179-256.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

SUR LES ESPACES À STRUCTURE UNIFORME

Par

Takeshi INAGAKI

INTRODUCTION

On sait dans les espaces abstraits qu'il y a une différence considérable entre l'espace distancié et les autres et que celui-là joue un rôle important dans la théorie des espaces abstraits, et il me semble que la cause principale soit attribuable à l'uniformité dans cet espace. Par exemple, si l'on considère une suite de points satisfaisant à la condition de CAUCHY, alors on aura besoin de l'idée qui définit simultanément pour beaucoup de points qu'ils soient à proximité les uns les autres. Encore, on sait qu'une fonction continue (cette notion est obtenue seulement par la propriété locale d'une fonction) définie dans l'espace distancié est uniformément continue sur un ensemble compact en soi, et la notion de "uniformément continue" dépend non seulement de la propriété locale d'une fonction, mais encore de l'uniformité de l'espace.

Or, dans un espace topologique général, nous ne savons la façon de définir l'idée de "complet" ou "uniformément continue". Nous serons donc amenés naturellement à poser la question si le fait que telle idée peut être définie est la particuralité de l'espace distancié. Il sera donc intéressant de chercher un espace dans lequel on peut définir la notion de "complet" ou "uniformément continue", et pour ce but il sera désirable que l'espace que nous appellerons à structure uniforme[1], soit aussi général et aussi près à l'espace distancié que possible.

1) C'est M. J. VON NEUMANN qui a considéré au commencement l'uniformité de l'espace topologique. Cf. J. VON NEUMANN, On complete topological spaces, Trans. of the Amer. Math. Soc., 39 (1933), pp. 1–20.

M. A. WEIL a donné une définition de l'espace à structure uniforme. Cf. A. WEIL, Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Actualités scientifiques et industrielles, (Paris), No. 551 (1937).

L. W. COHEN, Uniformity properties in topological space satisfying the first denumerability postulate, Duke Math. Jour., 3 (1937), pp. 610 615.

L. W. COHEN, On imbedding a space in a complete space, Duke Math. Jour., 5 (1939), pp. 174–183.

Jour. of the Faculty of Science Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, Vol. X, No. 4, 1943.

Pour avancer la considération, nous considérons tout d'abord un espace abstrait général. Originellement, dans un espace topologique général, soit un espace (v) introduit par M. FRÉCHET, on comprend un voisinage d'un point p comme l'ensemble des points qui soient à proximité de p, mais on ne sait dans ce cas aucun moyen de mesurer le degré de la proximité du point p, autrement dit on pourra dire que la notion de "proximité" soit qualitative; Dans l'espace distancié, la proximité est celle qui peut être mesurée, à savoir elle peut être considérée comme quantitative, mais ce fait qu'elle soit quantitative ne sera pas nécessairement la particuralité de l'espace distancié. Par exemple, pour qu'elle soit quantitative il sera suffisant d'ajouter un suffixe à chaque voisinage: Soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de suffixes et soit $\alpha \in \mathfrak{S}$; si $q \in V_\alpha(p)$, on peut dire que le point q est à proximité de p et que le degré de la proximité du point p est mesuré par le suffixe α. Dans tel espace la notion de "proximité" est donnée simultanément en chaque point de l'espace et elle peut être considérée comme quantitative en ce sens que le degré de la proximité est mesurable.

Quoi qu'il en soit, dans tel espace que nous appellerons quantitatif dans la suite, nous pouvons en apparence définir les notions de "complet" et de "uniformément continue" comme il suit:

Soit $\{p_\gamma\}$ une suite bien ordonnée de points, γ parcourant un ensemble de nombres ordinaux. Si à chaque suffixe α donné d'avance correspondent un nombre ordinal γ_α et un point q_α tels que $\sum_{\gamma_\alpha<\gamma} p_\gamma \subseteq V_\alpha(q_\alpha)$, nous dirons que la suite satisfait à la *condition de* CAUCHY (généralisée); Si chaque suite satisfaisant à la condition de CAUCHY (généralisée) possède un seul point d'accumulation, on dit que l'espace considéré est *complet* (généralisé).

Quant à la continuité uniforme d'une fonction $y=f(x)$ dont la variable et les valeurs appartiennent aux espaces X et Y respectivement, on pourra la définir comme il suit:

La fonction $y=f(x)$ est dite *uniformément continue* sur un ensemble E dans X, si à chaque suffixe α correspond un suffixe β, indépendant des points x de E, tel que

$$f(E\cdot V_\beta(x)) \subseteq U_\alpha(y) \quad \text{où} \quad x \in E \quad \text{et} \quad y=f(x).$$

Cependant, si l'on conclut de là que l'espace quantitatif possède l'uniformité, il me semble qu'il y a précipitation, car l'espace quantitatif ne possède encore que l'uniformité apparente; C'est analogue

au fait en géométrie que, quoiqu'un voisinage de chaque point dans un espace puisse être considéré comme un espace euclidien à n-dimensions, l'espace considéré n'est pas nécessairement celui de RIEMANN en géométrie ; Pour qu'il soit l'espace de RIEMANN, il est nécessaire de déterminer le paramètre de la connexion convenablement choisi. Il me semble dans la théorie des espaces abstraits que l'idée, correspondant à cette détermination du paramètre de la connexion, soit de donner une relation parmi les proximités au moins de deux points à proximités les uns les autres. Par exemple, voici quelques relations :

$V_\alpha(p)$ étant un voisinage d'un point p, il existe alors un suffixe β dépendant de p et de α tel que, en symboles logiques[1],

(A). $V_\beta(p) \cdot V_\beta(q) \neq 0 \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p)$ pour tout point q,

(B). $V_\beta(p) \cdot V_\beta(q) \neq 0 \rightarrow q \in V_\alpha(p)$ pour tout point q,

(C). $q \in V_\beta(p) \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p)$ pour tout point q,

(D). $p \in V'_\beta(q) \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p)$ pour tout point q,

(E). $p \in V_\beta(q) \rightarrow q \in V_\alpha(p)$ pour tout point q,

et les cinq relations (a), (b), ..., (e) obtenues par l'échange de p et q dans les cinq relations (A), (B), ..., (E) respectivement.

Nous pourrons voir que telle relation donna l'uniformité essentielle à l'espace quantitatif. Nous arrivons ainsi à l'idée d'un espace à structure uniforme, c.-à-d. *un espace quantitatif est appelé à structure uniforme, lorsqu'il existe un règlement déterminant une relation par rapport aux proximités parmi des points convenablement donnés.*

Dans ce travail, nous traitons principalement pour abréger les espaces où tout voisinage est ouvert, sauf mention expresse du contraire, et supposons pour plus de commodité que chaque point appartienne toujours à ses voisinages. Nous disons dans la suite qu'un espace à caractère dénombrable[2] est monotone, lorsque, pour tout point p de l'espace, ses voisinages sont monotones :

$$V_1(p) \supseteq V_2(p) \supseteq \cdots \supseteq V_n(p) \supseteq \cdots.$$

1) Le signe " $\rightarrow$ " signifie que "si..., alors...". Voir D. HILBERT und ACKERMANN, Gründzüge der theoretischen Logik, Berlin, (1928), en particulier pages 4 et 23.

2) Nous dirons avec MM. ALEXANDROFF et URYSOHN qu'un espace est à caractère dénombrable, lorsqu'il satisfait au premier axiome de dénombrabilité de M. HAUSDORFF. Dans ce cas on peut toujours supposer que l'espace soit quantitatif et de plus que les suffixes des voisinages soient des nombres naturels.

Dans le premier paragraphe, en remarquant la propriété que, dans l'espace distancié, un ensemble fermé est un G_δ[1], nous donnons, dans les espaces quantitatifs, quelques propriétés qui sont équivalentes aux conditions (A), (B), ..., etc. respectivement et de plus considérons quelques formules par rapport aux axiomes de séparation de points.

Dans le deuxième paragraphe, nous montrons qu'il y a deux espèces des théorèmes concernant les fonctions continues, à savoir le premier se rattache à l'espace où les fonctions sont définies et le second, à l'espace auquel les valeurs de fonctions appartiennent.

Dans le troisième paragraphe, nous traitrerons deux problèmes posés par M. FRÉCHET qui se rapportent à la séparabilité d'ensemble situé dans un espace, et donnons ses réponses affirmatives.

Dans le quatrième paragraphe, nous introduisons deux notions de "*quasi-écart*" et de "*convergence*" d'une suite de points dans les espaces à caractère dénombrable et monotones, et donnons leurs applications, en ajoutant quelques conditions auxiliaires.

Dans le cinquième paragraphe, nous considérons en particulier les espaces à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (D), et y introduisons la notion dite "*quasi-distance*". On pourra voir que la notion de "quasi-distance" est tout-à-fait analogue à celle de "distance" dans les espaces distanciés. En employant quelques conditions auxiliaires, nous donnons une généralisation de théorèmes dans les espaces distanciés.

Dans le dernier paragraphe, nous recherchons la théorie des fonctions mesurables B, en suivant le raisonnement dû à MM. KURATOWSKI et MONTGOMERY[2].

§ 1. SUR DIVERS ESPACES À STRUCTURE UNIFORME.

Notre but dans ce paragraphe est d'une part d'étudier quelques propriétés des espaces à structure uniforme, et d'autre part de re-

1) M. P. ALEXANDROFF a posé autrefois dans son article un problème :

Quels rôles jouent dans un espace topologique le premier- et le second axiome de dénombrabilité de M. HAUSDORFF et la propriété qu'un ensemble fermé est un G_δ, respectivement ?

Voir P. ALEXANDROFF, Einige problemstellungen in der mengentheoretischen Topologie, Recueil Math., t. 1 (43), 5 (1936), p. 632.

2) C. KURATOWSKI, Topologie, I. Warszawa (1933) ; D. MONTGOMERY, Non-separable metric space, Fund. Math., t. 25 (1935), pp. 527–533 ; C. KURATOWSKI, Quelques problèmes concernant les espaces métriques non-séparables, Fund. Math., t. 25 (1935), pp. 534-545.

chercher les autres formes concernant les conditions de séparation de points dans les espaces abstraits.

Tout d'abord nous adoptons la condition (A) comme le point de départ du raisonnement :

(A)[1]. *Soit* $\{V_\alpha(x)\}$ *la famille des voisinages des points* x *de l'espace et soit* $V_\alpha(p)$ *un voisinage d'un point* p. *Alors il existe un suffixe* β *déterminé par* p *et* α *tel que*

$$V_\beta(p)\cdot V_\beta(q)\neq 0 \rightarrow V_\beta(q)\subseteq V_\alpha(p),$$

quel que soit q.

D'abord la condition (A) entraîne le

Théorème 1. La condition (A) *équivaut à la condition :*

(A_1) : *Soient* p *un point et* F *un ensemble fermé ne contenant pas le point* p. *Alors il existe un suffixe* β *déterminé par* p *et* F *tel que*

$$V_\beta(p)\cdot V_\beta(q)\neq 0 \rightarrow V_\beta(q)\cdot F = 0,$$

quel que soit q.

Démonstration. (A) $\rightarrow$ (A_1) : Par l'hypothèse que $p \bar{\in} F$, il existe un voisinage $V_\alpha(p)$ de p tel que $V_\alpha(p)\cdot F = 0$, où α est déterminé par p et F. Or, de la condition (A), il y a pour $V_\alpha(p)$ un suffixe β déterminé par p et α, à savoir par p et F, tel que

$$V_\beta(p)\cdot V_\beta(q)\neq 0 \rightarrow V_\beta(q)\subseteq V_\alpha(p),$$

donc on a

$$V_\beta(p)\cdot V_\beta(q)\neq 0 \rightarrow V_\beta(q)\cdot F = 0,$$

puisque $V_\alpha(p)\cdot F = 0$.

(A_1) $\rightarrow$ (A) : Soit $V_\alpha(p)$ un voisinage donné d'avance d'un point p et posons $F = CV_\alpha(p)$, où $CV_\alpha(p)$ désigne l'ensemble complémentaire par rapport à l'espace de $V_\alpha(p)$[2]. Il est évident que F est fermé ne contenant pas le point p. Par conséquent, en vertu de la condition (A_1) il y a un suffixe β déterminé par p et F, c.-à-d. par p et α, tel que

$$V_\beta(p)\cdot V_\beta(q)\neq 0 \rightarrow V_\beta(q)\cdot F = 0.$$

D'où on a

$$V_\beta(p)\cdot V_\beta(q)\neq 0 \rightarrow V_\beta(q)\subseteq V_\alpha(p),$$

puisque $F = CV_\alpha(p)$, c. q. f. d.

1) Si l'espace est à caractère dénombrable et monotone vérifiant la condition (T_0) (voir la note 1) citée au bas de la page 196), la condition (A) coïncide avec celle que M. FRINK a donné dans son article, Distance function and the metrization problemes, Bull. of the Amer. Math. Soc., Vol. 43 (1937), p. 140.

2) Dans la suite, désignons par CE l'ensemble complémentaire par rapport à l'espace considéré d'un ensemble donné E.

Nous définirons deux terminologies qui nous serviront souvent dans la suite.

Définitions. 1. Soit E un ensemble quelconque dans un espace quantitatif et posons $S_\alpha(E) = \sum_{V_\alpha(p)\cdot E \neq 0} V_\alpha(p)$, où le membre droit de l'égalité désigne la somme de tous les voisinages $V_\alpha(p)$, α étant fixé, qui possèdent au moins un point commun avec E. Nous dirons que $S_\alpha(E)$ est la *sphère de centre E et de rayon* $\frac{1}{\alpha}$.

2. Posons $O_\alpha(E) = \sum_{p \in E} V_\alpha(p)$ pour un ensemble E quelconque dans un espace quantitatif. L'ensemble $O_\alpha(E)$ est appelé la *sphère restreinte de centre E et de rayon* $\frac{1}{\alpha}$.

La condition (A) entraîne évidemment la condition (A_2) suivante :

(A_2)[1] : *$V_\alpha(p)$ étant un voisinage d'un point p, alors il existe deux suffixes β et γ déterminés par p et α tels que*

$$V_\gamma(p)\cdot V_\beta(q) \neq 0 \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p)\,,$$

quel que soit q.

Par rapport à la condition (A_2), on a le

Théorème 2. Pour qu'un espace quantitatif vérifie la condition (A_2), il faut et il suffit que, E étant un ensemble quelconque, la fermeture de E coïncide avec la partie commune aux fermetures de toutes les sphères $S_\alpha(E)$.

Démonstration. Nécessité : E étant un ensemble quelconque, nous démontrons que $\overline{E} = \prod_\alpha \overline{S_\alpha(E)}$, où $\overline{M}$ est la fermeture de M. Pour ce but, il suffit de démontrer que $\overline{E} \supseteq \prod_\alpha \overline{S_\alpha(E)}$, car l'inclusion inverse $\overline{E} \subseteq \prod_\alpha \overline{S_\alpha(E)}$ est évidemment vraie selon la définition de la sphère $S_\alpha(E)$.

Or, p étant un point n'appartenant pas à $\overline{E}$, alors il y a un voisinage $V_\alpha(p)$ n'ayant aucun point commun avec E. Par la condition (A_2), il existe deux suffixes β et γ déterminés par p et α tels que

$$V_\gamma(p)\cdot V_\beta(q) \neq 0 \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p)\,,$$

d'où on a

$$V_\beta(q)\cdot E \neq 0 \rightarrow V_\gamma(p)\cdot V_\beta(q) = 0\,,$$

puisque $V_\alpha(p)\cdot E = 0$. Donc on a $V_\gamma(p)\cdot S_\beta(E) = 0$ selon la définition

1) La condition (A_2) coïncide avec l'une des conditions que M. COHEN a considéré dans son article, On imbedding a space in a complete space, Duke Math. Jour., 5 (1939), p. 174.

de la sphère $S_\beta(E)$; d'où $p \in \overline{S_\beta(E)}$. Nous en pouvons sûrement conclure que $E \supseteq \prod_\alpha \overline{S_\alpha(E)}$.

Suffisance : Pour cela, il suffit de démontrer que la condition (A_2) soit résultée de la condition que, F étant fermé, F coïncide avec la partie commune aux fermetures de toutes les sphères $S_\alpha(F)$.

Soit p un point quelconque et soit $V_\alpha(p)$ un voisinage du point p. Si l'on pose $F = CV_\alpha(p)$, F est fermé et ne contient pas le point p. Donc, d'après l'hypothèse posée, il résulte $F = \prod_\alpha \overline{S_\alpha(F)}$; il y a donc un suffixe β déterminé par p et F, c.-à-d. par p et α, tel que $p \in \overline{S_\beta(F)}$. Par conséquent, il y a un suffixe γ déterminé par p et β, c.-à-d. par p et α, tel que $V_\gamma(p) \cdot S_\beta(F) = 0$; donc on a

$$V_\beta(q) \cdot F \neq 0 \rightarrow V_\gamma(p) \cdot V_\beta(q) = 0 ,$$

d'où

$$V_\gamma(p) \cdot V_\beta(q) \neq 0 \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p) ,$$

puisque $F = CV_\alpha(p)$, c. q. f. d.

Du théorème 2, on a immédiatement les

Corollaire 1. Dans un espace quantitatif vérifiant la condition (A_2), p étant un point et F, fermé ne contenant pas le point p, alors il y a deux suffixes β et γ déterminés par p et F tels que $V_\gamma(p) \cdot S_\beta(F) = 0$; donc l'espace vérifie la condition (T_2)[1].

Corollaire 2. Dans un espace à caractère dénombrable vérifiant la condition (A_2), tout ensemble fermé est un G_δ et tout ensemble ouvert est un F_σ.

Voici une condition correspondant à la monotonie de l'espace à caractère dénombrable : Nous dirons qu'un espace quantitatif vérifie la *condition* (M)[2], lorsqu'à deux suffixes quelconques α et β correspond un suffixe γ tel que

$$V_\gamma(p) \subseteq V_\alpha(p) \cdot V_\beta(p) ,$$

quel que soit p.

Théorème 3. Pour qu'un espace quantitatif vérifiant la condition (M) vérifie la condition (A), il faut et il suffit que, E étant un ensemble quelconque, la fermeture de E coïncide avec la partie commune aux fermetures de toutes les sphères $S_\alpha(E)$.

---

1) (T_2) : Quels que soient le point p et l'ensemble fermé F disjoint de p, il existe une couple d'ensembles ouverts disjoints auxquels p et F sont respectivement intérieurs.

2) La condition (M) est identique à la condition (U_{II}) introduite par M. A. WEIL. Voir A. WEIL, loc. cit., p. 7.

Démonstration. La condition citée est bien nécessaire selon le théorème 2. Nous allons donc prouver que la condition soit suffisante.

Soit p un point quelconque de l'espace et soit $V_\alpha(p)$ un voisinage de p. Si l'on pose $F = CV_\alpha(p)$, F est fermé et ne contient pas le point p. Or, par l'hypothèse posée, il résulte $F = \overline{\prod_\alpha S_\alpha(F)}$, donc il y a un suffixe λ tel que $p \bar{\in} \overline{S_\lambda(F)}$. Par conséquent, il y a un suffixe μ tel que $V_\mu(p) \cdot S_\lambda(F) = 0$. Puis, de la condition (M), pour λ et μ il existe un suffixe β tel que $V_\beta(x) \subseteq V_\lambda(x) \cdot V_\mu(x)$, quel que soit x. Par suite, il résulte $V_\beta(p) \cdot S_\beta(F) = 0$ selon l'égalité $V_\mu(p) \cdot S_\lambda(F) = 0$. Il en résulte que, pour un point q quelconque, $V_\beta(q) \cdot F \neq 0 \rightarrow V_\beta(p) \cdot V_\beta(q) = 0$; d'où on a

$$V_\beta(p) \cdot V_\beta(q) \neq 0 \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p) ,$$

puisque $F = CV_\alpha(p)$, c. q. f. d.

Comme on peut sans peine le voir, la condition (A) entraîne les conditions suivantes (B) et (C) :

(B) : Pour un voisinage $V_\alpha(p)$ d'un point p, il existe un suffixe β déterminé par p et α tel que

$$V_\beta(p) \cdot V_\beta(q) \neq 0 \rightarrow q \in V_\alpha(p) ,$$

quel que soit q.

(C) : Pour un voisinage $V_\alpha(p)$ d'un point p, il existe un suffixe β déterminé par p et α tel que

$$q \in V_\beta(p) \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p) ,$$

quel que soit q.

Quant aux conditions (B) et (C), nous avons le

Théorème 4. Dans un espace quantitatif vérifiant la condition (M), la condition (A) équivaut à deux affirmations à la fois (B) et (C).

Démonstration. Il est clair que (A) entraîne (B) et (C). Nous allons donc prouver que (B) et (C) entraînent (A).

Soit $V_\alpha(p)$ un voisinage d'un point p. En vertu de (C), il existe un suffixe λ déterminé par p et α tel que

$$(1) \qquad q \in V_\lambda(p) \rightarrow V_\lambda(q) \subseteq V_\alpha(p) .$$

Puis, d'après (B) il y a pour le voisinage $V_\lambda(p)$ un suffixe μ déterminé par p et λ, c.-à-d. par p et α, tel que

$$(2) \qquad V_\mu(p) \cdot V_\mu(r) \neq 0 \rightarrow r \in V_\lambda(p) .$$

Des implications (1) et (2), on a

$$(3) \qquad V_\mu(p)\cdot V_\mu(q) \neq 0 \rightarrow V_\lambda(q) \subseteq V_\alpha(p)\,.$$

Selon la condition (M), il existe un suffixe β déterminé par λ et μ, c.-à-d. par p et α, tel que $V_\beta(x) \subseteq V_\lambda(x)\cdot V_\mu(x)$; donc on a en vertu de (3)

$$V_\beta(p)\cdot V_\beta(q) \neq 0 \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p)\,.$$

Cette implication est celle que nous avions en vue, c. q. f. d.

Corollaire. Dans un espace à caractère dénombrable et monotone, la condition (A) équivaut à deux affirmations à la fois (B) et (C).

En effet, l'espace étant monotone, il vérifie sûrement la condition (M), donc le corollaire est vrai selon le théorème 4, c. q. f. d.

Concernant les conditions (B) et (C), nous considérons respectivement les conditions suivantes :

(B_1) : Soient p un point et F un ensemble fermé ne contenant pas le point p. Il existe alors un suffixe α déterminé par p et F, tel que

$$V_\alpha(p)\cdot V_\alpha(q) \neq 0 \rightarrow q \bar{\in} F\,,$$

quel que soit q.

(C_1) : Soient p un point et F un ensemble fermé ne contenant pas le point p. Il existe alors un suffixe α déterminé par p et F tel que

$$q \in V_\alpha(p) \rightarrow V_\alpha(q)\cdot F = 0\,,$$

quel que soit q.

Par rapport aux conditions, nous avons les

Théorème 5. Dans un espace quantitatif la condition (B) équivaut à la condition (B_1).

Démonstration. (B) $\rightarrow$ (B_1) : En effet, comme le point p n'appartient pas à F, il existe un suffixe α déterminé par p et F tel que $V_\alpha(p)\cdot F = 0$. Par conséquent on a de (B) un suffixe β tel que

$$V_\beta(p)\cdot V_\beta(q) \neq 0 \rightarrow q \in V_\alpha(p)\,,$$

d'où on a

$$V_\beta(p)\cdot V_\beta(q) \neq 0 \rightarrow q \bar{\in} F\,.$$

(B_1) $\rightarrow$ (B) : Soit $V_\alpha(p)$ un voisinage d'un point p. En posant $F = CV_\alpha(p)$, F est fermé et ne contient pas p. En vertu de (B_1), il existe un suffixe β tel que

$$V_\beta(p)\cdot V_\beta(q) \neq 0 \rightarrow q \bar{\in} F\,,$$

d'où

$$V_\beta(p)\cdot V_\beta(q) \neq 0 \rightarrow q \in V_\alpha(p)\,,$$

puisque $F = CV_\alpha(p)$, c. q. f. d.

Théorème 6. Pour qu'un espace quantitatif satisfaisant à la condition (M) vérifie la condition (B), il faut et il suffit que, E étant un ensemble quelconque, la fermeture de E coïncide avec la partie commune aux fermetures de toutes les sphères restreintes $O_\alpha(E)$.

Démonstration. Nécessité : Soit E un ensemble quelconque. Par la définition de sphère restreinte $O_\alpha(E)$, il est évident que $E \subseteq O_\alpha(E)$, quel que soit α, et donc $\overline{E} \subseteq \underset{\alpha}{II}\overline{O_\alpha(E)}$. Par suite il s'agit de démontrer que $\overline{E} \supseteq \underset{\alpha}{II}\overline{O_\alpha(E)}$. Or, si p est un point n'appartenant pas à $\overline{E}$, $\overline{E}$ étant fermé, il existe un voisinage $V_\alpha(p)$ sans point commun avec E, donc selon la condition (B) il existe un suffixe β tel que $V_\beta(p) \cdot V_\beta(q) \neq 0 \rightarrow q \in V_\alpha(p)$; de la contraposition de cette implication, on a $q \bar{\in} V_\alpha(p) \rightarrow V_\beta(p) \cdot V_\beta(q) = 0$, et donc $V_\beta(p) \cdot O_\beta(E) = 0$. Par suite, il résulte $p \bar{\in} \overline{O_\beta(E)}$, et donc $p \bar{\in} \underset{\alpha}{II}\overline{O_\alpha(E)}$. C'est la conséquence que nous avions en vue.

Suffisance : Soit p un point et soit $V_\alpha(p)$ un voisinage de p. Si l'on pose $F = CV_\alpha(p)$, F est fermé et ne contient pas le point p. Or, par l'hypothèse posée, on a $F = \underset{\alpha}{II}\overline{O_\alpha(F)}$; Puisque $p \bar{\in} F$, il existe un suffixe α tel que $p \bar{\in} \overline{O_\alpha(F)}$, et par suite il existe encore un suffixe β tel que $V_\beta(p) \cdot O_\alpha(F) = 0$. Puis, d'après la condition (M), il existe un suffixe γ déterminé par α et β. c.-à-d. par p et α, tel que $V_\gamma(x) \subseteq V_\alpha(x) \cdot V_\beta(x)$, quel que soit x. Donc on a $V_\gamma(p) \cdot O_\gamma(F) = 0$, à savoir

$$q \bar{\in} V_\alpha(p) \rightarrow V_\gamma(p) \cdot V_\gamma(q) = 0 ,$$

puisque $F = CV_\alpha(p)$. Cette implication est la contraposition de la condition (B) elle-même, c. q. f. d.

De la démonstration du théorème 6, on peut immédiatement déduire les

Corollaire 1. Dans un espace quantitatif vérifiant la condition (B), la fermeture d'un ensemble E quelconque coïncide avec la partie commune aux fermetures de toutes les sphères restreintes $O_\alpha(E)$.

Corollaire 2. L'espace quantitatif vérifiant la condition (B) vérifie la condition (T_2).

Corollaire 3. Dans un espace à caractère dénombrable vérifiant la condition (B), tout ensemble fermé est un G_δ et tout ensemble ouvert est un F_σ.

Théorème 7. Dans un espace à caractère dénombrable, compact[1] *et monotone, vérifiant la condition (B), F_1 et F_2 étant fermés et disjoints, il existe deux sphères restreintes tels que $O_n(F_1)\cdot O_n(F_2) = 0$: donc l'espace vérifie la condition (T_3)*[2].

Démonstration. Soient F_1 et F_2 deux ensembles fermés disjoints. Je dis qu'il existe un suffixe n tel que $O_n(F_1)\cdot O_n(F_2) = 0$. En effet, supposons, par contre, que pour chaque suffixe n il existe un point p_n contenu dans la partie commune à $O_n(F_1)$ et à $O_n(F_2)$. L'espace considéré étant supposé compact, l'ensemble formé des points $\{p_n\}$ a au moins un point-β de lui-même, soit p. D'autre part l'espace étant supposé monotone, on a évidemment $O_{n+1}(F_i) \subseteq O_n(F_i)$, $(i = 1, 2)$, et donc $\sum_{j=n}^{\infty} p_j \subseteq O_n(F_i)$, $(i = 1, 2)$, pour tout n. Par suite il en résulte que $p \in \overline{O_n(F_1)}\cdot\overline{O_n(F_2)}$ pour tout n, puisque p est un point-β de $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$. D'ailleurs, en vertu du corollaire 1 du théorème 6, on a $\overline{F_1\cdot F_2} = \prod_n \overline{O_n(F_1)\cdot O_n(F_2)}$. Donc il résulte $p \in F_1\cdot F_2$. Nous aboutissons donc à une contradiction, c. q. f. d.

Théorème 8. Dans un espace quantitatif, les conditions (C) et (C_1) sont équivalentes.

Démonstration. $(C) \rightarrow (C_1)$: Soit p un point et soit F un ensemble fermé ne contenant pas le point p. Il existe alors un voisinage $V_\alpha(p)$ qui est disjoint de F, où α est déterminé par p et F. En vertu de (C), il existe un suffixe β déterminé par p et α, c.-à-d. par p et F, tel que

$$q \in V_\beta(p) \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p) .$$

Puisque $V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p)$ et $V_\alpha(p)\cdot F = 0$, on a

$$q \in V_\beta(p) \rightarrow V_\beta(q)\cdot F = 0 .$$

$(C_1) \rightarrow (C)$: Soit $V_\alpha(p)$ un voisinage d'un point p et posons $F = CV_\alpha(p)$. Alors, F est fermé et ne contient pas le point p, et par conséquent, en vertu de (C_1) il existe un suffixe β déterminé par p et F, c.-à-d. dar p et α, tel que

---

1) Un point p sera dit d'après M. HAUSDORFF un *point-β* d'un ensemble E, si chaque voisinage auquel p est attaché contient une infinité de points de E.

Un ensemble E sera dit *compact (en soi)* si pour tout sous-ensemble infini e de E il existe au moins un point p (de E) qui est un point-β de e.

2) (T_3): Quels que soient les ensembles fermés disjoints F_1 et F_2, il existe deux ensembles ouverts disjoints auxquels F_1 et F_2 sont respectivement intérieurs.

$$q \in V_\beta(p) \rightarrow V_\beta(q) \cdot F = 0 ,$$

où $F = CV_\alpha(p)$. Donc on a

$$q \in V_\beta(q) \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p) , \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Nous pouvons encore conduire de la condition (A) la condition (D) suivante qui jouera un rôle le plus important dans cet article :

(D) : Pour un voisinage $V_\alpha(p)$ d'un point p, il existe un suffixe β déterminé par p et α tel que

$$p \in V_\beta(q) \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p) ,$$

quel que soit q.

Par rapport à (D), nous considérons la condition :

(D_1) : Soit p un point et soit F un ensemble fermé ne contenant pas le point p. Il existe alors un suffixe β déterminé par p et F tel que

$$p \in V_\beta(q) \rightarrow V_\beta(q) \cdot F = 0 ,$$

quel que soit q.

Ceci étant posé, nous avons le

Théorème 9. Dans un espace quantitatif, les conditions (D) et (D_1) sont équivalentes.

Démonstration. (D) $\rightarrow$ (D_1) : Soit p un point et soit F un ensemble fermé ne contenant pas le point p. Il existe alors un voisinage $V_\alpha(p)$ qui est disjoint de F. Or, d'après la condition (D) il existe pour le voisinage $V_\alpha(p)$ un suffixe β déterminé par p et α tel que

$$p \in V_\beta(q) \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p) ,$$

d'où

$$p \in V_\beta(q) \rightarrow V_\beta(q) \cdot F = 0 ,$$

puisque $F \cdot V_\alpha(p) = 0$.

(D_1) $\rightarrow$ (D) : Soit $V_\alpha(p)$ un voisinage d'un point p. En posant $F = CV_\alpha(p)$, F est fermé et ne contient pas le point p, il existe de la condition (D_1) un suffixe β déterminé par p et F, c.-à-d. par p et α, tel que

$$p \in V_\beta(q) \rightarrow V_\beta(q) \cdot F = 0 ,$$

d'où

$$p \in V_\beta(q) \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p) ,$$

puisque $F = CV_\alpha(p)$, c. q. f. d.

Théorème 10. Pour qu'un espace quantitatif vérifie la condition (D), il faut et il suffit que, E étant un ensemble quelconque, la fermeture de E coïncide avec la partie commune à toutes les sphères $S_\alpha(E)$.

Démonstration. Soit E un ensemble quelconque et soit p un point qui n'appartient pas à $\overline{E}$. Il y a alors un voisinage $V_\alpha(p)$ qui est disjoint de E. Donc d'après la condition (D), il y a un suffixe β tel que $p \in V_\beta(q) \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p)$; donc $p \in V_\beta(q) \rightarrow V_\beta(q) \cdot E = 0$, c.-à-d. on a $V_\beta(q) \cdot E \neq 0 \rightarrow p \overline{\in} V_\beta(q)$. Par conséquent, de la définition de $S_\beta(E)$ il résulte $p \overline{\in} S_\beta(E)$; donc $p \overline{\in} \underset{\alpha}{I\!I} S_\alpha(E)$, à savoir

$$(1) \qquad \underset{\alpha}{I\!I} S_\alpha(E) \subseteq \overline{E} .$$

Ensuite, soit p un point de $\overline{E}$. Alors, il est clair que $V_\alpha(p) \cdot E \neq 0$ pour tout suffixe α. Donc, de la définition de la sphère $S_\alpha(E)$, on a $p \in S_\alpha(E)$ pour tout α ; il résulte donc $p \in \underset{\alpha}{I\!I} S_\alpha(E)$, c.-à-d.

$$(2) \qquad \overline{E} \subseteq \underset{\alpha}{I\!I} S_\alpha(E) .$$

Les implications (1) et (2) nous donnent l'égalité $\overline{E} = \underset{\alpha}{I\!I} S_\alpha(E)$.

Inversement, nous allons démontrer que, la condition (D) est réalisée à la condition que, F étant fermé, F coïncide avec la partie commune à toutes les sphères $S_\alpha(F)$. Soit $V_\alpha(p)$ un voisinage d'un point p. En posant $F = CV_\alpha(p)$, F est fermé et ne contient pas le point p. Par l'hypothèse on a $F = \underset{\alpha}{I\!I} S_\alpha(F)$. Donc il existe un suffixe β tel que $p \overline{\in} S_\beta(F)$. Selon la définition de $S_\beta(F)$, on a $V_\beta(q) \cdot F \neq 0 \rightarrow p \overline{\in} V_\beta(q)$; d'où $p \in V_\beta(q) \rightarrow V_\beta(q) \cdot F = 0$. Donc on a

$$p \in V_\beta(q) \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p) ,$$

puisque $F = CV_\alpha(p)$, c. q. f. d.

Du théorème précédent, on a immédiatement le

Corollaire. Dans un espace à caractère dénombrable vérifiant la condition (D), tout ensemble fermé est un G_δ et tout ensemble ouvert est un F_σ.

Voici un fait intéressant à l'égard de la condition (D) : MM. ALEXANDROFF et URYSOHN ont autrefois traités un problème par rapport à la métrisation d'un espace topologique et donnés une condition nécessaire et suffisante comme suivant :

Pour qu'un espace topologique puisse être considéré comme un espace distancié, il faut et il suffit qu'il y existe une chaîne complète

et régulière[1].

Relativement à cette condition, il y a un théorème intéressant comme suivant :

Théorème 11[2]. *Pour qu'un espace à caractère dénombrable vérifie la condition (D), il faut et il suffit qu'il y existe une chaîne complète.*

Démonstration. Nécessité — Soit $\{V_n(x)\}$ une famille de voisinages d'un point x dans un espace donné et soit H_n un système de voisinages $V_n(x)$, n étant fixé et x parcourant l'espace.

Nous dirons que la suite $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ des systèmes H_n est une chaîne complète. En effet, il est évident que chaque système H_n consiste d'ensembles ouverts et recouvre l'epsace. Puis, soit $V_1^{(x)}, V_2^{(x)}, \ldots, V_n^{(x)}, \ldots$ une famille des ensembles contenant le point x et appartenant respectivement à $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$. Pour notre sujet, il suffit de démontrer que les familles $\{V_n(x)\}$ et $\{V_m^{(x)}\}$ soient équivalentes.

Or, $V_m^{(x)}$ étant un ensemble quelconque de la famille $\{V_n^{(x)}\}$, il est clair qu'il existe un voisinage $V_{m'}(x)$ contenu dans $V_m^{(x)}$, puisque celui-ci est ouvert.

Inversement, soit $V_m(x)$ un voisinage de la famille $\{V_n(x)\}$; il existe de la condition (D) un nombre naturel m' déterminé par x et m tel que

$$(*) \qquad x \in V_{m'}(q) \rightarrow V_{m'}(q) \subseteq V_m(x) .$$

---

1) *Définitions.* 1. Soit $\{V(\xi)\}$ une suite de domaine dont chacun contient le point ξ ; nous dirons qu'elle *détermine* ce point dans l'espace topologique donné R si chaque domaine G contenant ξ contient au moins un domaine $V(\xi)$.

2. Nous dirons qu'un système Π de domaines *recouvre* l'espace R si chaque point ξ de R appartient à un au moins des domaines du système Π.

3. Soient Π_1 et Π_2 deux systèmes de domaines dont chacun recouvre R : nous dirons que Π_2 est *inscrit* dans Π_1, si à toute couple V_2 et W_2 de domaines de Π_2 ayant des points communs, correspond un domaine V_1 de Π_1 qui contient tous les deux.

4. Soit $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$ une suite de systèmes recouvrant l'espace ; nous dirons que c'est une *chaîne complète* si la condition suivante est vérifiée :

soient ξ un point quelconque de R et $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ des domaines contenant ξ et appartenant respectivement à $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$; dans ce cas la suite $\{V_n\}$ détermine le point ξ dans R.

5. Une chaîne complète $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$ sera dite *régulière* si, pour tout n, Π_{n+1} est inscrit dans Π_n.

Cf. P. ALEXANDROFF et P. URYSOHN ; Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace (𝔏) soit une classe (𝔇), C. R. (Paris), t. 177 (1923), pp. 1274-1276.

2) Ce théorème est dû à M. KUNUGUI.

Par conséquent, si l'on considère $V_{m'}^{(x)}$ pour ce nombre m', on a de (*)

$$V_{m'}^{(x)} \subseteq V_m(x) .$$

Par suite, les familles $\{V_n^{(x)}\}$ et $\{V_n(x)\}$ sont équivalentes, donc la suite $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$ est une chaîne complète.

Suffisance — Soit $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n, \ldots$ une chaîne complète et soit x un point quelconque dans l'espace. Désignons par $V_n^{(x)}$ un ensemble quelconque appartenant à Π_n et contenant le point x, et adoptons la famille des ensembles $V_1^{(x)}, V_2^{(x)}, \ldots, V_n^{(x)}, \ldots$ comme un système de voisinages de x, x parcourant l'espace.

Nous allons prouver que la famille $\{V_n^{(x)}\}$ des voisinages vérifie la condition (D) ; Supposons, par contre, que la famille ne vérifie pas la condition (D). Alors, il y a un point p et un nombre naturel m de façon que, pour chaque nombre n et un point q_n convenablement choisi,

$$(**) \qquad p \in V_n^{(q_n)} \quad \text{et} \quad V_n^{(q_n)} - V_m^{(p)} \neq 0 .$$

Considérons la famille des ensembles $V_1^{(q_1)}, V_2^{(q_2)}, \ldots, V_n^{(q_n)}, \ldots$; alors par l'hypothèse que la suite $\{\Pi_n\}$ est une chaîne complète la famille $\{V_n^{(q_n)}\}$ doit déterminer le point p, mais ce qui est impossible, car, de la formule (**), $p \in V_n^{(q_n)}$ et $V_n^{(q_n)} - V_m^{(p)} \neq 0$ pour tout n et $V_m^{(p)}$ est ouvert. Donc nous aboutissons à une contradiction, c. q. f. d.

Exemple 1. Il y a un espace à caractère dénombrable vérifiant la condition (D) sans satisfaire à la condition (C).

Dans le plan à deux dimensions, désignons par R l'ensemble formé des points $p = (x, y)$, où $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$, et de deux points (0, 0) et (1, 0). Nous définirons les voisinages $V_m(p)$ d'un point p de R comme suit :

Pour un point $p = (x, y)$, où $0 < y$, nous adoptons comme un voisinage $V_m(p)$ l'ensemble des points, situés du côté de $0 \leq y$ et intérieurs du cercle dont le centre est p et le rayon $\frac{1}{m}$, où m est un nombre naturel.

Pour le point $p = (0, 0)$, nous attribuons comme un voisinage $V_m(p)$ l'ensemble commun à R et à l'ensemble intérieur du cercle dont le centre est p et le rayon $\frac{1}{m}$.

Pour le point $p = (1, 0)$, $V_m(p)$ est défini comme l'ensemble des points (x, y), où $0 < x \leq 1$ et $0 \leq y < \frac{1}{m}$.

Ceci étant posé, nous dirons tout d'abord que l'espace R ainsi défini vérifie la condition (D). Soit $V_m(p)$ un voisinage donné d'un point $p=(x, y)$ où $0<y$. Alors, comme on peut sans peine le voir, il suffit de choisir un nombre naturel n tel que $3m<n$ et $\frac{3}{y}<n$.

Pour le voisinage $V_m(p)$, où $p=(0, 0)$ ou $p=(1, 0)$, il suffit de choisir un nombre naturel n tel que $3m<n$.

Ensuite, l'espace R ne vérifie pas la condition (C). En effet, considérons le point $p=(1, 0)$; soit $V_m(p)$ un voisinage quelconque du point p. Il existe alors un point $q=\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right)$ pour tout n, et, comme on peut facilement le voir, $q \in V_n(p)$ mais $V_n(q)-V_m(p) \neq 0$ puisque $(0, 0) \in V_n(q)$ et $(0, 0) \bar{\in} V_m(p)$ quels que soient m et n.

Théorème 12. Dans un espace quantitatif, pour qu'un ensemble fermé F coïncide avec la partie commune à toutes les sphères restreintes $O_\alpha(F)$, il faut et il suffit que l'espace vérifie la condition (E) suivante :

(E) : Soient p un point quelconque et $V_\alpha(p)$ un voisinage de p. Alors il existe un suffixe β déterminé par p et α tel que

$$p \in V_\beta(q) \rightarrow q \in V_\alpha(p) ,$$

quel que soit q.

Démonstration. Nécessité — Etant donnés un point p et un voisinage $V_\alpha(p)$ de p. En posant $F=CV_\alpha(p)$, F est fermé et ne contient pas le point p. Par conséquent, selon l'hypothèse que $F=\prod_\alpha O_\alpha(F)$ il existe un suffixe β tel que $p \bar{\in} O_\beta(F)$; donc par la définition de $O_\beta(F)$, il résulte, q étant un point de F, $p \bar{\in} V_\beta(q)$, autrement dit $p \in V_\beta(q) \rightarrow q \in V_\alpha(p)$ puisque $F=CV_\alpha(p)$.

Suffisance—Supposons que la condition (E) soit vérifiée par l'espace. F étant un ensemble fermé, notre but est de démontrer que $F=\prod_\alpha O_\alpha(F)$.

Or, on a évidemment $F \subseteq \prod_\alpha O_\alpha(F)$ selon la définition de $O_\alpha(F)$, donc il nous suffit de démontrer que, p n'étant pas un point de F, il n'appartient pas non plus à $\prod_\alpha O_\alpha(F)$; Dans ce cas, il existe un voisinage $V_\alpha(p)$ de p sans point commun à F. Par conséquent, selon la contraposition de la condition (E) il existe un suffixe β tel que $q \bar{\in} V_\alpha(p) \rightarrow p \bar{\in} V_\beta(q)$. Cette implication et $V_\alpha(p) \cdot F=0$ montrent que $p \bar{\in} O_\beta(F)$, c.-à-d. $F \supseteq \prod_\alpha O_\alpha(F)$, c. q. f. d.

Du théorème précédent on déduit le

Corollaire. Dans un espace à caractère dénombrable vérifiant la

condition (E), tout ensemble fermé est un G_δ et tout ensemble ouvert est un F_σ.

Exemple 2. Nous donnons ici un exemple d'espace régulier, à caractère dénombrable et monotone sans vérifier la condition (E).

Désignons par R le semi-plan $0 \leq y$ dans le plan à deux dimensions. Nous adoptons comme le voisinage $V_m(p)$ d'un point $p = (x, y)$ où $0 < y$, l'ensemble formé des points, situés dans R et intérieurs du cercle dont le centre est p et le rayon $\frac{1}{m}$. Pour un point $p = (x, 0)$ situé sur l'axe des x, nous adoptons comme le voisinage $V_m(p)$ l'ensemble des points intérieurs du cercle ayant le rayon $\frac{1}{m}$ et tangent en p à l'axe des x et situés du côté de $0 \leq y$ et du point p lui-même.

Comme on peut sans peine le vérifier, l'espace ainsi défini est à caractère dénombrable, monotone et régulier. Nous allons démontrer que l'espace ne vérifie pas la condition (E) : En effet, considérons un point $p = (x_0, 0)$ situé sur l'axe des x et un voisinage $V_m(p)$. Pour un nombre naturel n, prenons un point q dont les coordonnées (x, y) sont données comme racine des équations suivantes : $(x-x_0)^2 + \left(y-\frac{2}{m}\right)^2 = \left(\frac{2}{m}\right)^2$ et $(x-x_0)^2+y^2 = \left(\frac{1}{2n}\right)^2$. Alors, on a évidemment $p \in V_n(q)$ pour tout nombre naturel n, mais $q \bar{\in} V_m(p)$ c. q. f. d.

Quant aux conditions (a), (b), ..., (e), nous voulons ici considérer seulement les deux conditions (b) et (e) :

(b) : Pour un point p et un voisinage $V_\alpha(p)$, il existe un suffixe β déterminé par p et α tel que

$$V_\beta(p) \cdot V_\beta(q) \neq 0 \rightarrow p \in V_\alpha(q) ,$$

quel que soit q.

(e)[1] *: Pour un point p et un voisinage $V_\alpha(p)$, il existe un suffixe β déterminé par p et α tel que*

$$q \in V_\beta(p) \rightarrow p \in V_\alpha(q) ,$$

quel que soit q.

Théorème 13. Un espace quantitatif vérifiant les conditions (D), (b) et (M) satisfait à la condition (A).

Démonstration. Soit $V_\alpha(p)$ un voisinage d'un point p. Par la condition (D) il existe un suffixe λ déterminé par p et α tel que

1) C'est M. COHEN qui a donné la condition (e) dans l'espace à caractère dénombrable ; Cf. L. M. COHEN, Uniformity properties in topological space satisfying the first denumerability postulate, Duke Math. Jour., 3 (1937), p. 611.

$$(1) \qquad p \in V_\lambda(q) \rightarrow V_\lambda(q) \subseteq V_\alpha(p) .$$

Ensuite, selon la condition (b), à $V_\lambda(p)$ correspond un suffixe μ déterminé par p et λ, c.-à-d. par p et α, tel que

$$(2) \qquad V_\mu(p) \cdot V_\mu(q) \neq 0 \rightarrow p \in V_\lambda(q) .$$

En rapprochant les implications (1) et (2), on a

$$(3) \qquad V_\mu(p) \cdot V_\mu(q) \neq 0 \rightarrow V_\lambda(q) \subseteq V_\alpha(p) .$$

Par la condition (M), aux deux suffixes λ et μ, autrement dit à p et à α correspond un suffixe β tel que $V_\beta(x) \subseteq V_\lambda(x) \cdot V_\mu(x)$, quel que soit x. De l'implication (3), on a donc, quel que soit q,

$$V_\beta(p) \cdot V_\beta(q) \neq 0 \rightarrow V_\beta(q) \subseteq V_\alpha(p) , \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Théorème 14. Dans un espace quantitatif, la condition (b) équivaut à la condition (b_1) suivante :

(b_1) *: Quels que soient un point p et un ensemble E, si $p \notin O_\alpha(E)$, il existe un suffixe β déterminé par p et α tel que $V_\beta(p) \cdot O_\beta(E) = 0$.*

Démonstration. (b) $\rightarrow$ (b_1) : De l'hypothèse que $p \notin O_\alpha(E)$, q étant un point de E, $p \notin V_\alpha(q)$. Par conséquent, en vertu de la contraposition de (b), il existe un suffixe β déterminé par p et α tel que $p \notin V_\alpha(q) \rightarrow V_\beta(p) \cdot V_\beta(q) = 0$, d'où on a $V_\beta(p) \cdot \sum_{q \in E} V_\beta(q) = 0$, donc $V_\beta(p) \cdot O_\beta(E) = 0$.

(b_1) $\rightarrow$ (b) : Etant donnés un point p et un suffixe α. En désignant par E l'ensemble des points q tels que $p \notin V_\alpha(q)$, il résulte $p \notin O_\alpha(E)$. D'après la supposition (b_1), il y a un suffixe β tel que $V_\beta(p) \cdot O_\beta(E) = 0$, c.-à-d. $V_\beta(p) \cdot V_\beta(q) = 0$ pour tout point q de E. Autrement dit, pour un point p et un suffixe α, il existe un suffixe β déterminé par p et α tel que

$$p \notin V_\alpha(q) \rightarrow V_\beta(p) \cdot V_\beta(q) = 0 .$$

Cette implication est équivalente à (b), c. q. f. d.

Du théorème précédent, on a les

Corollaire 1. Un espace quantitatif vérifiant les conditions (b) et (T_0)[1] vérifie la condition (T_1)[2].

1) (T_0): Quels que soient les points p et q, il existe un ensemble disjoint de q et auquel p est intérieur (et inversement).

2) (T_1): Quels que soient deux points distincts p et q, il existe deux ensembles disjoints auxquels p et q sont respectivement intérieurs.

Corollaire 2. Un espace quantitatif vérifiant les conditions (E) et (b) vérifie la condition (T_2).

En effet, ce corollaire est obtenu des théorèmes 12 et 14.

Quant à la condition (e), on a les

Théorème 15. Dans un espace à caractère dénombrable vérifiant la condition (e), tout ensemble fermé est un G_δ *et tout ensemble ouvert est un* F_σ.

Démonstration. Il nous suffit de démontrer que tout ensemble fermé soit un G_δ. Soient F un ensemble fermé et p un point de F. Pour le point p et un suffixe α, faisons correspondre le voisinage $V_{\beta(p,\alpha)}(p)$ où $\beta(p, \alpha)$ est le suffixe déterminé par la condition (e). En posant $G_\alpha = \sum_{p\in F} V_{\beta(p,\alpha)}(p)$, il est clair que $F \subseteq \prod_\alpha G_\alpha$. Nous allons prouver que $F \supseteq \prod_\alpha G_\alpha$; Soit q un point n'appartenant pas à F, F étant fermé, il existe un suffixe α tel que $V_\alpha(q)\cdot F = 0$. Or, si l'on considère l'ensemble G_α pour le suffixe α, G_α étant l'ensemble $\sum_{p\in F} V_{\beta(p,\alpha)}(p)$, en vertu de la contraposition de la condition (e), on a $q \overline{\in} V_{\beta(p,\alpha)}(p)$; Par conséquent, on a $q \overline{\in} G_\alpha$, donc il vient $F \supseteq \prod_\alpha G_\alpha$; En résumé, on a $F = \prod_\alpha G_\alpha$. Par suite, si l'espace est à caractère dénombrable, on aura $F = \prod_n G_n$; donc il en résulte que tout ensemble fermé (ou ouvert) est un G_δ (ou F_σ), c. q. f. d.

Corollaire. Dans un espace vérifiant la condition (b), tout ensemble fermé est un G_δ *et tout ensemble ouvert est un* F_σ.

Théorème 16. La condition (e) équivaut à la condition (e_1) *suivante :*

(e_1) *: Quels que soient un point p et un ensemble E, si* $p \overline{\in} O_\alpha(E)$ *pour un suffixe* α, *alors* $p \overline{\in} \overline{E}$.

Démonstration. (e) $\rightarrow$ (e_1) : Supposons, par contre, que la condition (e_1) ne soit pas vérifiée ; alors il existe pour tout suffixe α un ensemble E et un point p tels que $p \overline{\in} O_\alpha(E)$ et $p \in \overline{E}$. Or, de la supposition $p \in \overline{E}$, à chaque suffixe β correspond un point p_β de E tel que $p_\beta \in V_\beta(p)$; D'autre part, de l'hypothèse $p \overline{\in} O_\alpha(E)$, on a $p \overline{\in} V_\alpha(p_\beta)$. Ce qui est contraire à (e).

(e_1) $\rightarrow$ (e) : Soient q un point et α un suffixe. S'il existe de point p tel que $q \overline{\in} V_\alpha(p)$, désignons par E l'ensemble de tels points p ; alors il est évident que $q \overline{\in} \sum_{p\in E} V_\alpha(p)$, c.-à-d. $q \overline{\in} O_\alpha(E)$. Par suite de la condition (e_1), il résulte $q \overline{\in} E$. $\overline{E}$ étant fermé, il existe un suffixe β tel que $V_\beta(q)\cdot E = 0$, où β est déterminé par q et E, autrement dit β est décidé par q et α. Il est clair de la formule $V_\beta(q)\cdot E = 0$

que $p \in V_\beta(q)$ pour p de E; d'où on a $q \in V_\alpha(p) \rightarrow p \in V_\beta(q)$. Cette implication équivaut à (e), c. q. f. d.

Or, il me semble que les conditions traitées jusqu'à présent puissent être considérées, en un sens, comme celles de séparation entre un point et un ensemble fermé ne contenant pas le point. Donc nous donnons à cette place-ci deux exemples des espaces en relation avec les conditions de séparation de points dans les espaces abstraits.

Exemple 3. Voici un espace à caractère dénombrable vérifiant la condition (A) sans satisfaire à la condition (T_0).

Dans le plan à deux dimensions, considérons l'ensemble R formé des points (x, y), où $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$, et de deux points (0, 0) et (1, 0).

Pour un point $p = (x, y)$, où $0 < y$, nous définirons un voisinage $V_m(p)$, $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, comme l'ensemble des points, situés dans la partie $0 < y$ et intérieures du cercle dont le centre est p et le rayon $\frac{1}{m}$. Aux points (0, 0) et (1, 0), nous attribuons au même voisinage $V_m\{(0, 0)\} \equiv V_m\{(1, 0)\}$, $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, qui consiste de points (x, y), où $0 \leq y < \frac{1}{m}$ et $0 \leq x \leq 1$.

Dans l'espace ainsi défini, il est manifeste que la condition (T_0) n'est pas vérifiée, puisque les deux points (0, 0) et (1, 0) ont le même voisinage $V_m((0, 0))$, $V_m((1, 0))$, quel que soit m.

Nous dirons que l'espace vérifie la condition (A). Soit p un point et soit $V_m(p)$ un voisinage arbitraire de p. Supposons tout d'abord que le point $p = (x, y)$ ne soit ni (0, 0) ni (1, 0). Prenons un nombre naturel n suffisamment grand tel que $3m < n$ et $\frac{3}{n} < y$, alors on peut facilement voir que la condition (A) est vérifiée pour ce nombre n. Ensuite, soit p l'un des points (0, 0) et (1, 0), n étant un nombre $> 3m$, la condition (A) est vérifiée pour ce nombre n.

Exemple 4. Il y a un espace à caractère dénombrable vérifiant les conditions (D), (C) et (T_0) sans vérifier la condition (T_1).

Prenons l'espace défini dans l'exemple 3, et modifions les voisinages des points (0, 0) et (1, 0) comme suit:

Au point $p = (0, 0)$ faisons correspondre comme voisinage $V_m(p)$ l'ensemble des points (x, y) dont les coordonnées sont définies par l'inégalité $x^2 + y^2 < \frac{1}{m^2}$, et pour le point $p = (1, 0)$ adoptons comme

voisinage $V_m(p)$ l'ensemble des points (x, y), où $0 < x \leq 1$ et $0 \leq y < \frac{1}{m}$.

Il est clair que l'espace ainsi défini vérifie la condition (T_0) sans vérifiier (T_1). Nous dirons qu'il vérifie les conditions (D) et (C). Soit $p = (x, y)$ un point et soit $V_m(p)$ un voisinage de p; alors on peut sans peine vérifier qu'un voisinage $V_n(q)$, où $3m < n$ et $\frac{3}{n} < y$ ou $3m < n$ suivant que $0 < y$ ou $0 = y$, satisfait aux conditions (D) et (C).

Ensuite, nous allons chercher les conditions de séparation entre deux points distincts dans les espaces quantitatifs.

Théorème 17. Un espace quantitatif vérifiant les conditions (B), (M) et (T_0) jouit de la condition (T_1^*) suivante :

(T_1^*) *: Quels que soient deux points distincts p et q, il existe un suffixe α déterminé par p et q tel que :*

l'un ou l'autre de $V_\alpha(p)$ et $V_\alpha(q)$ est disjoint de $V_\alpha(r)$, quel que soit r.

Démonstration. Un ensemble formé d'un seul point est fermé, puisque l'espace vérifie la condition (T_0). Donc en tenant compte de (B), il existe un suffixe λ tel que $V_\lambda(p) \cdot V_\lambda(q) = 0$. En posant $F_1 = CV_\lambda(p)$, F_1 est fermé et $p \in F_1$. Par suite il existe selon le théorème 5 un suffixe β tel que

$$(1) \qquad x \in F_1 \rightarrow V_\beta(p) \cdot V_\beta(x) = 0 .$$

De la même manière, en posant $F_2 = CV_\lambda(q)$, il existe un suffixe γ tel que

$$(2) \qquad x \in F_2 \rightarrow V_\gamma(q) \cdot V_\gamma(x) = 0 .$$

Par la condition (M) il existe un suffixe α tel que $V_\alpha(x) \subseteq V_\beta(x) \cdot V_\gamma(x)$ quel que soit x. Par conséquent, $F_1 + F_2$ étant l'espace tout entier, r appatient à l'un ou l'autre de F_1 et F_2; alors il est évident, soit $r \in F_1$, de la formule (1), que $V_\alpha(r) \cdot V_\alpha(p) \subseteq V_\beta(r) \cdot V_\beta(p) = 0$, c. q. f. d.

Corollaire. Un espace quantitatif vérifiant la condition (T_1^*) vérifie aussi la condition suivante:

$(T_{1,0}^*)$ *: Soient p et q deux points distincts. Alors il existe un suffixe α déterminé par p et q tel que $\overline{V_\alpha(p)} \cdot \overline{V_\alpha(q)} = 0$.*

De la condition $(T_{1,0}^*)$, nous pouvons immédiatement déduire la condition ;

(T_0^*) *: Soient p et q deux points distincts. Il existe alors un suffixe*

α déterminé par p et q tel que : soit r un point arbitraire, alors $V_\alpha(r)$ ne contient pas simultanément les deux points p et q.

Par rapport à (T_0^*), on a le

Théorème 18. Un espace quantitatif vérifiant les conditions (D) et (T_0) jouit de la condition (T_0^*).

Démonstration. D'après la condition (T_0), l'ensemble formé d'un seul point est fermé. Soient p et q deux points distincts. Alors il existe du théorème 9 un suffixe α tel que $p \in V_\alpha(r) \rightarrow q \bar{\in} V_\alpha(r)$, quel que soit r, ce qui prouve le théorème, c. q. f. d.

Corollaire. La condition (T_0^*) entraîne la condition (T_0).

Théorème 19. Dans un espace à caractère dénombrable et monotone, la condition (T_0^*) équivaut à la condition suivante :

(S_1) : Soit $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_k \leq \ldots$ une suite monotone croissante de nombres naturels tels que $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$, et soit $V_{n_k}(p_k)$ un voisinage d'un point p_k arbitraire. Alors la partie commune $\underset{k}{II} V_{n_k}(p_k)$ consiste au plus d'un point.

Démonstration. $(T_0^*) \rightarrow (S_1)$: Par contre, supposons qu'il existe deux points distincts p et q, qui appartiennent à $\underset{k}{II} V_{n_k}(p_k)$. Or, en vertu de (T_0^*), il existe un nombre naturel n tel que, quel que soit r, $V_n(r)$ ne contient pas à la fois les deux points p et q. Donc, si $n < n'$, tout voisinage $V_{n'}(r)$ l'est également puisque la famille des voisinages est monotone. D'autre part, par l'hypothèse $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$, il y a un nombre n_k plus grand que n, et $V_{n_k}(p_k)$ contient les deux points p et q. Nous aboutissons donc à une contradiction.

$(S_1) \rightarrow (T_0^*)$: Soient p et q deux points distincts. Supposons, par contre, qu'à un nombre naturel n correspond un point p_n tel que $p+q \subseteq V_n(p_n)$. Alors il y a une suite de voisinages $\{V_n(p_n)\}$ de façon que $p+q \subseteq V_n(p_n)$ pour tout n, donc on a $p+q \subseteq \underset{n}{II} V_n(p_n)$. Ce qui est contraire à l'hypothèse (S_1), c. q. f. d.

De la condition (S_1), nous pouvons immédiatement déduire la condition suivante :

(S_2)[1] : Soit $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_k \leq \ldots$ une suite monotone de nombres naturels infiniment croissante et soit $V_{n_k}(p_k)$, $(k=1, 2, 3, \ldots)$, une suite de voisinages tels que $V_{n_1}(p_1) \supseteq V_{n_2}(p_2) \supseteq \ldots \supseteq V_{n_k}(p_k) \supseteq \ldots$. Alors la partie commune $\underset{k}{II} V_{n_k}(p_k)$ ne contient qu'au plus un point.

1) Voir notre article, Les espaces abstraits et les ensembles ordonnés, Ces Jour., Sér. 1, Vol. 8 (1940), p. 160.

Exemple 5. Il y a un espace régulier et à caractère dénombrable ne vérifiant pas la condition (S_2).

Considérons un espace qui se compose de toute couple (x, y) des nombres réels, où $0 < x < 1$ et $0 \leq y \leq 1$. Nous définirons la relation de l'ordre parmi les points de l'espace comme il suit:

Si $x' < x$, alors $(x', y') < (x, y)$, et si $x = x'$ et $y' < y$, alors $(x', y') < (x, y)$. Comme on peut aisément le vérifier, l'espace devient ainsi un espace ordonné linéairement. Donc nous pouvons adopter la famille des intervalles qui contiennent un point p comme celle des voisinages du point. Par cette convention, nous pouvons sans peine prouver que l'espace considéré soit régulier, à caractère dénombrable et monotone[1].

Nous allons démontrer que dans cet espace la condition (S_2) n'est pas vérifiée. Soit $p_1 = (x_1, 0)$ un point et soit $V_{n_1}(p_1)$ un voisinage de p_1, où $V_{n_1}(p_1)$ est l'intervalle $((x_1', y_1'), (x_1, y_1))$, $0 < x_1' < x_1$. Soit $p_2 = (x_2, 0)$, où $x_1' < x_2 < x_1$, un point contenu dans $V_{n_1}(p_1)$ et soit $V_{n_2}(p_2)$ un voisinage de point p_2, où $n_1 < n_2$ et $V_{n_2}(p_2)$ est l'intervalle $((x_2', y_2'), (x_2, y_2))$, où $x_1' < x_2' < x_2 < x_1$. De la même manière nous pouvons choisir une suite des voisinages $\{V_{n_k}(p_k)\}$ tels que:

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots,$$

$$V_{n_1}(p_1) \supseteq V_{n_2}(p_2) \supseteq \cdots \supseteq V_{n_k}(p_k) \supseteq \cdots,$$

et

$$x_1' < x_2' < \cdots < x_k' < \cdots < x_k < \cdots < x_2 < x_1.$$

Or, si l'on pose $x_0 = \lim_{k \to \infty} x_k$, comme on peut facilement le vérifier, l'intervalle $((x_0, 0), (x_0, 1))$ est contenu dans la partie commune à $\prod_k V_{n_k}(p_k)$, c. q. f. d.

Comme on le sait, pour qu'un espace (v) jouisse de la condition (T_0), il faut et il suffit que la partie commune à tous les voisinages $V(p)$ d'un point p ne contienne que le point p lui-même. Par conséquent on a le

Théorème 20. Un espace à caractère dénombrable vérifiant la condition (S_2) jouit de la condition (T_0).

Avant de finir ce paragraphe, nous considérons une relation parmi l'espace à structure uniforme introduit par M. A. WEIL[2] et les espaces quantitatifs que nous avons traités jusqu'à présent.

1) Cf. Notre article, Le problème de SOUSLIN dans les espaces abstraits, Ces Jour., Sér. 1, Vol. 8 (1939), pp. 29-31.

2) Voir, A. WEIL, loc. cit., p. 7.

L'espace introduit par M. WEIL vérifie les trois conditions suivantes :

(U_I) : *Quels que soient p et le suffixe α, on a $p \in V_\alpha(p)$; quels que soit p et q distincts dans l'espace, il y a un suffixe α tel que $q \overline{\in} V_\alpha(p)$.*

(U_{II}) : *Quels que soient les suffixes α, β, il y a un suffixe γ tel que $V_\gamma(p) \subseteq V_\alpha(p) \cdot V_\beta(p)$ quel que soit p.*

(U_{III}) : *A tout suffixe α on peut faire correspondre un suffixe β tel que les deux relations $p \in V_\beta(r)$, $q \in V_\beta(r)$ entraînent $q \in V_\alpha(p)$.*

Comme on le voit, la condition (U_{III}) peut être écrite sous la formule :

α étant un suffixe, il y a un suffixe β tel que

$$(1) \qquad p \in V_\beta(r) \rightarrow V_\beta(r) \subseteq V_\alpha(p) ,$$

quels que soient p et r.

D'ailleurs, d'après (U_{III}) on peut faire cooréspondre à β un suffixe γ tel que $r \in V_\gamma(s)$, $p \in V_\gamma(s)$ entraînent $p \in V_\beta(r)$, quels que soient p, r, s. Donc on a d'abord

$$(2) \qquad r \in V_\gamma(s) \rightarrow V_\gamma(s) \subseteq V_\beta(r) ,$$

et ensuite, sous la condition que $x \in V_\alpha(x)$, quels que soient x et α, on a, en posant $s = p$ et en tenant compte de (1),

$$(3) \qquad r \in V_\gamma(p) \rightarrow V_\beta(r) \subseteq V_\alpha(p) .$$

Il est évident que γ est déterminé seulement par α donné d'avance.

Soit $V_\gamma(p) \cdot V_\gamma(q) \neq 0$ pour deux points p et q, et soit $r \in V_\gamma(p) \cdot V_\gamma(q)$; alors on a

$$(4) \qquad r \in V_\gamma(q) ,$$

$$(5) \qquad r \in V_\gamma(p) .$$

En posant $s = q$, on a, des relations (2) et (4), $V_\gamma(q) \subseteq V_\beta(r)$, et de (5) et (3), $V_\beta(r) \subseteq V_\alpha(p)$; Donc $V_\gamma(q) \subseteq V_\alpha(p)$. Par conséquent on a $V_\gamma(p) \cdot V_\gamma(q) \neq 0 \rightarrow V_\gamma(q) \subseteq V_\alpha(p)$.

Par suite, on a, selon le corollaire 2 du théorème 6, le

Théorème 21, L'espace de M. WEIL vérifie les conditions (A), (a), (M) et (T_2).

§ 2. QUELQUES THÉORÈMES CONCERNANT LES FONCTIONS CONTINUES.

Le but dans ce paragraphe est de montrer que dans un espace à structure uniforme il y a deux espèces de théorèmes concernant

les fonctions continues ; à savoir le premier se rattache à l'espace où les fonctions sont définies et le second, à l'espace auquel les valeurs des fonctions appartiennent.

Tout d'abord nous insérons quelques terminologies nécessaires :

Soient $\{V_\alpha(x)\}$ et $\{U_\alpha(y)\}$ deux familles de voisinages de points de X et de Y respectivement. Nous dirons qu'une fonction $y=f(x)$ est (*quasi-*)*continue* à un point x de X, si à chaque suffixe α correspond (-ent) un suffixe β (et un point y_x de Y) dépendant de x de façon que :

$$f(V_\beta(x)) \subseteq U_\alpha(y)\,, \quad \text{où} \quad y=f(x)\,; \quad \left(f(V_\beta(x)) \subseteq U_\alpha(y_x)\right).$$

Si $f(x)$ est (quasi-)continue en chaque point de X, elle sera dite simplement (*quasi-*)*continue sur* X.

Une fonction $y=f(x)$ sera dite *uniformément* (*quasi-*)*continue* sur un ensemble $E \subseteq X$, lorsqu'à chaque suffixe α correspond(-ent) un suffixe β ne dépendant pas de points x de E (et de points y_x de Y dépendant de x) de façon que, pour les points x de E,

$$f(V_\beta(x)) \subseteq U_\alpha(y)\,, \quad \text{où} \quad y=f(x)\,; \quad \left(f(V_\beta(x)) \subseteq U_\alpha(y_x)\right).$$

Il est clair qu'une fonction continue est quasi-continue, mais en général l'inverse n'est pas nécessairement vraie. Voici un exemple :

Soit X l'espace des nombres réels et soit Y l'espace donné dans l'exemple 5 dans § 1. Comme on l'y a vu, l'espace Y est quantitatif, à caractère dénombrable et monotone, et il y a un intervalle$(x_0, 0), (x_0, 1))$ contenu dans un voisinage $V_m((x_m, 0))$ d'un point $(x_m, 0)$ convenablement choisi, où m est un nombre naturel quelconque. Considérons une fonction $y=f(x)$ dont la variable et les valeurs appartiennent respectivement aux espaces des nombres réels X et $0<y<1$ et elle n'est pas continue en chaque point de X. En employant cette fonction, nous définirons une fonction $F(x)$, définie sur X, ses valeurs appartiennent à Y, telle que

$$(x_0\,,\ y) = F(x)\,, \quad \text{où} \quad y=f(x)\,.$$

Comme on peut sans peine le voir, cette fonction est quasi-continue sur X, mais elle n'est pas continue en chaque point x de X.

Il s'agit donc de chercher, sous quelle condition, les deux continuités sont équivalentes. Pour cela, voici une condition suffisante :

Théorème 1. Pour que les deux continuités soient équivalentes, il est suffisant que l'espace Y vérifie la condition (D).

Démonstration. Il suffit de démontrer que, dans cette condition,

" quasi-continue " entraîne " continue ".

Soit x un point quelconque de X et soit $U_\alpha(y)$ un voisinage d'un point $y=f(x)$. Or, par la condition (D) il existe un suffixe γ déterminé par y et α tel que

$$(1) \qquad y \in U_\gamma(y') \rightarrow U_\gamma(y') \subseteq U_\alpha(y) ,$$

quel que soit y'. Par suite, de l'hypothèse que la fonction $f(x)$ est quasi-continue, au suffixe γ correspondent un suffixe β et un point y_x de Y de façon que

$$(2) \qquad f(V_\beta(x)) \subseteq U_\gamma(y_x) .$$

Par conséquent, à chaque voisinage $U_\alpha(y)$ correspond, en vertu de (1) et (2), un voisinage $V_\beta(x)$ tel que $f(V_\beta(x)) \subseteq U_\alpha(y)$, $y=f(x)$, donc $f(x)$ est continue au point x, c. q. f. d.

Ces préliminaires étant posés, nous avonçons le raisonnement.

Théorème 2. Soit F un sous-ensemble compact en soi dans un espace à caractère dénombrable et monotone, vérifiant la condition (C), et soit $\mathfrak{F}=\{G\}$ une famille d'ensembles ouverts couvrant F. Alors il existe un nombre naturel k dépendant de la famille $\mathfrak{F}$ tel que, pour chaque voisinage $V_k(p)$, p parcourant F, il y a au moins un ensemble G de $\mathfrak{F}$ dépendant de p tel que $V_k(p) \subseteq G$.

Démonstration. Par contre, supposons que, pour chaque nombre naturel n, il existe un point p_n de F tel que le voisinage $V_n(p_n)$ n'est contenu dans aucun ensemble de $\mathfrak{F}$. Considérons l'ensemble formé des points $\{p_n\}$. Comme F est compact en soi, il existe un point p de F et qui est un point-β de $\{p_n\}$. Or, p étant un point de F, il existe un ensemble G de $\mathfrak{F}$ et il contient un voisinage $V_m(p)$ de p convenablement choisi. Alors il existe, en vertu de la condition (C), un nombre naturel l tel que

$$(1) \qquad x \in V_l(p) \rightarrow V_l(x) \subseteq V_m(p) .$$

Or, p étant un point-β de $\{p_n\}$, $V_l(p)$ contient une infinité de points de $\{p_n\}$. Par conséquent, il existe un point $p_{m'}$ contenu dans $V_l(p)$, où $m' > \max.(m, l)$; donc par la relation (1) et de la monotonie de la famille des voisinages, on a $V_{m'}(p_{m'}) \subseteq V_l(p_{m'}) \subseteq V_m(p) \subseteq G$. Nous aboutissons donc à une contradiction que $V_{m'}(p_{m'})$ soit contenu dans un ensemble de $\mathfrak{F}$, c. q. f. d.

Corollaire 1. Soit F un sous-ensemble compact en soi dans un espace à caractère dénombrable, monotone et vérifiant la condition (C).

Soit $\mathfrak{F} = \{M\}$ *une famille de sous-ensembles fermés de* F *tels que la partie commune à tous les ensembles de* $\mathfrak{F}$ *est vide. Alors il existe un nombre naturel* k *tel que, pour chaque point* p *de* F, *il y a un ensemble* M *de* $\mathfrak{F}$, *dépendant de* p, *et qui est disjoint de* $V_k(p)$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{F}^* = \{G\}$ une famille des ensembles G, où G sont les ensembles complémentaires des ensembles fermés M de $\mathfrak{F}$. Par l'hypothèse, la partie commune à tous les ensembles de $\mathfrak{F}$ est vide, donc la famille $\mathfrak{F}^*$ couvre F. Par suite, du théorème 2, il y a un nombre entier k tel que, chaque $V_k(p)$, p parcourant F, est contenu dans un ensemble de $\mathfrak{F}^*$, dépendant de p ; donc $V_k(p)$ est disjoint d'un ensemble de $\mathfrak{F}$, c. q. f. d.

Corollaire 2. Soit F *un sous-ensemble compact en soi dans un espace* X *à caractère dénombrable monotone et vérifiant la condition* (C), *et soit* Y *un espace à caractère dénombrable.* $y = f(x)$ *étant une fonction quasi-continue de* X *en* Y, *alors elle est uniformément quasi-continue sur* F.

Démonstration. $f(x)$ étant une fonction quasi-continue sur X, à chaque nombre naturel k et à chaque point x de X correspond un nombre naturel $n(k, x)$ et un point y_x de Y tels que :

$$f(V_{n(k,x)}(x)) \subseteq U_k(y_x) .$$

Ceci étant posé, nous faisons correspondre à chaque point x de F un tel voisinage $V_{n(k,x)}(x)$ et adoptons la famille $\mathfrak{F}$ formée des ensembles ouverts $V_{n(k,x)}(x)$ comme la famille énoncée dans le théorème 2. Alors il existe un nombre naturel N_k qui dépend seulement de k tel que, pour chaque voisinage $V_{N_k}(x)$, où $x \in F$, il y a un voisinage $V_{n(k,x')}(x')$ et celui-ci contient celui-là. Par conséquent, il résulte

$$f(V_{N_k}(x)) \subseteq f(V_{n(k,x')}(x')) \subseteq U_k(y_{x'}) ,$$

où x est un point arbitraire de F. Donc $f(x)$ est uniformément quasi-continue sur F, c. q. f. d.

Corollaire 3. (*Lemme de* LEBESGUE). *Soit* F *un sous-ensemble compact en soi dans un espace à caractère dénombrable, monotone et vérifiant la condition* (C). *Soit* $\mathfrak{F} = \{F_i\}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *une famille de sous-ensembles fermés en nombre fini dans* F. *Alors, il existe un nombre naturel* $k(\mathfrak{F})$ (*Nombre de* LEBESGUE) *tel que : Soit* E *un sous-ensemble de* F *et soit* $E \subseteq V_k(p)$ *pour un point* p *de* F. *Si* E *a au moins un point commun à* F_{i_j}, $(j = 1, 2, \ldots, h)$, *la partie commune* $\prod_{j=1}^{h} F_{i_j}$ *n'est pas vide.*

Démonstration. Si $\prod_{i=1}^{n} F_i \neq 0$, notre assertion est évidente. Donc supposons que $\prod_{i=1}^{n} F_i = 0$. Soit $\mathfrak{F}^* = \{(Fi_1, Fi_2, \ldots, Fi_h)\}$ la famille des sous-familles de $\mathfrak{F}$. $(Fi_1, Fi_2, \ldots, Fi_h)$ étant un élément de $\mathfrak{F}^*$, nous dirons que l'élément $(Fi_1, Fi_2, \ldots, Fi_h)$ est première- ou la seconde classe suivant que $\prod_{j=1}^{h} Fi_j = 0$ ou $\prod_{j=1}^{h} Fi_j \neq 0$. Ceci étant posé, pour un élément de la première classe $(Fi_1, Fi_2, \ldots, Fi_h)$, il existe selon le corollaire 1 un nombre naturel $n_h = n_h(Fi_1, Fi_2, \ldots, Fi_h)$ tel que, pour chaque point p de F et pour chaque voisinage $V_{nh}(p)$, il y a un ensemble Fi_j, appartenant à l'élément $(Fi_1, Fi_2, \ldots, Fi_h)$, disjoint de $V_{nh}(p)$. Or, $\mathfrak{F}^*$ est de puissance finie, puisque $\mathfrak{F}$ consiste d'ensembles de nombre fini, il existe donc le plus grand nombre parmi des n_h définis ci-dessus, soit k. Par définition de n_h, il est clair qu'un élément $(Fi_1, Fi_2, \ldots, Fi_h)$ de $\mathfrak{F}^*$ dont chaque ensemble possède au moins un point commun à $V_m(p)$, $m > k$, est la seconde classe, puisque la famille de voisinages est monotone, c. q. f. d.

Exemple 6. Il y a un espace qui vérifie les condition (C) et (T_1^*) et qui n'est pas régulier.

Désignons par R le semi-plan $y > 0$ situé dans le plan à deux dimensions. Pour un point $p = (a, b)$, nous adoptons comme le voisinage $V_m(p)$ de p l'ensemble formé du point p lui-même et des points intérieurs du carré défini par les inégalités : $a - \frac{1}{m} < x < a + \frac{1}{m}$ et $b < y < b + \frac{2}{m}$. Comme on le voit, l'espace ainsi défini vérifie les conditions (C) et (T_1^*). Ensuite, soit $V_m(p)$ un voisinage d'un point p ; alors il n'existe aucun voisinage de p tel que sa fermeture soit contenu dans $V_m(p)$, donc l'espace n'est pas régulier.

Puis, nous étudierons une fonction limite de fonctions continues. Voici une définition nécessaire :

$\{f(x)\}$ étant une famille de fonctions, nous dirons qu'une fonction $F(x)$ est d'accumulation de la famille $\{f(x)\}$, lorsqu'à chaque suffixe α correspond une fonction $f(x)$ de $\{f(x)\}$ indépendant des points x de X telle que

$$f(x) \in U_\alpha(F(x)) .$$

Dans cette convention, on a le

Théorème 3. Soit $\{f(x)\}$ une famille de fonctions continues sur X et soit Y l'espace quantitatif vérifiant la condition (B), alors, $F(x)$ étant une fonction d'accumulation de $\{f(x)\}$, $F(x)$ elle même est continue.

Démonstration. Soit α un suffixe et soit $U_\alpha(F(x_0))$ un voisinage

de $F(x_0)$, x_0 étant supposé fixé. Il est suffisant de démontrer qu'il y a un voisinage $V(x_0)$ de x_0 tel que $F(V(x_0)) \subseteq U_\alpha(F(x_0))$.

Or, de la condition (B) il y a pour le suffixe α un suffixe β déterminé par $F(x_0)$ et α tel que

$$(1) \qquad U_\beta(F(x_0)) \cdot U_\beta(y) \neq 0 \rightarrow y \in U_\alpha(F(x_0)) .$$

$F(x)$ étant une fonction d'accumulation de $\{f(x)\}$, il y a pour le suffixe β une fonction $f(x)$ indépendant de points x telle que

$$(2) \qquad f(x) \in U_\beta(F(x)) .$$

$U_\beta(F(x_0))$ étant ouvert, il y a en vertu de (2) un voisinage $U_\tau(f(x_0))$ tel que

$$(3) \qquad U_\tau(f(x_0)) \subseteq U_\beta(F(x_0)) .$$

D'autre part, $f(x)$ étant continue, il y a pour $U_\tau(f(x_0))$ un voisinage $V(x_0)$ du point x_0 tel que

$$(4) \qquad f(V(x_0)) \subseteq U_\tau(f(x_0)) .$$

Or, x' étant un point appartenant à $V(x_0)$, il résulte selon (4) et (3)

$$(5) \qquad f(x') \in U_\beta(F(x_0)) ,$$

et on a selon (2)

$$(6) \qquad f(x') \in U_\beta(F(x')) .$$

Des relations (5) et (6), on a évidemment $U_\beta(F(x_0)) \cdot U_\beta(F(x')) \neq 0$; on a donc de la formule (1) $F(x') \in U_\alpha(F(x_0))$. Par conséquent, on a

$$F(V(x_0)) \subseteq U_\alpha(F(x_0)) ,$$

ce qui montre que la fonction $F(x)$ est continue au point x_0, c. q. f. d.

§ 3. SUR DEUX PROBLÈMES POSÉS PAR M. FRÉCHET.

Avant de chercher en détail des propriétés des espaces à caractère dénombrable vérifiant la condition (D), dans ce § nous considérons deux problèmes posés par M. FRÉCHET et donnons leurs réponses affirmatives.

Le premier problème énonce comme suivant[1] :

1) Cf. FRÉCHET, Les espaces abstraits, Paris, (1928), pp. 233-234.

Existe-il un espace plus général que l'espace distancié tel que : Les trois familles des sous-ensembles de l'espace :

(1) qui sont parfaitement séparables,

(2) qui jouissent de la propriété de LINDELÖF,

(3) qui sont condensés chaque en soi

soient coïncidentes ?

Pour étudier ce problème, nous donnerons tout d'abord quelques définitions nécessaires dans ce qui suit.

Soit R un espace (v) de M. FRÉCHET et soit E un sous-ensemble de R. Si, à chaque point p de R correspond un voisinage $V(p)$ pour lequel la partie commune $V(p)\cdot E$ est hyper-condensé en soi[1], E s'appelle hyper-condensé en soi au point p. Si E est hyper-condensé en soi en chaque point de R, nous dirons que E est *localement hyper-condensé en soi*. E étant hyper-condensé en soi en chaque point de E, il s'appelle *localement hyper-condensé en soi au sens faible.*

Ceci étant pesé, on a les

Lemme 1[2]. *Soit E un ensemble localement hyper-condensé en soi et soit M un sous-ensemble de E. Si $M(\aleph_1) \neq 0$, alors $M\cdot M(\aleph_1) \neq 0$, où le symbole $M(\aleph_1)$ désigne l'ensemble de tout point de condensation de M.*

Démonstration. p étant un point de $M(\aleph_1)$, il existe, de la supposition que E est localement hyper-condensé en soi, un voisinage $V(p)$ tel que $V(p)\cdot E$ est hyper-condensé en soi et sa puissance est non-dénombrable, donc $V(p)\cdot M$ l'est aussi. Par conséquent, en vertu de la définition, l'ensemble $V(p)\cdot M$ contient au moins un point de condensation de lui-même, donc à plus forte raison M contient au moins un point de condensation, autrement dit $M\cdot M(\aleph_1) \neq 0$, c. q. f. d.

Lemme 2. Soit E un ensemble localement hyper-condensé en soi au sens faible et soit M un sous-ensemble de E ; Si $E\cdot M(\aleph_1) \neq 0$, alors $M\cdot M(\aleph_1) \neq 0$.

Démonstration. Soit p un point de $E\cdot M(\aleph_1)$. E étant localement hyper-condensé en soi au sens faible, il existe un voisinage $V(p)$ de p tel que $V(p)\cdot E$ est hyper-condensé en soi. Par la définition, $V(p)\cdot M$ est non-dénombrable et hyper-condensé en soi comme un sous-ensemble de $V(p)\cdot E$; Donc $V(p)\cdot M$ contient au moins un point de condensation

1) Un ensemble est dit *hyper-condesé en soi,* lorsque chaque sous-ensemble non-dénombrable de l'ensemble contient au moins un point de condensation de lui-même.

2) Cf. Notre article, Quelques propriétés des espaces abstraits, Ces Jour., Sér. 1, 9 (1940), p. 204.

de lui-même, et par suite en vertu de $V(p)\cdot M \subseteq M$, on a $M\cdot M(\aleph_1) \neq 0$, c. q. f. d.

Des lemmes 1 et 2, nous pouvons immédiatement déduire les

Théorème 1. Soit E un sous-ensemble de l'espace. Pour que E soit hyper-condensé en soi, il faut et il suffit qu'il soit condensé et localement hyper-condensé en soi.

Démonstration. Il est clair que la condition énoncée est nécessaire. Réciproquement, nous allons donc démontrer que la condition est suffisante. Pour cela prenons un sous-ensemble non-dénombrable M de E. E étant condensé et localement hyper-condensé en soi, M l'est aussi. Par conséquent, $M(\aleph_1) \neq 0$ et donc, en vertu du lemme 1, il résulte $M\cdot M(\aleph_1) \neq 0$, autrement dit E est hyper-condensé en soi, c. p. f. d.

Théorème 2. Soit E un sous-ensemble de l'espace. Pour que E soit hyper-condensé en soi, il faut et il suffit qu'il soit condensé en soi et localement hyper-condensé en soi au sens faible.

Démonstration. Il est manifeste que la condition est nécessaire. Nous dirons que les conditions sont bien suffisantes.

Soit M un sous-ensemble non-dénombrable de E. D'après l'hypothèse que E est condensé en soi, on a $E\cdot M(\aleph_1) \neq 0$. Ensuite, E étant localement hyper-condensé en soi au sens faible, il résulte $M\cdot M(\aleph_1) \neq 0$ selon le lemme 2. Par suite, E est hyper-condensé en soi, c. q. f. d.

Or, comme on le sait, dans un espace quasi-accessible un ensemble hyper-condensé en soi est un ensemble jouissant de la propriété de LINDELÖF qui est condensé en soi[1]. Donc, selon les théorèmes 1 et 2, on a les

Corollaire 1. Dans un espace quasi-accessible où un ensemble condensé est localement hyper-condensé en soi, les quatres familles des sous-ensembles :

(1) *qui sont hyper-condensés en soi,*
(2) *qui jouissent de la propriété de LINDELÖF,*
(3) *qui sont condensés en soi,*
(4) *qui sont condensés*

sont coïncidentes deux à deux.

Corollaire 2. Dans un espace quasi-accessible où un ensemble condensé en soi est localement hyper-condensé en soi au sens faible, lse trois familles :

1) Voir K. KUNUGUI, Sur un théorème de BAIRE généralisé dans la théorie des espaces abstraits, Fund. Math., Warszawa, t. 21 (1933), pp. 244-245.

(1) *qui sont hyper-condensés en soi,*
(2) *qui jouissent de la propriété de* LINDELÖF,
(3) *qui sont condensés en soi*
sont coïncidentes les unes les autres.

Ceci étant posé, nous montrons dès maintenant une condition suffisante pour qu'un ensemble hyper-condensé en soi soit parfaitemant séparable :

Théorème 3. Soit E un sous-ensemble hyper-condensé en soi dans un espace quasi-accessible. Si E est à caractère dénombrable et s'il existe une famille de voisinages $\{V_n(p)\}$ de point p de E, vérifiant la condition (D), telle qu'elle équivaut à la famille de voisinages donnés d'avance dans E, alors E est parfaitement séparable.

Démonstration. On sait que tout sous-ensemble de E possède la propriété de LINDELÖF, car E est hyper-condensé en soi, donc tout sous-ensemble de E l'est aussi. Or, il est clair que $E \subseteq \sum_{p \in E} V_n(p)$ pour chaque nombre n. Puisque E possède la propriété de LINDELÖF, nous pouvons choisir une infinité dénombrable de voisinages $V_n(p_k^n)$, $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, de façon que leur somme couvre E. Ceci étant posé, nous allons démontrer que, si nous adoptons la famille de tout voisinage $V_n(p_k^n)$ auquel p est contenu comme celle des voisinages de p, la famille $\{V_n(p_k^n)\}$ sera équivalente à la famille $\{V_n(p)\}$. Pour éviter de se méprendre, nous désignerons par V_n^k le voisinage $V_n(p_k^n)$. D'après cette convention, nous démontrons que les deux familles $\{V_n^k\}$et $\{V_n(p)\}$ sont équivalentes :

1° Soit x un point de E et soit V_n^k un voisinage de x dans la famille $\{V_n^k\}$. Par définition, on a $V_n^k = V_n(p_k^n)$ et qui est ouvert contenant le point x, donc il existe un voisinage $V_m(x)$ contenu dans V_n^k.

2° Réciproquement, soient x un point de E et $V_m(x)$ un voisinage de x dans la famille $\{V_n(p)\}$. Par la condition (D), il y a pour le voisinage $V_m(x)$ un nombre naturel n déterminé par x et m tel que

$$(*) \qquad x \in V_n(q) \rightarrow V_n(q) \subseteq V_m(x), \quad \text{si} \quad q \in E.$$

D'autre part, tous les voisinages $V_n^1, V_n^2, \ldots, V_n^k, \ldots$ couvrent E, donc il y a un voisinage V_n^k contenant le point x ; Donc selon la relation (*) il résulte $x \in V_n^k \subseteq V_m(x)$.

Selon les 1° et 2°, on peut dire que les deux familles $\{V_n^k\}$ et $\{V_n(p)\}$ sont équivalentes ; Par l'hypothèse, la famille $\{V_n(p)\}$ est équivalente à celle de voisinages donnés d'avance dans E, donc la

famille $\{V_n^k\}$ équivaut à la famille de voisinages donnés d'avance dans E; Donc E est parfaitement séparable, c. q. f. d.

Des corollaires 1 et 2 et du théorème 3, on a immédiatement les

Corollaire 3. Soit R un espace quasi-accessible, à caractère dénombrable et dans lequel tout sous-ensemble condensé est localement hyper-condensé en soi. Si, pour chaque ensemble condensé E de R, il existe une famille de voisinages $\{V_n(p)\}$ de E vérifiant la condition (D) et elle équivaut à la famille de voisinages donnés d'avance dans E, alors les cinq familles de tous sous-ensembles de R :

(1) qui sont parfaitement séparables,
(2) qui sont hyper-condensés en soi,
(3) qui jouissent de la propriété de LINDELÖF,
(4) qui sont condensés en soi,
(5) qui sont condensés

sont coïncidentes deux à deux.

Corollaire 4. Soit R un espace quasi-accessible, à caractère dénombrable et dans lequel tout sous-ensemble condensé en soi est localement hyper-condensé en soi au sens faible. Si, pour chaque ensemble condensé en soi E dans R, il existe une famille de voisinages $\{V_n(p)\}$ de points de E vérifiant la condition (D) et elle est équivalente à celle des voisinages donnés d'avance dans E, les quatre familles des sous-ensembles de R :

(1) qui sont parfaitement séparables,
(2) qui sont hyper-condensés en soi,
(3) qui jouissent de la propriété de LINDELÖF,
(4) qui sont condensés en soi

sont coïncidentes deux à deux.

Les corollaires 3 et 4 donnent respectivement une réponse affirmative au problème de FRÉCHET, car un espace distancié vérifie les conditions énoncées dans les corollaires.

Nous pourrons sans peine voir que l'espace donné dans l'exemple 1 à la page 193 est un espace où le problème de FRÉCHET a la réponse affirmative.

Nous donnerons un autre exemple :

Exemple 7. Considérons un espace linéairement ordonné qui se compose de toutes les couples (α, x), excepté (0, 0), des nombres ordinaux α et des nombres réels x, où $0 \leq \alpha < \Omega$ et $0 \leq x < 1$, tel qu'il est ordonné comme suivant :

Si $\alpha > \alpha'$, alors $(\alpha, x) > (\alpha', x')$, et si $\alpha = \alpha'$, $x > x'$, alors $(\alpha, x) > (\alpha', x')$. Comme on peut aisément le prouver, cet espace possède

cette propriété que, à chaque point (α, x) correspond un intervalle contenant le point et semblable à l'intervalle $0<y<1$ des nombres réels. Par conséquent, l'espace considéré est à caractère dénombrable, quasi-accessible et localement hyper-condensé en soi. Nous dirons que l'espace n'est pas distanciable, En effet, par contre, supposons qu'il soit distanciable et désignons par $d(p, q)$ la distance entre deux points p et q. Soit $\{(\alpha, x)\}$ un sous-ensemble non-dénombrable de points distincts, où $0 \leq \alpha < \Omega$ et $x = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$; alors nous voyons aisément qu'il y a un nombre naturel k tel que $d\left((\alpha, \frac{1}{3}), (\alpha, \frac{1}{2})\right) > \frac{1}{k}$ pour une infinité non-dénombrable de α, soit α_β $(0<\beta<\Omega)$ et $\alpha_\beta < \alpha_{\beta+1}$. α_β étant un nombre ordinal de fini ou de seconde classe, l y a un nombre ordinal α_0 de seconde classe plus grand que α_β pour tout $0<\beta<\omega$. Ceci étant posé, considérons l'ensemble formé des points (α, x) qui sont plus petits que le point $(\alpha_0, 0)$. Cet ensemble est semblable à l'intervalle $0<y<1$ des nombres réels. Par conséquent, comme on peut facilement le vérifier, il y a un point (γ, x) dans l'espace qui est un point d'accumulation de la suite des points $(\alpha_\beta, \frac{1}{3})$ et $(\alpha_\beta, \frac{1}{2})$, $\beta = 1, 2, 3, \ldots$. Mais ce qui est déraisonnable, puisque $d\left((\alpha_\beta, \frac{1}{3}), (\alpha_\beta, \frac{1}{2})\right) > \frac{1}{k}$ pour tout β. Ensuite, prenons un sous-ensemble condensé E dans l'espace, alors il y a un point (α, x) qui est plus grand que tous les points de E. En effet, par contre, supposons qu'il n'existe pas tel point (α, x), alors E contient une suite de points (α_β, x_β) non-dénombrables tels que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_\beta < \cdots$ et $\lim \alpha_\beta = \Omega$. Ce qui est contraire au fait que E est condensé, puisque l'ensemble non-dénombrable $\{(\alpha_\beta, x_\beta)\}$ de E n'a aucun point de condensation. Par suite, il y a pour E un point (α, x) énoncé plus haut; Donc E est contenu dans un ensemble formé de tous les points plus petits que le point (α, x); d'où E est semblable à un ensemble contenu dans l'intervalle $0<y<1$ des nombres réels, donc, comme on le sait, E est parfaitement séparable, c. q. f. d.

Nous ajoutons ici une condition suffisante pour qu'un espace soit distanciable :

Théorème 4. Pour qu'un espace quasi-accessible, à caractère dénombrable, condensé et localement hyper-condensé en soi soit distanciable, il faut et il suffit qu'il soit régulier et vérifiant la condition (D).

En effet, d'après le corollaire 3, l'espace considéré est parfaitement séparable. De l'hypothèse que l'espace est régulier et du

théorème bien connu de URYSOHN-TYCHONOFF[1], l'espace est distanciable, c. q. f. d.

Ensuite, nous considérons le second problème qui énonce comme suivant :

Il sera intéressant de rechercher l'espace le plus général où les propriétés séparables et parfaitement séparables sont équivalentes. Ou tout au moins de voir s'il existe un espace simple, plus général, que les espaces distanciés et où ces deux propriétés coïncident.

Nous voulons montrer à cette place-ci qu'il existe un espace plus général que les espaces distanciés et où les deux propriétés coïncident.

Tout d'abord, nous démontrons un théorème suivant.

Théorème 5. Si un espace R quasi-accessible et à caractère dénombrable vérifiant la condition (D) est séparable, il sera parfaitement séparable sauf un ensemble de 1-re catégorie.

Démonstration. Soit D un sous-ensemble dénombrable et partout dense dans l'espace R, soit $D = \{p_k\}$, $(k = 1, 2, \ldots)$; et soit $\{V_n(p_k)\}$, $(n, k = 1, 2, 3, \ldots)$, la famille de tous les voisinages des points p_k de D. Pour plus de commodite, désignons par V_n^k le voisinage $V_n(p_k)$. Si l'on pose $G_n = \sum_{k=1}^{\infty} V_n^k$, l'ensemble $F_n = R - G_n$ est fermé et frontière, puisque G_n est ouvert et partout dense dans R ; donc F_n est non-dense. Posons $R^* = \prod_n G_n$, alors on a $R - R^* = \sum_n F_n$ où $\sum_n F_n$ est de 1-re catégorie.

Nous montrons que R^* est parfaitement séparable ; Soit p un point de R^*, alors il existe, selon la définition de R^*, au moins un voisinage V_n^k, pour tout n, auquel p est contenu. Adoptons maintenant tous les voisinages V_n^k auxquels p est contenu comme la famille des voisinages du point p, et disons que cette famille $\mathfrak{F}^* = \{V_n^k\}$ est équivalente à la famille donnée d'avance $\mathfrak{F} = \{V_n(p)\}$. Soit p un point de R^* ;

1° Soit V_n^k un voisinage de p dans $\mathfrak{F}^*$. V_n^k étant ouvert, il existe un voisinage $V_m(p)$ de p contenu dans V_n^k.

2° Soit $V_m(p)$ un voisinage de $\mathfrak{F}$ du point p. Selon la condition (D), il existe un nombre naturel n tel que

$$(*) \qquad p \in V_n(q) \rightarrow V_n(q) \subseteq V_m(p) ,$$

1) P. URYSOHN, Zum Metrisationsproblem, Math. Ann., Bd. 94 (1924), pp. 309-315; A. TYCHONOFF, Ueber einen Metrisationssatz von P. URYSOHN, Math. Ann., Bd. 95 (1925), pp. 139-142.

quel que soit q. Pour ce nombre n, tous les voisinages V_n^1, V_n^2, ..., V_n^k, ... de $\mathfrak{F}^*$ couvrent R^*, donc il existe un voisinage V_n^k contenant le point p, autrement dit il y a dans $\mathfrak{F}^*$ un voisinage V_n^k de p qui est contenu dans $V_m(p)$ selon (*).

Des 1° et 2°, on voit que les deux familles $\{V_n^k\}$ et $\{V_n(p)\}$ sont équivalentes, donc E est parfaitement séparable, c. q. f. d.

Exemple 8. Il existe un espace régulier, à caractère dénombrable monotone et séparable, vérifiant les conditions (D) et (T_1^*) sans être normal et parfaitement séparable.

En effet, désignons par R le semi-plan $y \geq 0$ dans le plan à deux dimensions. Pour un point $p = (x_0, y_0)$, où $y_0 > 0$, un voisinage $V_m(p)$, où m est un nombre naturel, se compose de tous les points (x, y) dont les coordonnées vérifient les inégalités : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < \left(\frac{1}{m}\right)^2$ et $y > 0$; et pour un point $p = (x_0, 0)$ un voisinage $V_m(p)$ consiste du point p lui-même et de tous les points (x, y) où x, y sont donnés par l'inégalité :

$$(x-x_0)^2+\left(y-\frac{1}{m}\right)^2 < \left(\frac{1}{m}\right)^2.$$

Dans cet espace R, on peut facilement voir que les conditions énoncées sont vérifiées et en outre que si nous négligeons de l'espace un ensemble non-dense qui est l'axe des x, l'ensemble restant sera parfaitement séparable.

Théorème 6. Si un espace R quasi-accessible, à caractère dénombrable vérifiant les conditions (D) et (e) est séparable, il est parfaitement séparable.

Démonstration. En employant les mêmes signes dans la démonstration du théorème 5, il suffit de démontrer que l'ensemble $\sum_n F_n$ est parfaitement séparable.

Soit p un point de $\sum_n F_n$. A chaque voisinage $V_m(p)$ de p correspond selon la condition (e) un nombre n tel que $q \in V_n(p) \rightarrow p \in V_m(q)$, quel que soit q. Par suite, pour chaque nombre m il existe au moins un voisinage V_m^k de $\mathfrak{F}^*$ tel que $p \in V_m^k$. Nous adoptons donc tous les voisinages V_m^k de $\mathfrak{F}^*$, qui contiennent le point p, comme la famille des voisinages de p. Nous dirons que les familles $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}^*$ sont équivalentes ;

Soit p un point de $\sum_n F_n$.

1° Soit V_m^k un voisinage de p appartenant à $\mathfrak{F}^*$. V_m^k étant

ouvert, il existe un voisinage $V_n(p)$ de p tel que $V_n(p) \subseteq V_m^k$.

2° Soit $V_m(p)$ un voisinage de p appartenant à $\mathfrak{F}$; alors il existe selon la condition (D) un nombre n tel que $p \in V_n(q) \rightarrow V_n(q) \subseteq V_m(p)$, quel que soit q. Par conséquent, on a $p \in V_n^k \rightarrow V_n^k \subseteq V_m(p)$, quel que soit k, ; donc il existe un voisinage V_n^k de p contenu dans $V_m(p)$.

Des 1° et 2°, on voit que $\sum_n F_n$ est parfaitement séparable, donc l'espace l'est aussi, c. q. f. d.

Du théorème 6, on a le

Théorème 7. Soit R un espace quasi-accessible, séparable, à caractère dénombrable et monotone vérifiant la condition (D). Si l'espace vérifie la condition (e), sauf un sous-ensemble F fermé et dénombrable, l'espace est parfaitement séparable.

En effet, en posant $R^* = R - F$, R^* est parfaitement séparable selon le théorème précédent ; donc il existe une famille d'une infinité dénombrable de voisinages $\{V_n^k\}$ et qui est équivalente à celle de voisinages donnés d'avance dans R^*. Puis, soit $\{V_n(p_n)\}$ la famille des voisinages de points de F. Comme on le sait, la famille des voisinages $\{V_n^k\}$ et $\{V_n(p_k)\}$ est équivalente à celle de voisinages donnés d'avance, lorsque nous adoptons un voisinage auquel p contenu comme un voisinage de p. Donc l'espace est parfaitement séparable, c. q. f. d.

L'exemple 3 dans § 1, montré qu'il existe un espace plus général que les espaces distanciés où deux propriétés séparables et parfaitement séparables sont équivalentes.

§ 4. SUR LES ESPACES À CARACTÈRE DÉNOMBRABLE ET MONOTONES.

Dans ce paragraphe, nous introduirons d'abord deux notions importantes : la première est le *quasi-écart* entre deux points et la seconde, la *convergence* d'une suite de points bien ordonnés. Quasi-écart correspond justement à distance dans les espaces distanciés, et il jouera un rôle important à l'aide d'axiome de séparation de points. Et ensuite, nous donnerons leurs applications.

Nous remarquons tout d'abord que : si l'espace à caractère dénombrable est monotone, la famille des sphères $\{S_n(p)\}$ l'est aussi, autrement dit $S_1(p) \supseteq S_2(p) \supseteq \cdots \supseteq S_n(p) \supseteq \cdots$ pour tout point p. Nous supposerons dorénavant et toujours que l'espace à caractère dénombrable soit monotone, et que le voisinage $V_1(p)$ d'un point p de l'espace coïncide avec l'espace tout entire.

Or, en utilisant la famille $\{S_n(p)\}$, nous allons définir la notion dite quasi-écart entre deux points arbitraires: Quels que soient deux points p et q, si $q \in S_n(p)$ et $q \bar{\in} S_{n+1}(p)$, on dira que le quasi-écart de p et q sera $\frac{1}{n}$, et le désignerons par $\rho(p, q)$; Si $q \in S_n(p)$ pour tout nombre naturel n, le quasi-écart de p et q sera dit zéro, c.-à-d. $\rho(p, q) = 0$.

Comme on peut facilement le vérifier, si $q \in S_n(p)$, alors $p \in S_n(q)$; donc on a

$$\rho(p, q) = \rho(q, p).$$

De plus, si l'espace satisfait à la condition (T_0^*), on aura

$$\rho(p, q) > 0 \text{ ou } \rho(p, q) = 0 \text{ suivant que } p \neq q \text{ ou } p = q.$$

Quels que soient deux ensembles A et B, nous désignerons par $\rho(A, B)$ la borne inférieure de $\rho(a, b)$, où a et b parcourant respectivement A et B, et l'appelerons quasi-écart des ensembles A et B.

En employant quasi-écart, nous pouvons définir une notion dite *filet-*$\frac{1}{n}$; Etant donné un espace à caractère dénombrable et monotone, nous considérons un sous-ensemble D_n de l'espace satisfaisant aux deux conditions suivantes:

1° *Quels que soient* p *et* q *deux points distincts de* D_n, *on a* $\rho(p, q) > \frac{1}{n}$.

2° *Quel que soit* x, *on a* $\rho(x, D_n) \leq \frac{1}{n}$.

Tel ensemble D_n s'appelle filet-$\frac{1}{n}$.

Ensuite nous définirons la notion dite *totalement borné* dans un espace quantitatif: Soient E un ensemble dans un espace quantitatif et α un suffixe arbitraire. L'ensemble E est dit totalement borné, lorsqu'il se laisse décomposer pour chaque α en nombre fini d'ensembles tels que:

$E = E_1^\alpha + E_2^\alpha + \cdots + E_{n_\alpha}^\alpha$, $p_i \in E_i^\alpha \subseteq S_\alpha(p_i)$ pour $i = 1, 2, \ldots, n_\alpha$ et $p_j \bar{\in} S_\alpha(p_i)$ si $i \neq j$.

Ces préliminaires étant posés, on a le

Théorème 1. Dans un espace à caractère dénombrable et monotone, pour qu'en ensemble E *soit totalement borné, il faut et il suffit qu'à chaque nombre naturel* n *correspond dans* E *un filet-*$\frac{1}{n}$ *qui se compose de points de nombre fini.*

Démonstration. En effet, par définition, E étant totalement

borné, on a pour un nombre n une décomposition de E telle que : $E = \sum_{i=1}^{k} E_i^n$, $p_i \in E_i^n \subseteq S_n(p_i)$ et $p_j \bar{\in} S_n(p_i)$ si $i \neq j$. Alors, en posant $D_n = \sum_{i=1}^{k} p_i$. il résulte de la définition que l'ensemble D_n est un filet-$\frac{1}{n}$ formé des points de nombre fini dans E.

Inversement, supposons qu'à chaque nombre n correspond dans E un filet-$\frac{1}{n}$ de puissance finie D_n, soit $D_n = \sum_{i=1}^{k} p_i$. Dans ce cas, considérons les sphères $S_n(p_i)$, $(i = 1, 2, \ldots, k)$. S'il existe un point p appartenant à $E - \sum_{i=1}^{k} S_n(p_i)$, on aura $S_n(p) \cdot D_n = 0$ en vertu de la définition de la sphère. Mais, ce fait nous donne la contradiction que D_n n'est pas filet-$\frac{1}{n}$ dans E ; donc on a $E \subseteq \sum_{i=1}^{k} S_n(p_i)$. Alors en posant $E_i^n = E \cdot S_n(p_i)$, on a la décomposition de E : $E = \sum_{i=1}^{k} E_i^n$ où $p_i \in E_i^n \subseteq S_n(p_i)$ et $p_j \bar{\in} S_n(p_i)$ si $i \neq j$, c. q. f. d.

Sans doute, un espace $\mathfrak{E}$[1] peut être considéré comme un espace à caractère dénombrable et monotone, donc on a le

Corollaire. Dans un espace $\mathfrak{E}$, pour qu'un ensemble E soit totalement borné, il faut et il suffit qu'à chaque nombre n corresponde un filet-$\frac{1}{n}$ de puissance finie dans E.

Nous voudrons dès maintenant rechercher quelques propriétés d'ensembles complets et pour cela définirons quelques terminologies nécessaires.

Dans un espace quantitatif, nous dirons qu'une suite de points bien ordonnés $\{p_\alpha\}$ satisfait à la *condition de* CAUCHY (généralisée), lorsqu'on peut faire correspondre à chaque suffixe β un point q_β et un nombre ordinal α_β tels que

$$(*) \qquad \sum_{\alpha_\beta < \alpha} p_\alpha \subseteq V_\beta(q_\beta) .$$

En particulier, si tous les points q_β sont coïncidentes, soit $q_\beta = q$, et si aucun point distinct de q ne satisfait à la condition (*) pour tout β, nous dirons que la suite des points *converge* vers le point q et le désignerons simplement par $\lim_{\alpha} p_\alpha = q$ et nous appelerons q un point de limite de la suite $\{p_\alpha\}$.

Voici deux lemmes presque évidents :

Lemme 1. Dans un espace à caractère dénombrable, si $p \in E'$, il

1) Cf. FRÉCHET, Les espaces abstraits, p. 214.

existe une suite de points $\{p_n\}$ *de* E *tels que le point* p *est d'accumulation d'ensemble* $\{p_n\}$, *où* E' *désigne l'ensemble des points d'accumulation de* E.

Lemme 2. Dans un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (T_1), *si* $p \in E'$, *il existe une suite de points* $\{p_n\}$ *de* E *convergeant vers le point* p.

Ceci étant posé, on donne sans prouver le

Théorème 2. Un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (T_1), *est un espace* $\mathfrak{L}^*$ *introduit par M.* KURATOWSKI[1].

Théorème 3. Dans un espace à caractère dénombrable et monotone, tout ensemble compact est totalement borné.

Démonstration. Soit E un ensemble compact dans l'espace. Supposons, par impossible, qu'il existe un nombre naturel n pour lequel l'ensemble E ne se laisse pas décomposer en nombre fini d'ensembles tels que :

$$E = \sum_{i=1}^{k} E_i^n, \quad p_i \in E_i^n \subseteq S_n(p_i) \quad \text{et} \quad p_j \overline{\in} S_n(p_i) \quad \text{si} \quad i \neq j.$$

Or, soit p_1 un point de E et faisons correspondre à p_1 la sphère $S_n(p_1)$ et posons $E_1^n = E \cdot S_n(p_1)$. Ensuite, soit p_2 un point de $E - E_1^n$ (s'il existe), et posons $E_2^n = E \cdot S_n(p_2)$. Alors, il est clair que $p_i \in E_i^n \subseteq S_n(p_i)$ et $p_j \overline{\in} S_n(p_i)$ où $i, j = 1, 2$ et $i \neq j$. Etant supposé pour n que E ne se laisse pas décomposer en nombre fini d'ensembles E_i^n définis ci-dessus, cette opération sera suivie à l'infini. Ainsi nous avons une suite de points $\{p_m\}$ de E. E étant compact, l'ensemble des points $\{p_m\}$ possède au moins un point-β, soit p. Par conséquent, le voisinage $V_l(p)$, $(l > n)$, contient au moins deux points distincts de $\{p_m\}$, soient p_{m_1} et p_{m_2}. Alors il résulte $p_{m_1} + p_{m_2} \subseteq V_l(p)$, autrement dit $\rho(p_{m_1}, p_{m_2}) \leq \frac{1}{n}$, puisque l'espace est monotone. Nous aboutissons donc à une contradiction, c. q. f. d.

Comme on le sait, nous disons qu'un espace (ou ensemble) est dit *complet*, si chaque suite de points satisfaisant à la condition de CAUCHY possède un point de limite dans l'espace (ou l'ensemble).

Dans cette convention, on a les

Théorème 4. Dans un espace à caractère dénombrable vérifiant la condition (T_1^*), *tout ensemble compact en soi est complet.*

Démonstration. Soit E un ensemble compact en soi dans l'espace et soit $\{p_n\}$ une suite de points de E satisfaisant à la condition de

1) Cf. KURATOWSKI. Topologie, I (Warszawa), (1933), pp. 76-77.

CAUCHY. E étant compact en soi, il y a au moins un point-β de $\{p_n\}$, soit p. Nous dirons que la suite des points $\{p_n\}$ converge vers le point p. Supposons, par contre, qu'il existe un nombre naturel k tel que le voisinage $V_k(p)$ ne contient pas un nombre infini de $\{p_n\}$, et les désignons par $\{q_n\}$. Il existe alors un point q de E qui est un point-β de $\{q_n\}$ et distinct de p. Ensuite, d'après la condition (T_1^*), il existe pour les deux points p et q un nombre naturel l tel qu'un voisinage $V_l(r)$ n'a aucun point commun à l'un ou l'autre de $V_l(p)$ et de $V_l(q)$, quel que soit r. En tenant compte du fait que $V_l(p)$ et $V_l(q)$ contiennent respectivement le nombre infini de points de $\{p_n\}$, la suite $\{p_n\}$ ne satisfait pas à la condition de CAUCHY ; nous aboutissons donc à une contradiction, c. q. f. d.

Théorème 5. Soit $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots \supseteq E_n \supseteq \cdots$ *une suite d'ensembles fermés décroissants dans un espace à caractère dénombrable, complet et monotone vérifiant la condition* (T_0^*) *et tels que* $E_n \subseteq V_{k_n}(p_n)$, *où* $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$ *et* $V_{k_n}(p_n)$ *est un voisinage convenablement choisi. Alors la partie commune* $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ *consiste d'un seul point.*

Démonstration. Soit q_n un point de E_n, alors on aura $\sum_{i=0}^{\infty} q_{n+i} \subseteq E_n$. Or, à chaque nombre naturel n correspondent deux nombres l, $k_l(>n)$, tels que $E_l \subseteq V_{k_l}(p_l)$; Il résulte donc $\sum_{i=0}^{\infty} q_{l+i} \subseteq E_l \subseteq V_{k_l}(p_l) \subseteq V_n(p_l)$, puisque l'espace est monotone. Par conséquent la suite des points $\{q_n\}$ satisfait à la condition de CAUCHY. L'espace étant supposé complet, la suite $\{q_n\}$ converge vers un point q appartenant à E_n pour tout n, puisque chaque E_n est fermé. Ensuite, supposons, par contre, qu'il y ait un point p distinct de q appartenant à la partie commune $\prod_n E_n$. Or, d'après la condition (T_0^*), il y a un nombre naturel m tel que chaque voisinage $V_{m'}(r)$, $(m' > m)$, ne contient pas à la fois p et q, quel que soit r. Mais, d'autre part, par l'hypothèse, on a $p+q \subseteq E_n$ pour tout n ; Ce qui est une contradiction, c. q. f. d.

Théorème 6. Dans un espace R à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (T_0^*), *régulier et complet, chaque ensemble de première catégorie est un ensemble frontière.*

Démonstration. Soit $E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n + \cdots$ une somme d'ensembles non-denses, et soit $V_n(p)$ un voisinage d'un point p arbitraire. Il s'agit de démontrer que $V_n(p) - E \neq 0$. Or, E_1 étant non-dense, il existe un voisinage $V_{n_1}(p_1)$ d'un point p_1 de $V_n(p)$ tel que $\overline{V_{n_1}(p_1)} \subseteq V_n(p)$ et $\overline{V_{n_1}(p_1)} \cdot E_1 = 0$, puisque l'espace est régulier. Par la même considération que j'ai usée plus haut et en tenant compte du fait que

l'espace est monotone, nous pouvons définir par induction une suite de voisinages $V_n(p) \supseteq V_{n_1}(p_1) \supseteq V_{n_2}(p_2) \supseteq \cdots \supseteq V_{n_k}(p_k) \supseteq \cdots$ tels que $\overline{V_{n_{k+1}}(p_{k+1})} \subseteq V_{n_k}(p_k)$, $\overline{V_{n_k}(p_k)} \cdot E_k = 0$ et $\lim_{k\to\infty} n_k = \infty$. Ceci étant posé, par le théorème 5, il existe un point q appartenant à $\prod_{k=1}^{\infty} \overline{V_{n_k}(p_k)}$. Il en résulte que $q \in V_n(p) - E$, puisque $\prod_{k=1}^{\infty} \overline{V_{n_k}(p_k)} \subseteq \prod_{n=1}^{\infty}(R - E_n) = R - \sum_{n=1}^{\infty} E_n = R - E$. Donc E est un ensemble frontière, c. q. f. d.

Du théorème 6, on a facilement les

Corollaire 1. Le complémentaire d'un ensemble de 1-re catégoriet n'est pas de 1-re catégorie (pourvu que l'espace est non-vide).

Corollaire 2. L'espace n'est de 1-re catégorie en aucun point.

Corollaire 3. Chaque point d'un espace dense en soi est un point de condensation de l'espace.

Corollaire 4. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ d'ensembles G_δ et partou. denses dans l'espace. Alors la partie commune $\prod_{n=1}^{\infty} E_n$ l'est aussi.

En effet, en posant $E_n^* = R - E_n$, chaque ensemble E_n^* est un F_σ et frontière, donc il est de l-re catégorie. La somme $\sum_{n=1}^{\infty} E_n^*$ l'est donc également et le complémentaire de cette somme est un G_δ et partout dense dans l'espace, c. q. f. d.

Corollaire 5. Chaque ensemble qui est un G_δ de 1-re catégorie est non-dense.

En effet, E n'étant pas non-dense, il existe un ensemble G ouvert dans lequel E est partout dense ; donc il est aussi partout dense dans $\bar{G}$. Comme l'ensemble $\bar{G}$ est fermé dans l'espace complet, il est aussi complet. Par suite, si l'on considère $\bar{G}$ comme un espace, $\bar{G} \cdot E$ est un G_δ et partout dense dans $\bar{G}$, donc $\bar{G} - E$ est un F_σ et frontière ; Par conséquent, $\bar{G} - E$ est de l-re catégorie. Ce qui est contraire au corollaire 1, puisque $\bar{G} \cdot E$ est de l-re catégorie dans $\bar{G}$, c. q. f. d.

Théorème 7. Dans un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (T_0^*), régulier et complet, chaque ensemble F_σ et G_δ est développable en série alternée (transfinie) d'ensembles fermés décroissants[1].

Soit, en effet, E un ensemble F_σ et G_δ et soit F un ensemble fermé arbitraire non-vide. Comme on le sait, il s'agit de démontrer

1) Un ensemble E de la forme
$$E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \cdots + E_\xi - E_{\xi+1} + \cdots$$
où les termes sont fermés décroissants, est dit développable en série alternée d'ensembles fermés décroissants ou, simplement, ensemble développable. Cf. KURATOWSKI, loc. cit., p. 59.

qu'au moins un des ensembles $F\cdot E$ et $F-E$ n'est pas de frontière dans F[1]. Or, supposons, par impossible, que les deux ensembles $F\cdot E$ et $F-E$, comme des F_σ frontières, soient de l-re catégorie dans F; alors leur somme $F = F\cdot E+(F-E)$ serait de l-re catégorie sur elle-même, ce qui est contraire au corollaire 1 du théorème 6 (F étant considéré comme l'espace), c. q. f. d.

Dès maintenant, nous considérons la connexité d'un ensemble compact en soi. Considérons un espace à caractère dénombrable monotone, et nous entendrons par une *chaîne-*$\frac{1}{n}$ une suite en nombre fini de points $a_1, a_2, \ldots, a_s$ de l'espace tels que $\rho(a_i, a_{i+1}) \leq \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, s-1$. Nous dirons dans ce cas que la chaîne-$\frac{1}{n}$ $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ *enchaîne* les points a_1 et a_s; Evidemment chaque point pour lui-même forme une chaîne-$\frac{1}{n}$ (pour chaque n), $s = 1$. L'espace s'appelle *enchaîné-*$\frac{1}{n}$, si l'on peut enchaîner deux points arbitraires de l'espace par une chaîne-$\frac{1}{n}$. Il est clair que l'espace est enchaîné-$\frac{1}{n}$, si tout point de l'espace peut être enchaîné d'un point fixé par une chaîne-$\frac{1}{n}$. Il en résulte que l'ensemble $K_{\frac{1}{n}}(p)$ de tous les points de l'espace qui sont enchaînés d'un point p fixé par une chaîne-$\frac{1}{n}$ est enchaîné-$\frac{1}{n}$, si l'on le considére comme un espace, et il est le plus grand ensemble enchaîné-$\frac{1}{n}$ dans l'espace contenant le point p et il est appelé *composant-*$\frac{1}{n}$ de p dans l'espace.

D'après ces définitions, on a les

Lemme 3. Le composant-$\frac{1}{n}$ *d'un point p est à la fois ouvert et fermé.*

En effet, si $q \in K_{\frac{1}{n}}(p)$, alors $S_n(q)\cdot K_{\frac{1}{n}}(p) \neq 0$; donc, soit $r \in S_n(q)$, il résulte $r \in K_{\frac{1}{n}}(p)$, c.-à-d. $V_n(q) \subseteq K_{\frac{1}{n}}(p)$. Par suite, $K_{\frac{1}{n}}(p)$ est ouvert. D'autre part, si $q \overline{\in} K_{\frac{1}{n}}(p)$, il vient $S_n(q)\cdot K_{\frac{1}{n}}(p) = 0$, donc $V_n(q)\cdot K_{\frac{1}{n}}(p)=0$. Par conséquent, $K_{\frac{1}{n}}(p)$ est fermé, c. q. f. d.

Nous dirons qu'un espace est enchaîné-0, lorsqu'il est enchaîné-$\frac{1}{n}$ pour tout n. Dans cette convention, on a le

*Lemme 4. Un espace connexe est enchaîné-*0.

En effet, supposons que l'espace serait connexe; alors selon le

1) Cf. KURATOWSKI, loc. cit., p. 61.

lemme 3 le composant-$\frac{1}{n}$ $K_{\frac{1}{n}}(p)$ d'un point p serait à la fois ouvert et fermé pour tout n. L'espace étant connexe, il serait coïncident avec $K_{\frac{1}{n}}(p)$ quel que soit n. Donc l'espace serait enchaîné-0, c. q. f. d.

Ensuite, nous désignerons par $K_0(p)$ le plus grand ensemble enchaîné-0 de l'espace contenant un point p, et dirons qu'il sera *composant*-0 de p. Alors, comme on peut le voir, selon le lemme 3, $K_0(p)$ est fermé.

Ces préliminaires étant posés, on a les

Théorème 8. Dans un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (T_1^*), *pour qu'un ensemble compact en soi soit connexe, il faut et il suffit qu'il soit enchaîné*-0.

Démonstration. D'après le lemme 4, un ensemble connexe est évidemment enchaîné-0, si l'on considère l'ensemble comme un espace. Donc il nous suffit de démontrer qu'un ensemble compact en soi et non connexe ne soit pas enchaîné-0 ; Soit F un ensemble compact en soi et non connexe. Alors, par l'hypothèse, F se laisse décomposer en deux ensembles fermés et disjoints, soit $F = F_1 + F_2$. Je dis que $\rho(F_1, F_2) > 0$. Supposons, par impossible, que $\rho(F_1, F_2) = 0$; alors il y a pour chaque nombre entier n deux points x_n et y_n appartenant respectivement à F_1 et F_2 tels que $\rho(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$. Or, F étant compact en soi, F_1 et F_2 le sont aussi ; par conséquent, du lemme 2, nous pouvons supposer que $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in F_1$ et $\lim_{n\to\infty} y_n = y \in F_2$ (s'il est nécessaire, par choix d'une suite de sous-ensemble). Puis, d'après la condition (T_1^*), il existe un nombre naturel N déterminé par x et y tel qu'un voisinage $V_N(r)$, quel que soit r, ne contient aucun point commun à l'un ou l'autre de $V_N(x)$ et $V_N(y)$. D'autre part, par l'hypothèse, $x_n \in V_N(x)$ et $y_n \in V_N(y)$ si $n(> N)$ est suffisamment grand, et $\rho(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$. Ce qui est contraire à la propriété énoncée plus haut de N. Par conséquent, $\rho(F_1, F_2) > 0$, autrement dit, il existe un nombre naturel n_0 pour lequel on a $\rho(F_1, F_2) > \frac{1}{n_0}$. Il en résulte que F n'est pas enchaîné-$\frac{1}{n_0}$. Nous aboutissons donc à une contradiction, c. q. f. d.

Corollaire. Le composant $K(p)$ *d'un point* p[1] *de l'espace compact en soi coïncide avec le composant*-0 $K_0(p)$ *de* p.

1) Le composant d'un point p est le plus grand ensemble connexe et contenant le point p.

En effet, d'une part il est évident selon le lemme 4 que $K(p) \subseteq K_0(p)$, et d'autre part $K_0(p)$ est compact en soi comme un ensemble fermé de l'espace, et par suite, il est connexe selon le théorème 8; donc $K_0(p)$ est contenu dans $K(p)$, c. q. f. d.

Théorème 9. Soit $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$ *une suite d'ensembles fermés décroissants dans un espace compact et à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions* (B) *et* (T_0). *Si les* F_n *sont enchaînés-*$\frac{1}{k_n}$, *où* $\lim_{n\to\infty} k_n = \infty$, *la partie commune* $\prod_{n=1}^{\infty} F_n = F$ *est connexe.*

Démonstration. Supposons, par contre, que F ne soit pas connexe; alors F se laisse décomposer en deux ensembles fermés et disjoints: $F = F_1 + F_2$. Donc, selon le théorème 7 de § 1, il existe deux sphères restreintes disjoints $O_{n_0}(F_1)$ et $O_{n_0}(F_2)$. Par suite, en posant $G = O_{n_0}(F_1) + O_{n_0}(F_2)$, il résulte $F \subseteq G$. Alors, F étant la partie commune aux ensembles F_n compacts en soi et décroissants, il existe un nombre naturel $m_0 > n_0$ tel que $F_n \subseteq G$, $n > m_0$; Donc, en posant $F_1^n = F_n \cdot \overline{O_{n_0}(F_1)}$ et $F_2^n = F_n \cdot \overline{O_{n_0}(F_2)}$ pour $n > m_0$, on a $F_n = F_1^n + F_2^n$ et $F_1^n \cdot F_2^n = 0$, où F_1^n, F_2^n sont compacts en soi. Par suite, en vertu du théorème 17 de § 1 et en tenant compte de la démonstration du théorème précédent, il existe un nombre naturel k tel que $\rho(F_1^{m_0}, F_2^{m_0}) > \frac{1}{k}$, comme de raison $\rho(F_1^n, F_2^n) > \frac{1}{k}$ si $n > m_0$. Par conséquent, soient $n > m_0$ et $k_n > k$, les F_1^n, F_2^n ne sont pas enchaînés-$\frac{1}{k_n}$. Ce qui est contraire à l'hypothèse que F_n est enchaîné-$\frac{1}{k_n}$ quel que soit n, c. q. f. d.

Corollaire. Dans un espace compact et à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (B) *et* (T_0), *la partie commune d'une suite d'ensembles fermés, connexes et décroissants est ou bien connexe ou bien un seul point.*

Une propriété d'ensemble compact en soi est dite par BROUWER *inductive*, si chaque ensemble F_n d'une suite d'ensembles compacts en soi décroissants $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$ possède la propriété, la partie commune $\prod_{n=1}^{\infty} F_n$ la possède aussi.

D'après cette définition, on peut vérifier le

Théorème (de BROUWER). *Dans un espace à caractère dénombrable monotone, vérifiant la condition* (T_1) *et hyper-condensé en soi, un ensemble compact en soi* F *possédant une propriété inductive* P *contient*

au moins le plus petit ensemble fermé F^* possédant la propriété P.[1]

Démonstration. Posons $F_1 = F$ et supposons que les ensembles F_β pour tout nombres ordinaux $\beta < \alpha$ sont déjà définis, et de plus que la propriété P est vérifiée par les F_β. Si α est un nombre ordinal de première espèce, il y a deux cas possibles : Ou bien $F_{\alpha-1}$ est le plus petit ensemble fermé possédant la propriété P — dans ce cas posons $F_\alpha = F_{\alpha-1}$ — et ou bien $F_{\alpha-1}$ contient un sous-ensemble fermé possédant la propriété P — dans ce cas désignons par F_α le sous-ensemble. Si α est un nombre ordinal de seconde espèce, posons $F_\alpha = \prod_{\beta<\alpha} F_\beta$. Nous avons ainsi F_α pour tout nombre ordinal α de seconde classe. Comme l'espace est hyper-condensé en soi, comme on sait, il y a un nombre ordinal α_0 tel que $F_{\alpha_0} = F_{\alpha_0+1} = \cdots$; Donc F_{α_0} est l'ensemble F^* que nous avions en vu, c. q. f. d.

Nous ajoutons finalement quelques propriétés de fonctions (quasi-) continues ; Pour cela nous citons tout d'abord une définition bien connue.

Soient $R_1, R_2, \ldots, R_n$ des espaces à caractère dénombrable et monotones ; nous désignerons par R leur composition : p étant un point de R, il sera désigné par $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, p_i parcourant R_i pour tout i, et son voisinage $V_k(p)$ sera défini, comme d'ordinaire, par $V_k(p) = V_k^{(1)}(p_1) \times V_k^{(2)}(p) \times \cdots \times V_k^{(n)}(p_n)$, où $V_k^{(i)}(p_i)$ est un voisinage de p_i dans R_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Par cette définition, on a facilement les

Lemme 5. L'espace R est à caractère dénombrable et monotone.

Lemme 6. Si tous les espaces R_i vérifient l'une des conditions (T_0), (T_1), (T_0^*), (T_1^*) et (D), alors l'espace R la vérifie également.

Lemme 7. Dans le cas où tous les espaces $R_1, R_2, \ldots, R_n$ vérifient la condition (T_1) pour qu'une suite de points $p^\nu = (p_1^\nu, p_2^\nu, \ldots, p_n^\nu)$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$, de R converge vers un point $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ de R, il faut et il suffit que $\lim_{\nu\to\infty} p_i^\nu = p_i$ pour tout i.

Lemme 8. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ d'ensembles fermés (ou ouverts) appartenant respectivement à $R_1, R_2, \ldots, R_n$; Alors l'ensemble $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ de R est un fermé (ou ouvert) dans l'espace R.

En particulier, si $n = 2$, comme on le sait, il y a une application intéressant de l'espace composé. Soient X et Y deux espaces à caractère dénombrable, monotones et vérifiant la condition (T_1) et soit $y = f(x)$ une fonction (quasi-)continue définie sur l'espace X et

1) Le plus petit ensemble signifie que F^* ne contient aucun sous-ensemble possédant la propriété inductive P.

dont les valeurs appartiennent à Y. Désignons par $V_n(x)$ et $U_n(y)$ de voisinages de x et de y respectivement dans les espaces X et Y. Alors on a les

Théorème 10. Soit $\{x_n\}$ une suite de points de X tels qu'ils convergent vers un point x_0 et soit $y = f(x)$ une fonction continue au point x_0. Alors il résulte $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Démonstration. Soit n un nombre arbitraire et soit $U_n(f(x_0))$ un voisinage du point $f(x_0)$. Il existe alors un voisinage $V_{k_n}(x_0)$ contenant presque tous les points de $\{x_n\}$ tel que $f(V_{k_n}(x_0)) \subseteq U_n(f(x_0))$, puisque $f(x)$ est continue au point x_0. D'après la définition, on a donc $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, c. q. f. d.

Théorème 11. Soit $y = f(x)$ une fonction continue. Alors l'ensemble I des points $(x, f(x))$ dans l'espace composé $X \times Y$ est fermé.

Démonstration. Soit $(x_0, y_0) \in I'$. Alors nous pouvons choisir, selon lemmes 5 et 2, une suite de points $(x_n, f(x_n))$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, de l'ensemble I tels qu'ils convergent vers le point (x_0, y_0). Du théorème 10 et du lemme 3, il vient $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = y_0$, puisque $f(x)$ est continue au point x_0 ; donc $(x_0, y_0) \in I$, c.-à-d. l'ensemble I est fermé, c. q. f. d.

Définition. Une fonction biunivoque $y = f(x)$ est dite *quasi-homéomorphe,* lorsqu'elle est quasi-continue et admet, en outre, une fonction inverse $x = f^{-1}(y)$ quasi-continue.

Deux ensembles A et B sont dits *quasi-homéomorphe,* lorsqu'il existe une fonction quasi-homéomorphe $y = f(x)$ qui transforme A en B.

Théorème 12. Soient X et Y deux espaces à caractère dénombrable, monotones et vérifiant la condition (T_1) et soit $y = f(x)$ une fonction quasi-continue qui transforme X en un sous-ensemble de Y. Alors l'ensemble I des points $(x, f(x))$ est quasi-homéomorphe à X.

Démonstration. Faisons correspondre un point x de X à un point $(x, f(x))$ et désignons par $F(x) = (x, f(x))$ cette correspondance de X à I. Il est alors évident qu'elle est biunivoque. Soit n un nombre naturel arbitraire. $f(x)$ étant quasi-continue, il existe un nombre n' tel que $f(V_{n'}(x)) \subseteq U_n(y_x)$ pour un point y_x convenablement choisi. En posant $k_n = \max(n, n')$, on a $F(V_{k_n}(x)) \subseteq V_{k_n}(x) \times f(V_{k_n}(x)) \subseteq V_n(x) \times U_n(y_x) = W_n((x, y_x))$, $W_n((x, y_x))$ désignant le voisinage de point (x, y_x) dans l'espace $X \times Y$ et $(x, f(x)) \in W_n((x, y_x))$. Donc, par définition, la fonction $F(x)$ est quasi-continue. Réciproquement, la fonction inverse $x = F^{-1}((x, f(x)))$ est évidemment continue, c. q. f. d.

Puis, nous allons chercher le prolongement d'une fonction. Soit

$y=f(x)$ une fonction définie sur un ensemble A de l'espace X et dont les valeurs appartiennent à Y. Soit x_0 un point de X et soit $V_n(x_0)$ un voisinage arbitraire de x_0. Désignons par k_n la borne supérieure des suffixes k tels que $f(V_n(x_0)\cdot A)\subseteq U_k(y)$, où y est un point arbitraire. Il est clair que $k_1\leq k_2\leq\cdots\leq k_n\leq\cdots$, si X est monotone. Posons $k_0=\lim_{n\to\infty} k_n$ et nous dirons dans ce cas que *l'oscillation* de $f(x)$ au point x_0 est $\frac{1}{k_0}$ (qui est zéro dans le cas où k_0 est l'infini) et la désignerons par $\omega(f(x_0))=\frac{1}{k_0}$ (ou 0). Dans cette convention, il est manifeste que, pour qu'une fonction $f(x)$ soit quasi-continue à un point x_0, il faut et il suffit que $\omega(f(x_0))=0$ (X et Y étant supposés monotones).

Lemme 9. Soit $y=f(x)$ une fonction arbitraire définie sur un sous-ensemble A de X. L'ensemble A_n des points x pour lesquels on a $\omega(f(x))>\frac{1}{n}$, est fermé dans l'espace X.

En effet, soit x_0 un point de $\bar{A}_n$ et soit $V_m(x_0)$ son voisinage arbitraire. Alors il existe un point x appartenant à $A_n\cdot V_m(x_0)$. Comme $V_m(x_0)$ est ouvert, il y a un voisinage $V_{m'}(x)$ contenu entièrement dans $V_m(x_0)$. Par conséquent, on a $f(V_{m'}(x)\cdot A)\subseteq f(V_m(x_0)\cdot A)$ et le membre gauche de l'inégalité n'est jamais contenu dans aucun voisinage $U_n(y)$ dans l'espace Y, n étant fixe. Donc, par définition, il vient $x_0\in A_n$, c. q. f. d.

Théorème 13. Soit X un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (T_1) et soit Y un espace régulier, complet et à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (T_1^*). Soit $y=f(x)$ une fonction quasi-continue définie sur un ensemble A de X. Alors la fonction $f(x)$ se laisse prolonger d'une façon quasi-continue définie sur un ensemble contenant A.

Démonstration. Considérons la fermeture $\bar{A}$ de A et désignons par A^* l'ensemble des points x de $\bar{A}$ tels que $\omega(f(x))=0$. Alors $A^*\supseteq A$, puisque $f(x)$ est quasi-continue sur A. A chaque point x_0 de A^* faisons correspondre une suite de points $\{x_n\}$ de A, convergeant vers x_0. Alors, par définition, on a $\omega(f(x_0))=0$, donc à chaque nombre naturel n correspondent un point y_n de Y et un nombre natnrel k_n tels que $f(V_{k_n}(x_0)\cdot A)\subseteq U_n(y_n)$. Or, comme $V_{k_n}(x_0)$ contient presque tous les points de $\{x_n\}$, la suite des points $\{f(x_n)\}$ de Y satisfait à la condition de CAUCHY et, Y étant supposé complet, la limite $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe, soit $y_0=\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Si l'on définit que $F(x_0)=y_0$, elle sera une fonction prolongée de $f(x)$ et définie sur A^*; Car, si

x_0, $x_n \in A$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $y_0 = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ et $y_0 \neq f(x_0)$, il existe selon la condition (T_1^*) un nombre entier m déterminé par y_0 et $f(x_0)$ tel que le voisinage $U_m(y)$ est disjoint au moins à l'un ou l'autre des voisinages $U_m(y_0)$ et $U_m(f(x_0))$, quel que soit y; Donc l'ensemble $f(V_{k_n}(x_0)\cdot A) \subseteq U_m(y_m)$ est disjoint de $U_m(y_0)$, et par conséquent il résulte $y_0 \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Nous aboutissons ainsi à une contradiction[1].

Puis, il reste encore à démontrer que $F(x)$ est quasi-continue sur A^*. Désignons par $\omega^*(F(x))$ l'oscillation de $F(x)$ à un point x de A^*. Soit $V_n(x)$ un voisinage arbitraire de x. Alors il résulte :

$$\begin{aligned} F(V_n(x)\cdot A^*) &= F(V_n(x)\cdot A) + F(V_n(x)\cdot(A^*-A)) \\ &= f(V_n(x)\cdot A) + F(V_n(x)\cdot(A^*-A)) . \end{aligned}$$

Or, soit $y_0 \in F(V_n(x)\cdot(A^*-A))$, il existe un point x_0 appartenant à $V_n(x)\cdot(A^*-A)$ tel que $y_0 = F(x_0)$. Alors, d'après les définitions de A^* et de $F(x)$, il y a une suite de points $\{x_m\}$ de A, convergeant vers x_0, telle que $\lim_{m\to\infty} f(x_m) = F(x_0)$. En outre, étant $x_0 = \lim_{m\to\infty} x_m$, $V_n(x)\cdot A$ contient presque tous les points de $\{x_m\}$; donc l'ensemble $f(V_n(x)\cdot A)$ contient aussi presque tous les points de $\{f(x_m)\}$, d'où $y_0 \in \overline{f(V_n(x)\cdot A)}$. Par conséquent, on a

$$F(V_n(x)\cdot A^*) \subseteq \overline{f(V_n(x)\cdot A)} .$$

Puis, $f(x)$ étant quasi-continue au point x, il existe, pour chaque nombre entier n, un point y_n et un nombre naturel k_n tels que $f(V_{k_n}(x)\cdot A) \subseteq U_n(y_n)$. D'autre part, comme on le sait, nous pouvons supposer sans perdre la généralité du raisonnement que, Y étant régulier, $\overline{U_{m+1}(y)} \subseteq U_m(y)$, $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, pour chaque point de Y; D'où $F(V_{k_n}(x)\cdot A) \subseteq U_{n-1}(y_n)$. Par suite, de la définition, on a $\omega^*(F(x)) = 0$, donc $F(x)$ est quasi-continue sur A^*, c. q. f. d.

---

1) Dans le cas où l'espace Y vérifie les conditions (D) et (T_1), $F(x)$ sera aussi une fonction prolongée de $f(x)$. Pour cela, il nous suffit de démontrer que $F(x)=f(x)$, si $x \in A$.

Supposons par impossible que $x_n \in A$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $y_0 = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ et $y_0 \neq f(x)$. D'après la condition (T_1), il y a deux voisinages disjoints $U_m(y_0)$ et $U_m(f(x))$, et, en outre, il y a selon la condition (D) un nombre naturel k_m déterminé par $f(x)$ et m tel que $f(x) \in Uk_m(y) \to Uk_m(y) \subseteq U_m(f(x))$, quel que soit y. Par conséquent presque tous les points de $\{f(x_n)\}$ appartiennent à $U_m(f(x))$, donc $y_0 \neq \lim_{n\to\infty} f(x_n)$; Ce qui est une contradiction.

Nous considérons ici une *fonction-*$\frac{1}{n}$; Soient X et Y deux espaces à caractère dénombrable monotone et soit $y=f(x)$ une fonction continue définie sur X et dont les valeurs appartiennent à Y. Nous dirons qu'elle est fonction-$\frac{1}{n}$, lorsque, pour un nombre naturel n et pour chaque point $y \in f(X)$, il existe un point x_y de X dépendant de y tel que $f^{-1}(y) \subseteq V_n(x_y)$.

Théorème 14. Soit X un espace compact et à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (T_1) et soit Y un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (T_1^*). $y=f(x)$ étant une fonction-$\frac{1}{n}$*, à chaque paire de deux points x_1, $x_2 \in X$ tels que $\rho(x_1, x_2) > \frac{1}{n}$ correspond un nombre naturel k_n tel que $\rho(f(x_1), f(x_2)) > \frac{1}{k_n}$.*

Démonstration. Soit n un nombre naturel donné. Supposons, par contre, qu'à chaque nombre naturel k il existe deux points x'_k, x''_k de X tels que $\rho(x'_k, x''_k) > \frac{1}{n}$ et $\rho(f(x'_k), f(x''_k)) \leq \frac{1}{k}$. Alors les suites des points $\{x'_k\}$ et $\{x''_k\}$ ont respectivement de points-β, soient x'_0 et x''_0, puisque X est compact. Posons $y'_0 = f(x'_0)$ et $y''_0 = f(x''_0)$, et nous allons dire que $y'_0 = y''_0$. Dans le cas contraire, en effet, il existe selon la condition (T_1^*) un nombre N tel que $\rho(U_N(y'_0), U_N(y''_0)) > \frac{1}{N}$. Or, les ensembles $f^{-1}(U_N(y'_0))$ et $f^{-1}(U_N(y''_0))$ contiennent de voisinages $V_{N'}(x'_0)$ et $V_{N'}(x''_0)$ respectivement, si N' est suffisamment grand, puisque $f(x)$ est continue. D'autre part, $V_{N'}(x'_0)$ et $V_{N'}(x''_0)$ contiennent respectivement presque tous les points de $\{x'_k\}$ et de $\{x''_k\}$ (s'il est nécessaire, par choix d'une suite de sous-ensemble). Or, par définition, on a $\rho(f(x'_k), f(x''_k)) \leq \frac{1}{k}$, $(k = 1, 2, \ldots)$. Ce qui est contraire au fait que $\rho(U_N(y'_0), U_N(y''_0)) > \frac{1}{N}$. Donc $y'_0 = y''_0$.

Puis, nous dirons que $x'_0 \neq x''_0$. En effet, si $x'_0 = x''_0$, il existe deux points distincts x'_k, x''_k tels que $x'_k + x''_k \subseteq V_n(x'_0)$; donc $\rho(x'_k, x''_k) \leq \frac{1}{n}$. Ce qui est contraire à la définition des points x'_k et x''_k. Par suite, il résulte $x'_0 \neq x''_0$.

Ceci étant posé, selon l'hypothèse que $f(x)$ est une fonction-$\frac{1}{n}$, on a $\rho(x'_0, x''_0) < \frac{1}{n}$. Par conséquent, il existe un voisinage $V_n(x)$ contenant x'_0 et x''_0 ; donc, $V_n(x)$ étant ouvert, il existe deux voisinages

$V_m(x_0')$ et $V_m(x_0'')$ qui sont contenus dans $V_n(x)$ et qui contiennent, si k est suffisamment grand, de points x_k' et x_k'' respectivement. Donc $\rho(x_k', x_k'') \leq \frac{1}{n}$. Ce qui est contraire à l'hypothèse $\rho(x_k', x_k'') > \frac{1}{n}$, c. q. f. d.

Pour donner un théorème dû à M. HUREWICZ, nous démontrons le

Théorème 15. Soit X un espace compact et à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (T_1) et soit Y un espace distancié. $y = f(x)$ étant une fonction-$\frac{1}{n}$, il y a un nombre naturel N tel que, si une fonction continue $g(x)$ vérifie la condition $\rho(f(x), g(x)) < \frac{1}{N}$ pour tout x, $g(x)$ est une fonction-$\frac{1}{n}$.

Démonstration. Du théorème précédent, il y a pour le nombre n un nombre k_n tel que : $\rho(x_1, x_2) > \frac{1}{n}$ entraîne $\rho(f(x_1), f(x_2)) > \frac{1}{k_n}$, quels que soient x_1, x_2 de X. Or, posons $N > 2k_n$ et supposons que $\rho(f(x), g(x)) < \frac{1}{N}$ pour tout x, et démontrons que $g(x)$ est une fonction-$\frac{1}{n}$.

Soient x_1, x_2 deux points tels que $g(x_1) = g(x_2)$; alors, on a l'inégalité $\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \rho(f(x_1), g(x_1)) + \rho(g(x_2), f(x_2)) < \frac{2}{N} < \frac{1}{k_n}$, puisque $g(x_1) = g(x_2)$. Donc, $f(x)$ étant une fonction-$\frac{1}{n}$, il résulte $\rho(x_1, x_2) \leq \frac{1}{n}$; Donc $g(x)$ l'est aussi, c. q. f. d.

Soit X un espace compact et à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (T_1) et (T_0^*), et soit Y un espace distancié et compact, et désignons par $C(X, Y)$ et $C_n(X, Y)$, respectivement, l'ensemble de toutes les fonctions continues et celui de toutes les fonctions-$\frac{1}{n}$, définies sur X entier et dont les valeurs appartiennent à Y. Si l'on définit dans l'ensemble $C(X, Y)$, la distance entre deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ de $C(X, Y)$ telle que : $\rho(f, g) = \operatorname{borne\,sup}_{x \in X} \rho(f(x), g(x))$, comme on le sait, l'espace $C(X, Y)$ est distancié et complet, ce dernier est conduit du fait que Y est compact et du théorème 3 dans § 2. Donc, dans le cas où $C_n(X, Y)$, pour tout n, est partout dense dans $C(X, Y)$, l'ensemble partie commune $\prod_{n=1}^{\infty} C_n(X, Y)$ est aussi partout dense dans $C(X, Y)$ d'après le corollaire 4 du théorème 6 ; Car chaque ensemble $C_n(X, Y)$ est ouvert dans $C(X, Y)$ selon le

théorème 15. En tenant compte du fait que X vérifie la condition (T_0^*), on voit sans peine que l'ensemble $\prod_{n=1}^{\infty} C_n(X, Y)$ se compose des fonctions continues et biunivoques, et d'autre part on sait que, X et Y étant compacts, chaque fonction de $\prod_{n=1}^{\infty} C_n(X, Y)$ est bicontinue. Donc on a le

Théorème de HUREWICZ[1]. *Si l'ensemble $C_n(X, Y)$, pour tout n, est partout dense dans $C(X, Y)$, alors il y a des fonctions biunivoques et bicontinues dans $C(X, Y)$ et de plus, pour chaque fonction $f(x)$ de $C(X, Y)$ et pour chaque nombre n, il y a une fonction biunivoque et bicontinue $f_n(x)$ de $C(X, Y)$ telle que $\rho(f(x), f_n(x)) < \frac{1}{n}$, quel que soit x.*

§ 5. LES ESPACES À CARACTÈRE DÉNOMBRABLE, MONOTONES ET VÉRIFIANT LA CONDITION (D).

Dans ce paragraphe, nous donnons une relation entre les espaces considérés et l'espace $\mathfrak{E}$[2] et de plus ajoutons quelques propriétés des espaces.

Tout d'abord, par rapport à un espace quantitatif vérifiant la condition (D), nous avons le théorème important suivant:

Théorème 1. Dans un espace quantitatif, soit $\{V_\alpha(x)\}$ une famille de voisinages de points x et soit $\{S_\alpha(x)\}$ celle de sphères de centre x et de rayon $\frac{1}{\alpha}$. Lorsqu'on admet la famille $\{S_\alpha(x)\}$ comme celle de voisinages de points x, pour que les deux familles soient équivalentes, il faut et il suffit que l'espace vérifie la condition (D).

Démonstration. Nécessité — $V_\alpha(x)$ étant un voisinage d'un point x, par l'hypothèse, il existe une sphère $S_\beta(x)$ contenu dans $V_\alpha(x)$. On a donc de la définition de la sphère:

$$x \in V_\beta(x') \rightarrow V_\beta(x') \subseteq V_\alpha(x) ,$$

quel que soit x'. C'est la condition (D) elle-même.

Suffisance — $S_\alpha(x)$ étant une sphère de centre x, il est clair de la définition de $S_\alpha(x)$ que $V_\alpha(x) \subseteq S_\alpha(x)$. D'autre part, de la condition

1) W. HUREWICZ, Ueber Abbildungen von endlich dimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume, S.-B. Akad. Berlin, phys.-math. Kl., (1933) pp. 756-757.

2) Cf. FRÉCHET, loc. cit., pp. 213-214.

(D) il y a pour un voisinage $V_\alpha(x)$ un suffixe β déterminé par x et α tel que

$$x \in V_\beta(x') \rightarrow V_\beta(x') \subseteq V_\alpha(x) ,$$

quel que soit x'. Donc on a immédiatement, par la définition, $S_\beta(x) \subseteq V_\alpha(x)$. Par suite les deux familles sont équivalentes, c. q. f. d.

Du théorème 1, on voit qu'on peut définir le quasi-écart dans les espaces considérés et de plus, dans ce cas, la notion de la limite peut être définie par le quasi-écart. Donc on a le

Théorème 2. Un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_0), il est un espace (F).

Nous appellerons dorénavant *quasi-distance* le quasi-écart dans un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_0).

Théorème 3. Dans un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_0), si tout ensemble isolé est au plus dénombrable, l'espace est séparable.

Démonstration. Désignons par D_n un filet-$\frac{1}{n}$ de l'espace. Par définition, D_n est isolé, donc il est au plus dénombrable. En posant $D = \sum_{n=1}^{\infty} D_n$, D est au plus dénombrable. Nous allons démontrer que D est partout dense dans l'espace. Supposons, par contre, qu'il existe un point x n'appartenant pas à la fermeture $\bar{D}$. Il existe alors un voisinage $V_m(x)$ de x qui est disjoint de D. Or, selon la condition (D), il existe pour le voisinage $V_m(x)$ un nombre entier n tel que : $x \in V_n(x') \rightarrow V_n(x') \subseteq V_m(x)$, quel que soit x', autrement dit $S_n(x) \subseteq V_m(x)$. Par conséquent, on a $S_n(x) \cdot D = 0$, il résulte donc $S_n(x) \cdot D_n = 0$. Ce fait signifie que $\rho(x, D_n) > \frac{1}{n}$; Nous aboutissons donc à la contradiction que D_n n'est pas un filet-$\frac{1}{n}$, c. q. f. d.

En imitant l'idée de M. HAUSDORFF, nous désignerons par le symbole 2^X la famille de tous les ensembles fermés et non-vides, situés dans un espace X à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (D). Ceci posé, nous désignerons par $\rho^*(A, B)$ le plus grand nombre des deux nombres :

$$\underset{b \in B}{borne\ sup.}\ \rho(A, b) \quad \text{et} \quad \underset{a \in A}{borne\ sup.}\ \rho(a, B)$$

et l'appelerons quasi-distance des ensembles fermés A et B.

L'ensemble 2^X devient à un espace (F) relativement à la notion

de la quasi-distance ainsi définie. En effet, on peut voir, en envisageant la démonstration du théorème 10 de §1, que, pour que $\rho^*(A, B) = 0$, il faut et il suffit que $A = B$, et, de la définition de la quasi-distance, que $\rho^*(A, B) = \rho^*(B, A)$. Donc on a le, selon le corollaire du théorème 1 de §4,

Théorème 4. X étant un espace totalement borné et à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_0), , *l'espace* 2^X *est totalement borné.*

Démonstration. Pour prouver ce théorème, prenons un filet-$\frac{1}{n}$ D_n considéré auparavant dans l'espace X pour un nombre naturel n. X étant totalement borné, D_n est de puissance finie. Soit $F_{1,n}$, $F_{2,n}$, ..., $F_{k_n,n}$ le système de tous les sous-ensembles de D_n. A chaque ensemble fermé A de X faisons correspondre l'ensemble $F_{i,n}$ de points x de D_n tels que $\rho(x, A) \leq \frac{1}{n}$; Il résulte alors $\rho^*(F_{i,n}, A) \leq \frac{1}{n}$. Par conséquent, le système $F_{i,n}(i = 1, 2, \ldots, k_n)$ est un filet-$\frac{1}{n}$ de puissance finie dans 2^X, donc 2^X est totalement borné selon le corollaire du théorème 1 de §4, c. q. f. d.

Théorème 5. Dans un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_0), *un ensemble totalement borné est séparable.*

En effet, on a immédiatement ce théorème du théorème 1 de §4 et du théorème 3, c. q. f. d.

Des théorèmes 3 de §4 et 5, on a le

Corollaire. Dans un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_0), *un ensemble compact est séparable.*

Exemple 9. Nous voulons présenter ici un exemple d'un espace de HAUSDORFF, compact et à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1^*), et qui est parfaitement séparable sans être régulier.

L'espace R consiste du points $(\frac{1}{2}, 0)$ et des points (x, y), où $0 \leq x \leq 1$ et $0 < y \leq 1$, dans le plan à deux dimensions et dans lequel le voisinage $V_n((x, y))$ sera défini comme il suit :

Pour un point $p = (x, y)$, où $y > 0$, comme d'ordinaire, le voisinage $V_n(p)$ est l'ensemble des points de R qui appartiennent à l'intérieur du cercle dont le centre est p et le rayon $\frac{1}{n}$.

Pour le point $p = (\frac{1}{2}, 0)$, $V_n(p)$ est formé du point p lui-même et des points (x, y) tels que $0 < x < 1$ et $0 < y < \frac{1}{2n}$.

En premier lieu, cet espace n'est pas régulier. En effet, $V_m((\frac{1}{2}, 0))$ étant un voisinage arbitraire de $(\frac{1}{2}, 0)$, sa fermeture contient les points $(0, y)$ où $0 < y \leq \frac{1}{2m}$, mais tous les points ne sont contenus dans aucun voisinage du point $(\frac{1}{2}, 0)$.

Soit $p = (x, y)$ un point de l'espace et soit $V_m(p)$ son voisinage. Si l'on détermine un nombre entier n tel que $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}\min\left(y, \frac{1}{m}\right)$ ou $\frac{1}{n} < \frac{1}{2m}$ suivant que $y > 0$ ou $y = 0$, on peut vérifier que $p \in V_n(q) \rightarrow V_n(q) \subseteq V_m(p)$, quel que soit q. Donc l'espace vérifie la condition (D).

Ensuite, soient $p = (x, y)$ et $q = (x', y')$ deux points arbitraires et distincts. Définissons un nombre naturel n tel que $\frac{1}{n} < \frac{1}{4}\min(|x-x'|, |y-y'|)$ ou $\frac{1}{n} < \frac{1}{4}\min(x, |y-y'|)$ ou $\frac{1}{n} < \frac{1}{4}\min(|x-x_1'|, y)$ suivant que $x \neq x'$, $y \neq y'$ ou $x = x'$ ou $y = y'$. Alors, $V_n(r)$, quel que soit r, n'a aucun point commun à l'un ou l'autre de $V_n(p)$ et de $V_n(q)$. Donc l'espace vérifie la condition (T_1^*).

Finalement, soit $\{(x_n, y_n)\}$ une suite de points distincts de l'espace. Si $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, comme on peut voir tout de suite que le point $(\frac{1}{2}, 0)$ est le point-β de la suite, et si $\lim_{n\to\infty} y_n > 0$, on sait sûrement qu'il existe un point-β de la suite; Donc l'espace est compact. Et de plus l'espace est clairement parfaitement séparable, c. q. f. d.

Il y a un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1^*), régulier et complet sans être compact et normal. En effet, l'espace donné dans l'exemple 8 de § 3 remplit notre exigence.

Puis, nous allons démontrer le théorème de M. LAVRENTIEFF:

Théorème 6. Soient X et Y deux espaces réguliers, complets et à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1). Toute homéomorphie entre deux ensembles A et B situés dans ces espaces, se laisse prolonger sur deux ensembles G_δ M et N qui contiennent A et B respectivement.

Démonstration. Soit $y = f(x)$ une fonction biunivoque et bicontinue, définie sur A et telle que $f(A) = B$. Par les théorèmes 1 de § 2 et 13 de § 4 et la note citée au bas de la page 227, on peut prolonger $f(x)$ à une fonction continue $F(x)$ définie sur un ensemble A^* contenant A. Nous dirons que A^* est un G_δ; En effet, en

désignant par A_n l'ensemble des points x de $\bar{A}$ tels que $\omega(f(x)) > \frac{1}{n}$, on a clairement $A^* = \bar{A} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ selon la définition de A^*. D'autre part, l'ensemble A_n est fermé selon le lemme 9 de § 4, donc $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ est un F_σ, et, en ontre, $\bar{A}$ étant fermé, $\bar{A}$ est encore un G_δ selon le théorème 10 de § 1. Par conséquent, A^* est un G_δ.

Par le même raisonnement, soit $x = g(y)$ la fonction inverse de $y = f(x)$ et soit $x = G(y)$ la fonction continue prolongée de $g(y)$ par le théorème 13 dans § 4 et définie sur un ensemble B^* contenant B. Alors B^* est un G_δ.

Considérons le produit cartésien $X \times Y$ et désignons par I et J les graphiques situés dans l'espace $X \times Y$ des fonctions $y = F(x)$ et $x = G(y)$. Or regarde la partie commune $I \cdot J$ comme le graphique d'une fonction $y = \varphi(x)$ définie sur l'ensemble M qui est la projection à l'espace X de $I \cdot J$ et ses valeurs parcourent l'ensemble N qui est la projection à l'espace Y de $I \cdot J$. Alors on a évidemment $\varphi(x) = F(x)$ pour chaque point x de M et la fonction inverse de $y = \varphi(x)$ coïncide avec $G(y)$ sur N; par conséquent $y = \varphi(x)$ est biunivoque et bicontinue sur M contentant A; donc $y = \varphi(x)$ est un prolongement de $f(x)$. Nous devons encore démontrer que M et N sont des G_δ. Or, le graphique I est fermé dans $A^* \times Y$ selon le théorème 11 dans § 4. Cependant, A^* étant un G_δ, I l'est aussi dans $X \times Y$. De même, J est un G_δ dans $X \times Y$; donc $I \cdot J$ est un G_δ dans $X \times Y$. Si à un point x de M fait correspondre un point $(x, \varphi(x))$ de $I \cdot J$, la correspondance sera une homéomorphie, donc M est un G_δ dans X. De même, N est un G_δ dans Y, c. q. f. d.

Théorème 7. Dans un espace à caractère dénombrable monotone, vérifiant les conditions (D) et (T_1), tout ensemble compact en soi possédant la propriété de LINDELÖF *peut être regardé comme un ensemble transformé par une fonction univoque et continue, définie sur un ensemble non-dense, fermé et borné et situé dans l'espace nombres réels.*

Démonstration. D'abord nous remarquons qu'un sous-ensemble fermé d'ensemble compact en soi possédant la propriété de LINDELÖF est bicompact.

Ceci étant posé, nous allons démontrer le théorème: Soit F un ensemble compact en soi possédant la propriété de LINDELÖF. Il est évident que $F \subseteq \sum_{x \in F} V_1(x)$. Comme F est bicompact, il existe des voisinages $V_1(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, s(i_1)$, des nombres finis tels que $F \subseteq \sum_{i_1=1}^{s(i_1)} V_1(x_{i_1})$. Posons $F_{i_1} = F \cdot \overline{V_1(x_{i_1})}$; alors on a

$F = \sum_{i_1=1}^{s(i_1)} Fi_1$. Supposons qu'à chaque nombre k correspondent de ensembles bicompacts $Fi_1 i_2 \dots i_k$ tels que chaque nombre $i_h (1 \leq h \leq k)$s ne prend que des valeurs de nombre fini, soit $i_h = 1, 2, \dots, s(i_1 i_2 \dots i_{h-1})$, et de plus $Fi_1 i_2 \dots i_k = Fi_1 \dots i_{k-1} \cdot \overline{V_k(x_{i_k})}$ et $\sum_{i_1, \dots, i_k} Fi_1 i_2 \dots i_k = F$. Dans ces conditions, nous définirons des ensembles $Fi_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}$ comme il suit :

1° Si $Fi_1 i_2 \dots i_k$ consiste d'un seul point, alors posons $Fi_1 i_2 \dots i_k i_{k+1} = Fi_1 i_2 \dots i_k$ où $s(i_1 i_2 \dots i_k) = 1$.

2° Dans le cas où $Fi_1 i_2 \dots i_k$ consiste de beaucoup des points, $Fi_1 i_2 \dots i_k$ étant bicompact, il existe des nombres finis des voisinages $V_{k+1}(x_{i_{k+1}})$, $i_{k+1} = 1, 2, \dots, s(i_1 i_2 \dots i_k)$, de points $x_{i_{k+1}}$ de $Fi_1 i_2 \dots i_k$ tels que leur somme couvrent $Fi_1 i_2 \dots i_k$. Dans ce cas, on pose $Fi_1 i_2 \dots i_k i_{k+1} = Fi_1 i_2 \dots i_k \cdot \overline{V_{k+1}(x_{i_{k+1}})}$.

Nous pouvons ainsi définir la famille des ensembles bicompacts $\{Fi_1 i_2 \dots i_k\}$ pour chaque nombre k, $(k = 1, 2, \dots)$, et $i_k = 1, 2, 3, \dots, s(i_1 i_2 \dots i_{k-1})$.

Or, comme on peut le voir, $Fi_1 i_2 \dots i_k i_{k+1} \subseteq Fi_1 i_2 \dots i_k$. Par conséquent, la partie commune $\prod_{k=1}^{\infty} Fi_1 i_2 \dots i_k$ n'est pas vide et de plus elle est un seul point. Car si l'on suppose, par contre, que deux points p et q appartiennent à la partie commune, alors d'après la propriété (T_1), il y a un nombre naturel n tel que $V_n(p) \cdot V_n(q) = 0$. Ensuite, selon la propriété (D), il y a un nombre naturel m, déterminé par p, q et n, tel que

$$p \in V_m(r) \rightarrow V_m(r) \subseteq V_n(p) ,$$

et

$$q \in V_m(r) \rightarrow V_m(r) \subseteq V_n(q) ,$$

où r est un point arbitraire dans l'espace ; Autrement dit, $\overline{V_m(r)}$ ne contient pas l'un ou l'autre des p et q. Or, par définition, on a $Fi_1 i_2 \dots i_m = Fi_1 i_2 \dots i_{m-1} \cdot \overline{V_m(x_{i_m})}$, donc $Fi_1 i_2 \dots i_m$ ne peut contenir l'un ou l'autre de p et de q, c.-à-d. la partie commune $\prod_{k=1}^{\infty} Fi_1 i_2 \dots i_k$ est un seul point.

Désignons par A l'ensemble de tous les nombres irrationnels ξ tels que :

$$\xi = \frac{1}{i_1 +} \; \frac{1}{i_2 +} \; \dots \; \frac{1}{+ i_k +} \; \dots$$

avec $1 \leq i_k \leq s(i_1 i_2 \dots i_{k-1})$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Nous faisons correspondre

au point $\xi = \cfrac{1}{i_1+}\ \cfrac{1}{i_2+}\cdots\cfrac{1}{+i_k+}\cdots$ le point $Fi_1 \cdot Fi_1 i_2 \cdot \cdots \cdot Fi_1 i_2 \ldots i_k \cdots$ et désignons par $f(\xi)$ cette correspondance. Evidemment cette correspondance est univoque. Nous allons démontrer que $f(\xi)$ est continue sur A. Soit $\xi \in A$ et soit $(i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots)$ son développement en fraction continue. Or, $f(\xi)$ étant la partie commune aux ensembles compacts en soi et décroissants, pour un voisinage arbitraire $V_n(f(\xi))$ de $f(\xi)$, il y a un nombre naturel k tel que $Fi_1 i_2 \ldots i_k \subseteq V_n(f(\xi))$. Par suite, on a $f(Ii_1 i_2 \ldots i_k \cdot A) \subseteq V_n(f(\xi))$, en désignant par $Ii_1 i_2 \ldots i_k$ l'ensemble des nombres irrationnels dont les développements en fractions continues commencent avec $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$; donc $f(\xi)$ est continue. Il nous reste encore à démontrer que A est non-dense, fermé et borné. Il est clair que A est borné frontière dans l'espace des nombres réels, car A ne contient aucun nombre rationnel. Donc il suffit de démontrer que A est fermé. Pour ce but, nous montrons que A est compact en soi. Soit

$$\xi_h = \cfrac{1}{i_1^h+}\ \cfrac{1}{i_2^h+}\cdots\cfrac{1}{+i_k^h+}\cdots, \quad (h = 1, 2, 3, \cdots),$$

une suite dénombrable de points appartenant à A. Comme le nombre des valeurs i_1^h distincts est fini, il existe un nombre naturel r_1 tel que $r_1 = i_1^h$ pour des nombres infinis de h. Soient $r_1, r_2, \ldots, r_k$ une suite de nombres naturels déterminés telle qu'il existe une infinité des nombres irrationnels ξ_h dont les développements en fractions continues commencent avec $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$. Désignons par M_k l'ensemble de tous les nombres irrationnels ξ_h. Comme le nombre des valeurs différentes que le chiffre i_{k+1}^h peut prendre, est fini, il y a un nombre naturel r_{k+1} qui possède cette propriété que, pour une infinité de $\xi_h \in M_k$, r_{k+1} coïncide avec le $(k+1)$-ième quotient incomplet i_{k+1}^h de ξ_h. Ainsi il existe un ensemble infini $M_{k+1} \subseteq M_k \subseteq A$ des nombres irrationnels tels que leurs développements en fractions continues commencent par $(r_1, r_2, \ldots, r_k, r_{k+1})$. Dans cette condition, le nombre irrationnel $(r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots)$ appartient aussi à A, pour quoi la partie commune $\prod_{k=1}^{\infty} Fr_1 r_2 \ldots r_k$ est non-vide, et il est un point d'accumulation de A. Donc A est compact en soi, c. q. f. d.

Ensuite, nous donnons quelques propriétés des ensembles représentables diadiquements qui sont définis comme suivant : Supposons qu'on ait fait correspondre à chaque système fini de chiffres 1 et 2 $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ un ensemble $An_1, n_1, \ldots, n_k$ situé dans un espace

complet et à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1), de façon que :

(1) $An_1, n_2, \ldots, n_k$ est fermé et non-vide.

(2) Deux ensembles $Am_1, m_2, \ldots, m_k$ et $An_1, n_2, \ldots, n_k$ pourvus de différents systèmes de k indices sont toujours disjoints.

(3) $An_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1} \subseteq An_1, n_2, \ldots, n_k$.

(4) A chaque ensemble $An_1, n_2, \ldots, n_k$ correspond un nombre naturel $n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ et un point x_{n_k} tels que $An_1, n_2, \ldots, n_k \subseteq Vn(n_1, \ldots, n_k)(x_{n_k})$ et $\lim_{k\to\infty} n(n_1, \ldots, n_k) = \infty$.

Dans ce cas, le système des ensembles $\{An_1, n_2, \ldots, n_k\}$ est dit un système diadique. En désignant par α un système infini composé de chiffres 1 et 2 $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, l'ensemble $\sum_{\alpha} \overset{\infty}{II}_{k=1} An_1, n_2, \ldots n_k$ est dit le noyau du système diadique et, en outre, un ensemble qui est le noyau d'un système diadique est dit représentable diadiquement. Or, d'abord du théorème 5 dans § 4 et des conditions (1), (3) et (4), à chaque suite infini des chiffres 1 et 2 $\alpha = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ correspond un seul point $\overset{\infty}{II}_{k=1} An_1, n_2, \ldots, n_k$. Tout système de k indices $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ composés de chiffres 1 et 2 est de puissance 2^k ; pour les indices désignons par S_k la somme des ensembles $An_1, n_2, \ldots, n_k$, alors S_k est fermé, car l'espace considéré est celui de F. RIESZ et donc la somme des ensembles fermés de nombre fini l'est aussi. Par la condition (2), on peut voir que $\overset{\infty}{II}_{k=1} S_k = \sum_{\alpha} \overset{\infty}{II}_{k=1} An_1, n_2, \ldots, n_k$, donc l'ensemble représentable diadiquement est toujours fermé.

Théorème 8. Un ensemble représentable diadiquement est de puissance $\aleph$.

Démonstration. En vertu des conditions (1), (3) et (4), la partie commune $\overset{\infty}{II}_{k=1} An_1, n_2, \ldots, n_k$ est d'un seul point. De plus, selon la condition (2), pour deux suites distinctes $\alpha = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ et $\alpha' = (n'_1, n'_2, \ldots, n'_k, \ldots)$ correspondent deux points distinctes $\overset{\infty}{II}_{k=1} An_1, n_2, \ldots, n_k$ et $\overset{\infty}{II}_{k=1} An'_1, n'_2, \ldots, n'_k$. Par conséquent, il y a une correspondance biunivoque parmi une suite α et un point d'un ensembre représentable diadiquement, donc la puissance de celui-ci est $\aleph$, c. q. f. d.

Théorème 9. Un ensemble représentable diadiquement est parfait.

Démonstration. Comme on a montré plus haut, un ensemble représentable diadiquement est toujours fermé, donc il nous suffit de démontrer que l'ensemble est dense en soi. Désignons par $p(\alpha)$, où $\alpha = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, un point qui correspond à la suite α et

soit $V_m(p(a))$ un voisinage arbitraire de $p(a)$. Alors en vertu de la condition (D), il y a un nombre naturel m' tel que

$$(*) \qquad p(a) \in V_{m'}(q) \rightarrow V_{m'}(q) \subseteq V_m(p(a)),$$

quel que soit q. D'autre part, il y a, selon la condition (4), un nombre k et un point x_{n_k} tels que $n(n_1, n_2, \ldots, n_k) > m'$ et $A_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subseteq V_{n(n_1, n_2, \ldots, n_k)}(x_{n_k})$; autrement dit il y a un point $p(a')$ distinct de $p(a)$, où $a' = (n_1, \ldots, n_k, n'_{k+1}, \ldots)$, dans le voisinage $V_m(p(a))$; Par suite, l'ensemble représentable diadiquement est dense en soi, c. q. f. d.

§ 6. FONCTIONS MESURABLES B.

Par le corollaire du théorème 10 dans § 1, on a vu que, dans un espace à caractère dénombrable vérifiant la condition (B) ou (D), tout ensemble fermé est un G_δ. En outre, on sait que, dans un espace quasi-accessible dans lequel tout ensemble fermé est un G_δ — donc tout ensemble ouvert est un F_σ — beaucoup des théorèmes concernant les propriétés importantes des ensembles boreliens sont vérifies. En effet, si l'on envisage les démonstrations des théorèmes concernant les ensembles boreliens, on peut sans peine comprendre que cette propriété que tout ensemble fermé est un G_δ joue un rôle important, mais la restriction que l'espace considéré est distanciable n'est pas nécessairement indispensable[1]. Par suite, nous voulons ici cesser d'avancer le raisonnement par rapport aux ensembles boreliens, mais nous employerons des résultats nécessaires dans la suite, et en suivant l'idées dues à MM. KURATOWSKI et MONTGOMERY[2], nous voulons dans ce paragraphe discuter les fonctions mesurables B.

I. Définition. Une fonction $y = f(x)$ qui transforme un espace X en un sous-ensemble d'un espace Y est dite fonction mesurable B de classe α (ou simplement fonction de classe α), lorsque, quel que soit l'ensemble fermé $F \subseteq Y$, l'ensemble $f^{-1}(F)$ est un ensemble borelien de classe α multiplicative. De la définition et de l'identité $f^{-1}(Y-F) = X-f^{-1}(F)$, on peut définir les fonctions de classe α comme les fonctions pour lesquelles l'ensemble $f^{-1}(G)$ est de classe α additive, quel que soit l'ensemble ouvert $G \subseteq Y$.

1) Par exemple, voir C. KURATOWSKI, Topologie, I. pp. 159-167.

2) D. MONTGOMERY, Non-separable metric spaces, Fund. Math., t. 25 (1935), pp. 523-533; C. KURATOWSKI, Quelques problèmes concernant les espaces métriques non-séparables, Fund. Math., t. 25 (1935), pp. 534-545.

Les ensembles fermés étant de classe 0 multiplicative, les fonctions continues coïncident, conformément à cette définition, avec les fonctions de classe 0 (Y étant supposé quasi-accessible).

Théorème 1. Soit Y un espace à caractère dénombrable vérifiant la condition (D) et possédant la propriété de LINDELÖF. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$, définie sur X et dont les valeurs parcourant Y, soit de classe α est qu'il existe pour chaque nombre naturel k une décomposition de l'espace X de façon que : $X = Z_1^k + Z_2^k + \cdots + Z_n^k + \cdots$ en ensembles de classe α additive tels que $f(Z_n^k) \subseteq U_k(y_n)$, quel que soit n, pour un point y_n de Y convenablement choisi.*

Démonstration. Nécessité. — Par l'hypothèse, il existe pour chaque nombre naturel k une suite de voisinages $U_k(y_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, tels que $Y = \sum_{n=1}^{\infty} U_k(y_n)$. Il suffit donc de poser $Z_n^k = f^{-1}(U_k(y_n))$.

Suffisance. — Supposons que la condition du théorème soit vérifie, c.-à-d. qu'à chaque nombre naturel k correspond une décomposition de l'espace X : $X = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n^k$ où Z_n^k est de classe α additive et $f(Z_n^k) \subseteq U_k(y_n)$ pour un point y_n convenablement choisi. Nous allons prouver que, G étant un ensemble ouvert dans Y, $f^{-1}(G)$ est de classe α additive.

Soit $x \in f^{-1}(G)$ qui équivaut à $f(x) \in G$. G étant ouvert, il existe un voisinage $U_m(y) \subseteq G$, où $y = f(x)$, donc selon la condition (D) il existe un nombre naturel k tel que :

$$y \in U_k(y') \rightarrow U_k(y') \subseteq U_m(y) \subseteq G ,$$

quel que soit y'. Par conséquent, selon l'hypothèse, il y a un ensemble $x \in Z_n^k$ dans une décomposition de X tel que $y \in f(Z_n^k) \subseteq U_k(y_n) \subseteq G$, c.-à-d. à chaque point x de $f^{-1}(G)$ correspond un ensemble Z_n^k de classe α additive tel que $f(Z_n^k) \subseteq G$, et de plus tels ensembles Z_n^k sont évidemment au plus dénombrables, donc $f^{-1}(G)$ est un ensemble de classe α additive comme la somme de tels ensembles Z_n^k, c. q. f. d.

Théorème 2. $f(x)$ étant une fonction de classe α et E un ensemble de classe β, l'ensemble $f^{-1}(E)$ est de classe $\alpha+\beta$ (multiplicative ou additive suivante la classe de E).

Ce théorème est démontré par l'induction transfinie (par rapport à β) et par les identités : $f^{-1}(\sum_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n)$ et $f^{-1}(\prod_{n=1}^{\infty} E_n) = \prod_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n)$ et du fait que $\beta_n < \beta$ entraîne $\alpha+\beta_n < \alpha+\beta$, c. q. f. d.

Dans un espace quasi-accessible X, comme on le sait, pour qu'un

ensemble E soit de classe α relativement à un sous-ensemble M de l'espace X, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble E^* de classe α (multiplicative ou additive suivant la classe de E) tel que $E = E^* \cdot M$.

Ce fait nous donne le

Théorème 3. Soit X un espace à caractère dénombrable. Etant donnée une suite d'ensembles $\{E_n\}$ de classe α additive, tels que $X = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ et que, $f_n(x)$ désignant une fonction partielle $f(x \mid E_n)$[1], $f_n(x)$ est de classe α sur E_n, la fonction $f(x)$ est de classe α sur l'espace X tout entier.

II. Fonctions de plusieurs variables. Une fonction $z = f(x, y)$ est dite fonction de deux variables, lorsque la variable indépendante parcourt un produit cartésien de deux espaces X et Y.

Evidemment, une fonction $f(x)$ d'une seul variable peut être considérée comme une fonction $g(x, y)$ de deux variables, en posant $g(x, y) = f(x)$. X et Y étant deux espaces (v) et E étant un ensemble de classe α multiplicative (ou additive) situé dans X, comme on le sait, l'ensemble $E \times Y$ est aussi de classe α mulplicative (ou additive) dans $X \times Y$. Donc on a le

Théorème 4. Si $z = f(x)$ est une fonction de classe α et si $g(x, y) = f(x)$, alors $g(x, y)$ est de classe α par rapport à la variable (x, y).

Démonstration. Soit F un ensemble fermé situé dans l'espace Z. Alors on a l'équivalence, en symbole logique[2],

$$\{g(x, y) \in F\} \equiv \{f(x) \in F\},$$

d'où

$$\underset{xy}{E}\{g(x, y) \in F\} \equiv \underset{x}{E}\{f(x) \in F\} \times Y.$$

Donc on a

$$g^{-1}(F) = f^{-1}(F) \times Y,$$

où, $f(x)$ étant de classe α, l'ensemble $f^{-1}(F)$ est de classe α multiplicative. Par conséquent, $g^{-1}(F)$ est de classe α multiplicative, c. q. f. d.

Théorème 5. Soient X et Y deux espaces à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1) et soit Z un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (B). Si une fonction $z = f(x, y)$, définie sur l'espace $X \times Y$ et ses valeurs parcourant l'espace Z, est continue relativement à la variable x et de classe α relativement à la variable y, elle est de classe $\alpha+1$ relativement à la variable (x, y).

---

1) $f(x \mid E_n)$ désigne une fonction $g(x)$ telle qu'elle est définie sur l'ensemble E_n et $g(x) = f(x)$ pour tout point $x \in E_n$.

2) Quant au symbole logique, voir KURATOWSKI, Topologie, I, pp. 177-193.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de quelques lemmes[1].

Lemme 1. Dans un espace X à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1), si $O^1 \subseteq O^2 \subseteq \cdots \subseteq O^\lambda \subseteq \cdots$ une suite bien ordonnée d'ensembles ouverts croissants et si $O^\lambda - \sum_{\mu<\lambda} O^\mu$ contient un ensemble fermé F^λ pour chaque λ, alors l'ensemble $E = \sum_\lambda F^\lambda$ est un F_σ.

Démonstration. Désignons par F_n^λ l'ensemble de tous les points x de F^λ tels que $\rho(x, X - O^\lambda) > \frac{1}{n}$; évidemment F_n^λ est fermé et $F^\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} F_n^\lambda$ selon le théorème 10 de § 1. Il s'agit de démontrer que $\sum_\lambda F^\lambda$ est un F_σ; pour cela il suffit de prouver que l'ensemble $F_n = \sum_\lambda F_n^\lambda$ est fermé. Supposons, par contre, que F_n n'est pas fermé, alors il y a une suite de points de F_n:

$$(*) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$$

telle qu'elle converge vers un point x n'appartenant pas à F_n. Or, chaque ensemble F_n^λ ne contient qu'au plus un nombre fini de points $\{x_k\}$, puisque F_n^λ est fermé, et par conséquent, pour chaque nombre naturel m, il existe un nombre $m' > m$ tel que x_m et $x_{m'}$ ne sont pas contenus dans un même ensemble F_n^λ. En outre, si $\lambda \neq \mu$, le quasi-écart entre F_n^λ et F_n^μ est au moins $\frac{1}{n}$; donc $\rho(x_m, x_{m'}) \geq \frac{1}{n}$ et ce fait montre qu'il existe dans la suite $(*)$ une infinité de couples de points tels que leurs quasi-distances sont au moins $\frac{1}{n}$ et, par suite, la suite $(*)$ ne peut converger; donc nous aboutissons à une contradiction. Par conséquent, F_n est fermé, donc $E = \sum_n F_n$ est un F_σ, c. q. f. d.

Lemme 2. Dans un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1), $O^1 \subseteq O^2 \subseteq O^3 \subseteq \cdots \subseteq O^\lambda \subseteq \cdots$ étant une suite bien ordonnée d'ensembles ouverts croissants et, pour chaque λ, $O^\lambda - \sum_{\mu<\lambda} O^\mu$ contient un ensemble E^λ qui est de classe α (multiplicative ou additive), alors l'ensemble $E = \sum_\lambda E^\lambda$ l'est aussi.

Démonstration. Tout d'abord, nous démontrons ce lemme dans le cas où tout ensemble E^λ est un F_σ. Comme un ensemble F_σ est

1) Ces lemmes sont une généralisation de celles que M. D. MONTGOMERY a donné dans son article: D. MONTGOMERY, loc. cit.

une somme d'ensembles fermés, on peut poser que $E_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^\lambda$ où E_n^λ est fermé. L'ensemble $E_n = \sum_\lambda E_n^\lambda$ est un F_σ selon le lemme 1, et donc $E = \sum_n E_n = \sum_\lambda E^\lambda$ l'est aussi.

Ensuite, considérons le cas où chaque E^λ est un G_δ. En posant $M^\lambda = O^\lambda - \sum_{\mu<\lambda} O^\mu - E^\lambda$, alors M^λ est un F_σ et du fait que nous avons déjà démontré ci-dessus, $\sum_\lambda M^\lambda$ est un F_σ ; Par conséquent, il vient $E = \sum_\lambda E^\lambda = \sum_\lambda O^\lambda - \sum_\lambda M^\lambda$, donc E est un G_δ.

Ainsi nous avons complètement prouvé le lemme pour $\alpha = 1$. La démonstration dans le cas où $\alpha > 1$, peut être prouvée par induction transfinie (par rapport à α) suivant la même considération usée plus haut, c. q. f. d.

Lemme 3. Dans un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1). E étant un ensemble de classe α localement multiplicative (ou additive), alors E est de classe α multiplicative (ou additive).

Démonstration. Nous considérons au premier lieu le cas où E est de classe α localement multiplicative. Soit

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_\beta, \ldots$$

une suite bien ordonnée de tous les points x de E. Au point x_1 faisons correspondre un voisinage $V_{n_1}(x_1)$ tel que $V_{n_1}(x_1)\cdot E$ est de classe α multiplicative et posons $E^1 = V_{n_1}(x_1)\cdot E$. Puis, soit x_{β_2} le premier point dans la suite (1) tel qu'il n'est pas contenu dans $V_{n_1}(x_{\beta_1})$, $(\beta_1 = 1)$. Au point x_{β_2} faisons correspondre un voisinage $V_{n_2}(x_{\beta_2})$ tel que $V_{n_2}(x_{\beta_2})\cdot E$ est de classe α mulitiplcative et posons $E^2 = V_{n_2}(x_{\beta_2})\cdot E - V_{n_1}(x_{\beta_1})$. Supposons que les ensembles ouverts $V_{n_\mu}(x_{\beta_\mu})$ pour tout $\mu < \lambda$ soient déjà définis, et désignons par x_{β_λ} le premier point dans la suite (1) tel qu'il n'appartient pas à $\sum_{\mu<\lambda} V_{n_\mu}(x_{\beta_\mu})$. Au point x_{β_λ} faisons correspondre un voisinage $V_{n_\lambda}(x_{\beta_\lambda})$ tel que $V_{n_\lambda}(x_{\beta_\lambda})\cdot E$ est de classe α multiplicative et posons $E^\lambda = E\cdot V_{n_\lambda}(x_{\beta_\lambda}) - \sum_{\mu<\lambda} V_{n_\mu}(x_{\beta_\mu})$. Continuerons cette manière jusqu'à ce que tous les points de la suite (1) seront épuisés. Chaque ensemble E^λ est de classe α multiplicative, et donc, en posant $O^\lambda = \sum_{\mu\leq\lambda} V_{n_\lambda}(x_{\beta_\lambda})$, on déduit du lemme 2 que $E = \sum_\lambda E^\lambda$ est de classe α multiplicative.

La démonstration du lemme dans le cas où E est de classe α localement additive, est obtenue de la même considération que nous

avous usée plus haut, c. q. f. d.

Lemme 4. Soit $y = g(x)$ une fonction continue qui transforme un espace X à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (D) en un sous-ensemble dans un espace Y à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (B) et soit E un ensemble de points $\{x_\lambda\}$ partout dense dans X. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $g(x)$ appartienne à un ensemble fermé F situé dans Y, est que, en symbole logique,

$$\{g(x) \in F\} \equiv \prod_n \sum_k \sum_\lambda \{[x \in S_{n+k}(x_\lambda)] \cdot [g(x_\lambda) \in O_n(F)]\} ,$$

où $S_n(M)$ et $O_n(M)$ désignent la sphère et la sphère restreinte, respectivement, dont les centres sont M et les rayons $\frac{1}{n}$.

Démonstration. D'une part, si $g(x) \in F$, en vertu de la continuité de $g(x)$ à chaque nombre naturel n correspond un nombre n' tel que $g(V_{n'}(x)) \subseteq U_n(g(x))$, où $U_n(g(x)) \subseteq O_n(F)$. Or, selon la condition (D) de l'espace X, il y a un nombre k tel que $S_{n+k}(x) \subseteq V_{n'}(x)$; donc $g(S_{n+k}(x)) \subseteq U_n(g(x))$, c.-à-d. $g(S_{n+k}(x)) \subseteq O_n(F)$. L'ensemble $\{x_\lambda\}$ étant partout dense dans X, il y a un suffixe λ tel que $x_\lambda \in S_{n+k}(x)$, autrement dit $x \in S_{n+k}(x_\lambda)$; Par conséquent, on a l'implication :

$$(1) \qquad \{g(x) \in F\} \rightarrow \prod_n \sum_k \sum_\lambda \{[x \in S_{n+k}(x_\lambda)] \cdot [g(x_\lambda) \in O_n(F)]\} .$$

D'autre part, si $g(x) \bar{\in} F$, il existe un nombre m tel que $g(x) \bar{\in} \overline{O_m(F)}$, puisque $F = \prod \overline{O_m(F)}$ selon le théorème 6 dans § 1 ; donc il existe un voisinage $U_{m'}(g(x))$ qui est disjoint de $O_m(F)$. De la continuité de $g(x)$, il existe un nombre m'' tel que $g(V_{m''}(x)) \subseteq U_{m'}(g(x))$; il existe, selon la condition (D), un nombre l tel que $S_l(x) \subseteq V_{m''}(x)$ et donc on a $g(S_l(x)) \cdot O_m(F) = 0$, autrement dit, en posant $n = \max(m, l)$, il résulte $g(S_{n+k}(x)) \cdot O_n(F) = 0$, quel que soit k, car X et Y étant monotones. Or, $\{x_\lambda\}$ étant partout dense dans X, il y a un x_λ contenu dans $S_{n+k}(x)$, c.-à-d. on a $x \in S_{n+k}(x_\lambda)$ et $g(x_\lambda) \bar{\in} O_n(F)$. Par conséquent, si $x \in S_{n+k}(x_\lambda)$, quels que soient k et x_λ, il résulte $g(x_\lambda) \bar{\in} O_n(F)$. Par suite, on a l'implication suivante :

$$(2) \qquad \{g(x) \bar{\in} F\} \rightarrow \sum_n \prod_k \prod_\lambda \{[x \in S_{n+k}(x_\lambda)] \rightarrow [g(x_\lambda) \bar{\in} O_n(F)]\} .$$

En rapprochant deux implications (1) et (2), la démonstration du théorème est complètement achevée, c. q. f. d.

Suivant la même considération que nous avons usée dans la démonstration précédente, nous pouvons prouver le

Lemme 5. Dans un espace Y à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (B), si la suite des points $\{y_n\}$ converge vers y, on aura alors l'équivalence suivante :

$$(3) \qquad \{y \in F\} \equiv \underset{n}{II} \sum_{k} \{y_{n+k} \in O_n(F)\} .$$

Ces préliminaires étant posés, nous allons dès maintenant prouver le théorème 5.

Démonstration du théorème 5. Considérons d'abord le cas où $\alpha = 0$. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots$ une suite de points d'un ensemble partout dense dans X. Du lemme 4, on a, en posant $f(x, y)$ au lieu de $g(x)$, l'équivalence :

$$\{f(x, y) \in F\} \equiv \underset{n}{II} \sum_{k} \sum_{\lambda} \{[x \in S_{n+k}(x_\lambda)] \cdot [f(x_\lambda, y) \in O_n(F)]\} ,$$

et d'où

$$f^{-1}(F) \equiv \underset{n}{II} \sum_{k} \sum_{\lambda} \left\{ \left(\underset{x}{E}[x \in S_{n+k}(x_\lambda)] \times Y \right) \cdot \left(X \times \underset{y}{E}[f(x_\lambda, y) \in O_n(F)] \right) \right\} .$$

Or, $f(x_\lambda, y)$ étant continue relativement à la variable y, l'ensemble $\underset{y}{E}[f(x_\lambda, y) \in O_n(F)]$ est ouvert et l'ensemble $\underset{x}{E}[x \in S_{n+k}(x_\lambda)]$ est évidemment ouvert. Donc l'ensemble entre crochets $\{\ \}$ est ouvert, et la somme $\sum_k \sum_\lambda \{\ \}$ est aussi ouvert. Par conséquent, $f^{-1}(F)$ est un G_δ, donc $f(x, y)$ est de classe 1.

Ensuite, considérons le cas où $\alpha > 0$; Soit

$$x_1, x_2, \ldots, x_\lambda, \ldots$$

une suite bien ordonnée de tous les points de X et soit S_n^λ une sphère de centre x_λ et rayon $\frac{1}{n}$. A chaque point x de l'espace X faisons correspondre l'indice minimum $\lambda(x, n)$ tel que $x \in S_n^\lambda$ et posons $\omega_n(x) = x_{\lambda(x, n)}$. On a évidemment

$$(*) \qquad \rho(x, \omega_n(x)) \leq \frac{1}{n}$$

et il en résulte par les conditions (D) et (T_1) dans X que $\lim_{n\to\infty} \omega_n(x) = x$. Or, en posant $z = f(x, y)$ et $z_n = f(\omega_n(x), y)$, du fait que $\lim_{n\to\infty} f(\omega_n(x), y) = f(\lim_{n\to\infty} \omega_n(x), y) = f(x, y)$ et de l'équivalence (3) du lemme 5, il résulte que :

$$\{f(x,\ y) \in F\} \equiv \underset{n}{II} \sum_{k} \{f(\omega_{n+k}(x),\ y) \in O_n(F)\}\ ,$$

et d'où

$$\underset{xy}{E}\{f(x,\ y) \in F\} \equiv \underset{n}{II} \sum_{k} \underset{xy}{E}\{f(\omega_{n+k}(x),\ y) \in O_n(F)\}\ .$$

Or,

$$\{f(\omega_{n+k}(x),\ y) \in O_n(F)\} \equiv \sum_{\lambda} \{f(x_\lambda\ ,\ y) \in O_n(F)\} \cdot \{x \in (S_n^\lambda - \sum_{\mu<\lambda} S_n^\mu)\}\ ,$$

donc

$$\begin{aligned} &\underset{xy}{E}\{f(\omega_{n+k}(x),\ y) \in O_n(F)\} \\ &\quad \equiv \sum_{\lambda} \Big[\underset{xy}{E}\{f(x_\lambda\ ,\ y) \in O_n(F)\} \cdot \underset{xy}{E}\{x \in (S_n^\lambda - \sum_{\mu<\lambda} S_n^\mu)\}\Big] \\ &\quad \equiv \sum_{\lambda} \Big[\underset{xy}{E}\{f(x_\lambda\ ,\ y) \in O_n(F)\} \cdot \underset{xy}{E}\{(x \in S_n^\lambda) - \sum_{\mu<\lambda} S_n^\mu\}\Big]\ . \end{aligned}$$

Où $\underset{xy}{E}(x \in S_n^\lambda)$ est évidemment ouvert pour tout λ dans l'espace $X \times Y$ et, $f(x, y)$ étant de classe α relativement à la variable y, $\underset{xy}{E}\{f(x_\lambda\ ,\ y) \in O_n(F)\}$ est un ensemble de classe α additive. Par conséquent, en désignant, respectivement, par O^λ et par E^λ l'ensemble $(\sum_{\mu\leq\lambda} S_n^\mu) \times Y$ et l'ensemble entre crochets [ ] du dernier membre de l'équivalence citée plus haut, il résulte du lemme 2 que l'ensemble $\underset{xy}{E}\{f(\omega_{n+k}(x),\ y) \in O_n(F)\}$ est de classe α additive ; donc l'ensemble $\underset{xy}{E}\{f(x,\ y) \in F\}$ est de classe $\alpha+1$ multiplicative. Ce qui montre que $f(x,\ y)$ est de classe $\alpha+1$, c. q. f. d.

III. Image de l'équation $y = f(x)$. Soient X et Y deux espaces à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1). On a dans ce cas le

Théorème 6. Si $y = f(x)$ est de classe α, l'image $I \equiv \underset{xy}{E}\{y = f(x)\}$ de la fonction $f(x)$ est de classe α multiplicative (α étant supposé > 0).

Démonstration. Soit $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda, \ldots$ une suite bien ordonnée de tous les points de Y, et soit U_n^λ un voisinage du point y_λ. Comme $f(x)$ est de classe α, en désignant par E_n^λ l'ensemble des points x tels que $f(x) \in \overline{U}_n^\lambda$, il est évidemment de classe α multiplicative. Posons $H_n^\lambda = E_n^\lambda \times (U_n^\lambda - \sum_{\mu<\lambda} U_n^\mu)$ et $O_n^\lambda = X \times \sum_{\mu\leq\lambda} U_n^\mu$; Les ensembles O_n^λ sont ouverts dans le produit cartésien $X \times Y$ et ce dernier, comme on peut le voir, est un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1), et de plus $O_n^1 \subseteq O_n^2 \subseteq \cdots \subseteq O_n^\lambda \subseteq \cdots$ pour tout n. Pour chaque λ, on a $H_n^\lambda \subseteq O_n^\lambda - \sum_{\mu<\lambda} O_n^\mu$, il en résulte par le lemme 2 que $H_n = \sum_{\lambda} H_n^\lambda$ est de classe α multiplicative, puisque H_n^λ lui-même est de classe α multiplicative. Ces préliminaires étant posés, nous allons démontrer que $I = \underset{n}{II} H_n$.

D'une part, soit (a, b) un point de I et soit λ_0 l'indice minimum des nombres ordinaux λ tels que $b \in U_n^\lambda$; Alors $U_n^{\lambda_0} - \sum_{\mu<\lambda_0} U_n^\mu$ contient le point b, donc (a, b) est contenu dans $H_n^{\lambda_0}$ selon la definition : $E_n^{\lambda_0} = f^{-1}(\overline{U}_n^{\lambda_0})$. Par suite, on a l'inclusion $I \subseteq \underset{n}{\Pi} H_n$.

D'autre part, soit (a, b) un point n'appartenant pas à I, c.-à-d. $b \neq f(a)$. Alors, par la condition (T_1), il existe un nombre naturel k tel que les deux voisinages $U_k(b)$ et $U_k(f(a))$ sont disjoints, et il existe de la condition (D) un nombre naturel l tel que $S_l(b) \subseteq U_k(b)$ et $S_l(f(a)) \subseteq U_k(f(a))$. Or, pour ce nombre l, λ_0 étant l'indice minimum des nombres ordinaux λ tels que $b \in U_l^\lambda$, on a évidemment $f(a) \overline{\in} \overline{U}_l^{\lambda_0}$ et donc $a \overline{\in} E_l^{\lambda_0}$. Par suite, $H_l^{\lambda_0} = E_l^{\lambda_0} \times (U_l^{\lambda_0} - \sum_{\mu<\lambda_0} U_l^\mu)$ ne contient aucun point (a, y), y parcourant Y, donc $(a, b) \overline{\in} H_l^{\lambda_0}$. Ensuite, si l'on prend un ensemble H_l^λ arbitraire, il ne contient pas le point (a, b), car pour chaque $\lambda \neq \lambda_0$, l'ensemble $U_l^\lambda - \sum_{\mu<\lambda} U_l^\mu$ ne contient pas le point (a, b) selon la définition de λ_0. Par conséquent, le point $(a. b)$ n'appartient pas à $H_l = \sum_\lambda H_l^\lambda$; donc $(a. b) \overline{\in} \underset{n}{\Pi} H_n$. Il résulte donc $I \supseteq \underset{n}{\Pi} H_n$, c. q. f. d.

IV. Limite de fonctions. Dans les théorèmes suivants 7 et 8, nous supposons que X soit un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (D) et Y soit un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (B).

Théorème 7. La limite $f(x)$ d'une suite convergente de fonctions $\{f_n(x)\}$ de classe α est de classe $\alpha+1$.

Démonstration. Etant $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, on a du lemme 5 léquivalence suivante :

$$\{y \in F\} \equiv \underset{n}{\Pi} \sum_k \{y_{n+k} \in O_n(F)\} .$$

Il résulte donc

$$\{f(x) \in F\} \equiv \underset{n}{\Pi} \sum_k \{f_{n+k}(x) \in O_n(F)\} ,$$

d'où

$$f^{-1}(F) \equiv \underset{n}{\Pi} \sum_k \underset{x}{E}\{f_{n+k}(x) \in O_n(F)\} \equiv \underset{n}{\Pi} \sum_k f_{n+k}^{-1}(O_n(F)) .$$

Or, les fonctions $f_n(x)$ étant supposées de classe α, les ensembles $f_{n+k}^{-1}(O_n(F))$sont de classe α additive et par conséquent l'ensemble $f^{-1}(F)$ est de classe $\alpha+1$ multiplicative ; donc la fonction $f(x)$ est de classe $\alpha+1$, c. q. f. d.

On dira qu'une suite de fonction $\{f_n(x)\}$ converge uniformément vers une fonction $f(x)$, lorsqu'il existe pour chaque nombre naturel

n un nombre naturel m_n tel que $\sum_{k=0}^{\infty} f_{m_n+k}(x) \subseteq U_n(f(x))$ pour tout point x.

Dans cette convention, on a le

Théorème 8. La fonction limite $f(x)$ d'une suite uniformément convergente de fonctions $\{f_n(x)\}$ de classe α est de classe α.

Démonstration. La convergence étant uniforme, il existe une suite d'entiers (croissants) m_n tels que l'on a $\sum_{k=0}^{\infty} f_{m_n+k}(x) \subseteq U_n(f(x))$ pour tout x. Dans ce cas, F étant un ensemble fermé, on aura l'équivalence suivante :

$$\{f(x) \in F\} \equiv \prod_n \prod_k \{f_{m_n+k}(x) \in \overline{O_n(F)}\} .$$

En effet, d'une part, si l'on pose pour abréger $y = f(x)$ et $y_n = f_n(x)$ et si $y \in F$, on aura $\sum_{k=0}^{\infty} y_{m_n+k} \subseteq U_n(y)$. Par conséquent, le membre droit de l'équivalence est réalisé, puisque $U_n(y) \subseteq O_n(F)$. D'autre part, si $y \bar{\in} F$, il existe du théorème 6 dans § 1 un nombre naturel n tel que $U_n(y) \cdot O_n(F) = 0$. La convergence étant uniforme, il existe un nombre m_n tel que $\sum_{k=0}^{\infty} y_{m_n+k} \subseteq U_n(y)$, il résulte donc $(\sum_{k=0}^{\infty} y_{m_n+k}) \cdot \overline{O_n(F)} = 0$. Ce qui nous montre que le membre droit de l'équivalence donnée plus haut n'est pas réalisé.

Cela étant établi, il résulte $f^{-1}(F) = \prod_n \prod_k f^{-1}_{m_n+k}(\overline{O_n(F)})$ et, l'ensemble $f^{-1}_{m_n+k}(\overline{O_n(F)})$ étant de classe α multiplicative, il en est de même de l'ensemble $f^{-1}(F)$. La fonction $f(x)$ est donc de classe α, c. q. f. d.

Théorème 9. Soit X un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (D) et soit Y un espace régulier, possédant la propriété de LINDELÖF, *et à caractère denombrable monotone vérifiant les conditions (E), (e) et (T_1). Alors, chaque fonction $f(x)$ de classe $\alpha > 0$ est la limite d'une suite convergente de fonctions $\{f_n(x)\}$ de classe α telles que tous les ensembles $f_n(X)$ sont isolés.*

Démonstration. Nous démontrons tout d'abord que, dans l'espace Y, il existe pour chaque entier n un ensemble I_n isolé et dénombrable tel que $Y = \sum_{y \in I_n} U_n(y)$. Rangeons, en effet, tous les points de Y en une suite transfinie :

$$(1) \qquad y_0, y_1, y_2, \ldots, y_\omega, \ldots .$$

Posons $y_{\alpha_0} = y_0$, et supposons que tous les points y_{α_μ} pour $\mu < \lambda$ soient déjà définis. Ceci étant posé, nous définirons y_{α_λ} comme le premier point dans la suite (1) tel que $y_\alpha \bar{\in} \sum_{\mu<\lambda} U_n(y_{\alpha_\mu})$, et posons $I_n^* = \sum_\lambda y_{\alpha_\lambda}$. Il est calir que $Y = \sum_\lambda U_n(y_{\alpha_\lambda})$. Nous dirons que I_n^* est isolé ; En effet, soit y_{α_λ} un point de I_n^*, alors il est évident, selon la définition, que $U_n(y_{\alpha_\lambda}) \cdot (\sum_{\mu>\lambda} y_{\alpha_\mu}) = 0$. Donc il nous suffit de démontrer que $y_{\alpha_\lambda} \bar{\in} (\sum_{\mu<\lambda} y_{\alpha_\mu})$. Or, selon la condition (e), il existe pour le voisinage $U_n(y_{\alpha_\lambda})$ un nombre m tel que

$$(2) \qquad y \in U_m(y_{\alpha_\lambda}) \rightarrow y_{\alpha_\lambda} \in U_n(y) ,$$

quel que soit y. D'autre part, en vertu de la définition, on a $y_{\alpha_\lambda} \bar{\in} \sum_{\mu<\lambda} U_n(y_{\alpha_\mu})$; Donc, $U_m(y_{\alpha_\lambda}) \cdot (\sum_{\mu<\lambda} y_{\alpha_\mu}) = 0$ selon (2), c.-à-d. I_n^* est isolé.

Puis, considérons la famille de tous les voisinages $\{U_n(y_{\alpha_\lambda})\}$ définis plus haut ; alors elle couvre Y. Y jouissant de la propriété de LINDELÖF, il y a des voisinages dénombrables $U_n(y_{\alpha_{\lambda_k}})$ tels que $Y = \sum_{k=1}^{\infty} U_n(y_{\alpha_{\lambda_k}})$. En posant $I_n = \sum_{k=1}^{\infty} y_{\alpha_{\lambda_k}}$, il remplit clairement notre exigence.

Cela pose, nous allons démontrer le théorème. Soit $y_1^n, y_2^n, \ldots, y_k^n, \ldots$ une suite de tous les points I_n et posons

$$A_k^n \equiv \underset{x}{E}\{f(x) \in \overline{U_n(y_k^n)}\} \quad \text{et} \quad B_k^n = \underset{x}{E}\{f(x) \bar{\in} U_{n-1}(y_k^n)\} ,$$

où $\overline{U_n(y_k^n)} \subseteq U_{n-1}(y_k^n)$, ce qui est possible sans perdre la généralité par la régularité de l'espace Y.

Les ensembles A_k^n et B_k^n étant disjoints et de classe α multiplicative, il existe, d'après le théorème de séparation (voir KURATOWSKI, loc. cit., p. 164, VII), un ensemble E_k^n ambigu de classe α tel que $A_k^n \subseteq E_k^n$ et $B_k^n \cdot E_k^n = 0$. Par définition de I_n, on a $Y = \sum_{k=1}^{\infty} U_n(y_k^n)$, il résulte donc $X = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^n = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^n$. La fonction $g(x)$ définie par les conditions : $g(x) = y_1^n$ pour $x \in E_1^n$ et $g(x) = y_k^n$ pour $x \in E_k^n - (E_1^n + E_2^n + \cdots + E_{k-1}^n)$, est de classe α. Car l'ensemble $g^{-1}(y_k^n)$, comme identique à $E_k^n - (E_1^n + E_2^n + \cdots + E_{k-1}^n)$, est de classe α additive (il est même ambigu de classe α) et les valeurs de la fonction $g(x)$ formant un ensemble dénombrable, l'ensemble $g^{-1}(G)$ est donc de classe α

additive, quel que soit G. De plus, on a $f(x) \in U_{n-1}(g(x))$ pour tout x, car l'égalité $g(x) = y_k^n$ entraîne $x \in E_k^n \subseteq X - B_k^n$.

Puis, nous définirons la fonction $f_n(x)$ comme égale à $g(x)$; alors il résulte

$$(3) \qquad f(x) \in U_{n-1}(f_n(x))$$

pour tout n et pour tout x.

Nous montrons que la suite des fonctions $\{f_n(x)\}$ converge vers la fonction $f(x)$. Soit x_0 un point arbitraire et soit n_0 un nombre entier donné d'avance. Par la condition (E), il existe pour le voisinage $U_{n_0}(f(x_0))$ un nombre naturel m tel que

$$(4) \qquad f(x_0) \in U_m(y) \longrightarrow y \in U_{n_0}(f(x_0)) ,$$

quel que soit y. Par suite, en vertu des (3) et (4) et en tenant compte du fait que Y est monotone, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{m+k}(x_0) \subseteq U_{n_0}(f(x_0)) .$$

Donc les fonctions $\{f_n(x)\}$ convergent vers $f(x)$, car l'espace Y vérifie la condition (T_1), c. q. f. d.

V. Théorème de BAIRE sur les fonctions de 1-re classe. Soient X et Y deux espaces à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (D) et soit $y = f(x)$ une fonction définie sur X entier qui transforme X en un sous-ensemble de Y. Dans ces conditions, suivant le raisonnement dû à M. KURATOWSKI (voir loc. cit., p. 189), on peut démontrer le théorème 10 et le corollaire suivants :

Théorème 10. L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction mesurable B de 1-re classe est de 1-re catégorie (l'espace Y étant supposé parfaitement séparable).

Corollaire. $f(x)$ étant une fonction de 1-re classe et E étant un sous-ensemble arbitraire de l'espace X, l'ensemble des points de discontinuité de la fonction partielle $f(x \mid E)$ est de 1-re catégorie par rapport à E.

Une fonction est dite ponctuellement discontinue, lorsque l'ensemble des points de discontinuité de la fonction est frontière.

Dans cette convention, on a le

Théorème 11. Une fonction ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé est mesurable B de 1-re classe (étant supposé que X vérifie la condition (T_1)).

En effet, en envisageant la démonstration due à M. KURATOWSKI (voir loc. cit., p. 190), nous pourrons comprendre pour démontrer ce théorème qu'il nous suffit de prouver que dans l'espace X un ensemble développable soit à la fois un F_σ et un G_δ et qu'un ensemble ouvert soit un F_σ. Ce dernier est aussitôt vérifié dans l'espace X selon le théorème 10 dans § 1. Donc nous allons dès maintenant prouver le

Théorème 12. Dans un espace X à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1), un ensemble E développable est à la fois un F_σ et un G_δ.

Démonstration. Nous allons prouver ce théorème suivant l'idée que M. MONTGOMERY a employée dans son mémoire[1].

E étant développable, nous pouvons poser

$$(*) \qquad E = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + F_\lambda - F_{\lambda+1} + \cdots$$

où les termes sont fermés décroissants. On peut clairement supposer que les indices limites soient omis dans ce développement et que le dernier terme de la formule (*), s'il y existe, soit négatif, car s'il est positif, on y ajoute un ensemble vide qui est fermé, possédant le signe négatif.

Or, soit $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\lambda, \ldots$ une suite d'indices de termes positifs dans (*) cités suivant l'ordre croissant. Désignons par O_{β_λ} l'ensemble complémentaire de $F_{\beta_\lambda+1}$ par rapport à l'espace X entier et posons $F^*_{\beta_\lambda} = F_{\beta_\lambda} \cdot O_{\beta_\lambda} - \sum_{\mu<\lambda} O_{\beta_\mu}$. Nous appliquons le lemme 2 à cette suite des ensembles $\{F^*_{\beta_\lambda}\}$, alors il résulte que $\sum_\lambda F^*_{\beta_\lambda}$ qui coïncide avec E est un F_σ. Comme l'ensemble complémentaire de E est encore développable, il est aussi un F_σ, et donc E est un G_δ; Par conséquent, E est à la fois un F_σ et un G_δ, c. q. f. d.

En tenant compte du théorème inverse (théorème 7 dans § 4), on a le

Théorème 13. Dans un espace régulier, complet et à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1), les ensemble F_σ et G_δ coïncident avec les ensembles développables.

En rapprochant des théorèmes 10, 11 et 6 dans § 4, on a le

Théorème 14. X étant un espace régulier, complet et à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1), et Y étant un espace parfaitement séparable et à caractère dénombrable monotone

1) Cf. D. MONTGOMERY, loc. cit., p. 533.

vérifiant la condition (D), la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit mesurable B de 1-re classe est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé.

VI. Fonctions jouissant de la propriété de BAIRE. Suivant l'idée due à M. KURATOWSKI (voir loc. cit., p. 192), on peut démontrer le

Théorème 15. Soient X et Y deux espaces à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (D). Alors, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $y = f(x)$ jouisse de la propriété de BAIRE est qu'il existe un ensemble P de 1-re catégorie dans X tel que la fonction partielle $f(x \mid X-P)$ est continue (Y étant supposé parfaitement séparable).

On peut encore démontrer le

Théorème 16. Soit X un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1) et soit Y un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (B). La limite d'une suite convergente de fonctions $f_n(x)$ jouissant de la propriété de BAIRE jouit aussi de cette propriété.

La démonstration du théorème est tout-à-fait analogue à celle que nous avons donné dans le théorème 7 de ce paragraphe, remarquant que la somme et le produit des ensembles dénombrables jouissant de la propriété de BAIRE possédent aussi cette propriété.

Nous démontrons à présent le théorème suivant qui est analogue au théorème 5 :

Théorème 17. Soient X et Y deux espaces à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1), et soit Z un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (B). Si une fonction $z = f(x, y)$ est continue relativement à la variable x et jouit de la propriété de BAIRE relativement à la variable y, elle jouit de cette propriété relativement à la variable (x, y).

La démonstration du théorème est obtenu d'une façon tout-à-fait analogue à celle du théorème 5. Cependant, dans ce cas, nous avons besoin de quelques lemmes :

Lemme 6. Soit X un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1), et soit $O^1 \subseteq O^2 \subseteq \cdots \subseteq O^\lambda \subseteq \cdots$ une suite bien ordonnée d'ensembles ouverts croissants dans X. Si, pour chaque λ, $O^\lambda - \sum_{\mu<\lambda} O^\mu$ contient un ensemble non-dense E^λ, alors l'ensemble $E = \sum_\lambda E^\lambda$ est de 1-re catégorie.

Démonstration. Désignons par E_n^λ l'ensemble de tous les points x de E^λ tels que $\rho(x, X-O^\lambda) > \frac{1}{n}$; Alors, E_n^λ est sûrement non-

dense. Il s'agit de démontrer que $\sum_{\lambda} E^{\lambda}$ est de l-re catégorie. Pour cela il suffit de vérifier que l'ensemble $E_n = \sum_{\lambda} E_n^{\lambda}$ est non-dense. Supposons, par impossible, que E_n ne soit pas non-dense, c.-à-d. qu'il existe un ensemble ouvert non-vide G tel que $G \subseteq \overline{E_n}$. Soit, à maintenant, x un point de G et soit $V_m(x)$ un voisinage de x qui est entièrement contenu dans G, où $m > n$. Alors, il résulte $V_m(x) \subseteq \overline{E_n} = (\overline{\sum_{\lambda} E_n^{\lambda}})$, c.-à-d. $V_m(x) \cdot (\sum_{\lambda} E_n^{\lambda}) \neq 0$. D'autre part, d'après la définition, on a $\rho(E_n^{\lambda}, E_n^{\mu}) > \frac{1}{n}$ pour $\lambda \neq \mu$, il existe donc un suffixe λ_0 tel que $V_m(x) \cdot E_{n^0}^{\lambda_0} \neq 0$ et $V_m(x) \cdot (\sum_{\lambda(\neq\lambda_0)} E_n^{\lambda}) = 0$. Or, il est clair que $(\overline{\sum_{\lambda} E_n^{\lambda}}) = \overline{E_{n^0}^{\lambda_0} + \sum_{\lambda \neq \lambda_0} E_n^{\lambda}} = \overline{E_{n^0}^{\lambda_0}} + \overline{\sum_{\lambda \neq \lambda_0} E_n^{\lambda}}$, donc on a $V_m(x) \subseteq \overline{E_{n^0}^{\lambda_0}}$. Ce qui est contraire à l'hypothèse que $E_{n^0}^{\lambda_0}$ est non-dense. Par conséquent, E_n est non-dense, donc $E = \sum_{n} E_n = \sum_{\lambda} E^{\lambda}$ est de l-re catégorie, c. q. f. d.

Lemme 7. Dans la même hypothèse, si la suite $O^1 \subseteq O^2 \subseteq \cdots \subseteq O^{\lambda} \subseteq \cdots$ *est telle que, pour chaque* λ, $O^{\lambda} - \sum_{\mu<\lambda} O^{\mu}$ *contient un ensemble de 1-re catégorie* E^{λ}, *alors l'ensemble* $E = \sum_{\lambda} E^{\lambda}$ *est de 1-re catégorie.*

En effet, E^{λ} étant un ensemble de l-re catégorie pour tout λ, on peut poser que $E^{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^{\lambda}$ où E_n^{λ} est non-dense. Selon le lemme 6, $E_n = \sum_{\lambda} E_n^{\lambda}$ est de l-re catégorie. En outre, il est évident que $E = \sum_{n} E_n$, donc l'ensemble $E = \sum_{\lambda} E^{\lambda} = \sum_{n} \sum_{\lambda} E_n^{\lambda}$ est de l-re catégorie, c. q. f. d.

Lemme 8. Dans la même hypotèse, si la suite $O^1 \subseteq O^2 \subseteq \cdots \subseteq O^{\lambda} \subseteq \cdots$ *est telle que, pour tout* λ, $O^{\lambda} - \sum_{\mu<\lambda} O^{\mu}$ *contient un ensemble* E^{λ} *jouissant de la propriété de* BAIRE, *alors l'ensemble* $E = \sum_{\lambda} E^{\lambda}$ *jouit aussi de cette propriété.*

Démonstration. E^{λ} étant un ensemble jouissant de la propriété de BAIRE, on peut poser que $E^{\lambda} = M^{\lambda} + P^{\lambda}$ pour tout λ, où M^{λ} est un G_{δ} et P^{λ} est de l-re catégorie. Il est évident que $\sum_{\lambda} E^{\lambda} = \sum_{\lambda} M^{\lambda} + \sum_{\lambda} P^{\lambda}$, et du fait que $M^{\lambda} \subseteq O^{\lambda} - \sum_{\mu<\lambda} O^{\mu}$ et $P^{\lambda} \subseteq O^{\lambda} - \sum_{\mu<\lambda} O^{\lambda}$ et des lemmes 2 et 7, il résulte que $\sum_{\lambda} M^{\lambda}$ est un G_{δ} et $\sum_{\lambda} P^{\lambda}$ est de l-re catégorie ; Par conséquent l'ensemble E jouit de la propriété de BAIRE, c. q. f. d.

Ces préliminaires étant posés, nous allons démontrer le théorème 17.

Démonstration du théorème 17. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda}, \ldots$ une suite

bien ordonnée de tous les points de X et soit S_n^λ une sphère de centre x_λ et de rayon $\frac{1}{n}$. A chaque point x de l'espace X faisons correspondre l'indice minimum $\lambda(x, n)$ tel que $x \in S_n^\lambda$ et posons $\omega_n(x) = x_{\lambda(x,n)}$; On a évidemment selon les conditions (D) et (T_1) de X: $\rho(\omega_n(x), x) \leq \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to\infty} \omega_n(x) = x$.

Or, $f(x, y)$ étant continue relativement à la variable x, il résulte

$$\lim_{n\to\infty} f(\omega_n(x), y) = f(\lim_{n\to\infty} \omega_n(x), y) = f(x, y) .$$

Par suite, selon le lemme 5, on a

$$\{f(x, y) \in F\} \equiv \underset{n}{II} \sum_k \{f(\omega_{n+k}(x), y) \in O_n(F)\} .$$

Donc

$$\underset{xy}{E}\{f(x, y) \in F\} \equiv \underset{n}{II} \sum_k \underset{xy}{E}\{f(\omega_{n+k}(x), y) \in O_n(F)\} .$$

Or,

$$\{f(\omega_{n+k}(x), y) \in O_n(F)\} \equiv \sum_\lambda \left\{[f(x_\lambda, y) \in O_n(F)] \cdot [x \in (S_n^\lambda - \sum_{\mu<\lambda} S_n^\mu)]\right\} ,$$

donc il résulte

$$\begin{aligned} &\underset{xy}{E}\{f(\omega_{n+k}(x), y) \in O_n(F)\} \\ &\quad \equiv \sum_\lambda \left\{\underset{xy}{E}[f(x_\lambda, y) \in O_n(F)] \cdot \underset{xy}{E}[x \in (S_n^\lambda - \sum_{\mu<\lambda} S_n^\mu)]\right\} \\ &\quad \equiv \sum_\lambda \left\{\underset{xy}{E}[f(x_\lambda, y) \in O_n(F)] \cdot \left(\underset{xy}{E}[x \in S_n^\lambda] - \sum_{\mu<\lambda} \underset{xy}{E}[x \in S_n^\mu]\right)\right\} . \end{aligned}$$

Par conséquent, en posant $O_n^\lambda = (\sum_{\mu\leq\lambda} S_n^\mu) \times Y$ et $E_{n,k}^\lambda = \underset{xy}{E}\{f(x_\lambda, y) \in O_n(F)\} \cdot O_n^\lambda$, on peut employer le lemme 8 à la suite des ensembles ouverts $O_n^1 \subseteq O_n^2 \subseteq \cdots \subseteq O_n^\lambda \subseteq \cdots$. Il en résulte que, $\underset{xy}{E}\{f(x_\lambda, y) \in O_n(F)\}$ étant un ensemble jouissant de la propriété de BAIRE, l'ensemble $\sum_\lambda E_{n,k}^\lambda$ jouit de la propriété de BAIRE. Donc l'ensemble $\underset{xy}{E}\{f(x, y) \in F\}$ jouit de cette propriété, c. q. f. d.

Quant à l'image de l'équation $y = f(x)$, en tenant compte du lemme 8, on a le théorème suivant d'une façon tout-à-fait analogue au théorème 6. Donc nous le donnons sans démontrer :

Théorème 18. X et Y étant deux espaces à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1), et $y = f(x)$ étant une fonction jouissant de la propriété de BAIRE, *l'image $I \equiv \underset{xy}{E}\{y = f(x)\}$ de $f(x)$ jouit de cette propriété.*

On sait qu'une fonction $y = f(x)$ est dite *continue-a* lorsque l'ensemble des points de discontinuité de $f(x)$ est de l-re catégorie, et

qu'une fonction $y = g(x)$ est dite *continue-β* lorsqu'il existe un ensemble P de l-re catégorie (dans X) tel que la fonction partielle $g(x \mid X-P)$ est continue.

Enfin dans ce paragraphe, nous ajoutons un théorème concernant une relation entre les fonctions continues-α et les fonctions continues-β :

Théorème 19[1]. *Soit X un espace à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (D) et soit Y un espace localement compact et à caractère dénombrable monotone vérifiant les conditions (D) et (T_1). Alors, une fonctions $y = f(x)$ continue-β se laisse obtenir comme limite d'une suite convergente de fonctions continues-α.*

Démonstration. Nous remarquons d'abord, selon un théorème dû à MM. P. ALEXANDROFF et P. URYSOHN[2], que tout espace accessible, localement compact et à caractère dénombrable monotone vérifiant la condition (T_1), est régulier ; donc l'espace Y l'est aussi.

Or, $f(x)$ étant continue-β, on peut décomposer l'espace X en deux ensembles sans point commun : $X = C+D$, où D est de l-re catégorie et C est un G_δ tels que la fonction partielle $f(x \mid C)$ est continue. De plus on peut supposer sans restreindre la généralité que $C = \prod_n G_n$, $D = \sum_n F_n$ et $F_n = X-G_n$, où G_n est ouvert et F_n, fermé et non-dense et de plus $G_{n+1} \subseteq G_n$ et $F_n \subseteq F_{n+1}$ pour tout n.

En désignant par $I(E)$ l'ensemble de tous les points intérieurs d'un ensemble E, on a les égalités : $X = C+D = \bar{C}+I(D) = I(\bar{C}) + I(D) = G+F$, où $G = I(\bar{C})$ et $F = \overline{I(D)}$. $I(D)$ est de l-re catégorie, puisque $I(D) \subseteq D$ et $I(D)-I(D)$ est non-dense comme frontière d'un ensemble ouvert $I(D)$; donc $F = I(D)+(\overline{I(D)}-I(D))$ est de l-re catégorie. $C+F$ est partout dense dans X, car

$$(\overline{C+F}) \supseteq \bar{C}+F \supseteq I(\bar{C})+\overline{I(D)} = X.$$

Puis,

$$X = C+F+D = C\cdot G+F+D = C\cdot G+F+\sum_n F_n = \sum_n (C+F+F_n),$$

car $C+F = C\cdot G+F$. En posant $A_n = C+F+F_n = C\cdot G+F+F_n$, A_n est partout dense dans X, puisque $C+F \subseteq A_n$. Posons $X = A_n+B_n$, où $B_n = D\cdot G\cdot G_n$ et $A_n\cdot B_n = 0$. Alors, chaque point de B_n est d'accumulation de A_n.

1) C'est une généralisation d'un théorème dû à M. G. STEINBACH. Voir, G. STEINBACH, Beiträge zur Mengenlehre, Inaugural-Dissertation, Bonn, (1930), pp. 78-81.

2) Cf. P. ALEXANDROFF et P. URYSOHN, Mémoire sur espaces topologiques compact, Verh. Kon. Akad. Amsterdam, Deel. XIV (1929), pp. 28-29.

Nous définirons à présent les fonctions $f_n(x)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, comme il suit :

1° Pour chaque point x de A_n, posons $f_n(x) = f(x)$.

2° Pour chaque point x de B_n, il y a deux cas à distinguer :

2_1) S'il existe au moins une suite de points $\{x_m^n\}$ de A_n telle qu'elle converge vers le point x et de plus la suite des points $\{f(x_m^n)\}$ converge vers un point de Y, pour une telle suite fixe, nous posons $f_n(x) = \lim_{m\to\infty} f(x_m^n)$.

2_2) Pour chaque suite de points $\{x_m^n\}$ de A_n qui converge vers le point x, si la suite $\{f(x_m^n)\}$ diverge, nous poserons $f_n(x) = y_0$, où y_0 est un point fixe de Y.

Par ces définitions, nous avons la suite des fonctions $\{f_n(x)\}$ définies sur l'espace X entier. Nous démontrons que la suite des fonctions $\{f_n(x)\}$ converge vers $f(x)$. Tout d'abord, par définition, on a $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ et $X = \sum_n A_n$, donc à chaque point x de X correspond un nombre n tel que $x \in A_n$; par suite, il résulte $f_m(x) = f(x)$ pour tout $m \geq n$. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, autrement dit la suite des fonctions $\{f_n(x)\}$ converge vers $f(x)$.

Il nous reste encore à démontrer que chaque fonction $f_n(x)$ est continue-α. Nous allons vérifier que $f_n(x)$ est continue sur $C \cdot G (\subseteq A_n)$ (pour tout n), c.-à-d. que, étant donnés un point $x_0 \in C \cdot G$ et un nombre naturel k, il existe un voisinage $Vm_k(x_0)$ tel que

$$f_n(Vm_k(x_0)) \subseteq U_k(f_n(x_0)) .$$

Or, comme Y est régulier et localement compact, il y a un voisinage $U_{k'}(f(x_0))$ tel que $\overline{U_{k'}(f(x_0))} \subseteq U_k(f(x_0))$, où celui-là est compact. $f(x \mid C)$ étant continue, il existe un voisinage $V_{l'}(x_0)$ tel que :

$$(1) \qquad f(C \cdot V_{l'}(x_0)) \subseteq U_{k'}(f(x_0)) .$$

Puis, comme $G_n \cdot G (\supseteq C \cdot G)$ est ouvert, il y a un voisinage $Vm_k(x_0)$ tel que

$$(2) \qquad Vm_k(x_0) \subseteq G_n \cdot G \cdot V_{l'}(x_0) .$$

Dans ce cas, il résulte $Vm_k(x_0) \cdot (F + F_n) = 0$, puisque $G_n \cdot G \cdot (F + F_n) = 0$; Donc il résulte

$$(3) \qquad A_n \cdot Vm_k(x_0) = (C + F + F_n) \cdot Vm_k(x_0) = C \cdot Vm_k(x_0) = C \cdot G \cdot Vm_k(x_0) .$$

A maintenant, on pose : $Vm_k(x_0) = A_n \cdot Vm_k(x_0) + B_n \cdot Vm_k(x_0)$, et nous allons démontrer que $f_n(Vm_k(x_0)) \subseteq U_k(f_n(x_0))$. En effet, soit x un point de $Vm_k(x_0)$. Alors il y a deux cas à distinguer :

(a). Le cas où $x \in A_n \cdot Vm_k(x_0)$. Dans ce cas, d'une part $A_n \cdot Vm_k(x_0) = C \cdot G \cdot Vm_k(x_0) \subseteq C \cdot Vm_k(x_0)$, donc $f(x) \in U_{k'}(f(x_0))$ selon (2) et (1). D'autre part, comme $x_0 \in A_n$ et $x \in A_n$, on a, de la définition, $f_n(x_0) = f(x_0)$ et $f_n(x) = f(x)$; donc

$$(4) \qquad f_n(x) \in U_{k'}(f_n(x_0)) \subseteq U_k(f_n(x_0)) .$$

(b). Le cas où $x \in B_n \cdot Vm_k(x_0)$. Soit $\{x_l\}$ une suite de points de A_n telle qu'elle converge vers le point x. Comme $x \in Vm_k(x_0)$, il existe un nombre N tel que $\sum_{i=N}^{\infty} x_i \subseteq Vm_k(x_0)$, et en outre, par (3) et (2), $A_n \cdot Vm_k(x_0) = C \cdot G \cdot Vm_k(x_0) \subseteq C \cdot G \cdot V_{l'}(x_0)$. Par conséquent iselon (1), $f(x_l) \in U_{k'}(f(x_0))$ pour $l > N$; $\overline{U_{k'}(f(x_0))}$ étant supposé compact, donc il existe une sous-suite $\{x_{l_j}\}$ de points $\{x_l\}$ telle que la suite des points $\{f(x_{l_j})\}$ converge vers un point appartenant à $\overline{U_{k'}(f(x_0))}$. Par suite, selon la définition 2°, on a $\lim_{l\to\infty} f(x_l^n) = f_n(x)$ où $\{x_l^n\}$ est la suite fixe des points de A_n telle que $\lim_{l\to\infty} x_l^n = x$. Or, comme $x_l^n \in A_n$ pour tout l et $\lim_{l\to\infty} x_l^n = x \in Vm_k(x_0)$, il existe un nombre N' tel que $x_l^n \in A_n \cdot Vm_k(x_0)$ pour $l > N'$; donc on a selon (3), (2) et (1), $f(x_l^n) \in U_{k'}(f(x_0))$ pour $l > N'$. Il en résulte que $f_n(x) \in \overline{U_{k'}(f(x_0))} \subseteq U_k(f(x_0))$, puisque $f_n(x) = \lim_{l\to\infty} f(x_l^n)$. D'autre part, comme $x_0 \in A_n$ et donc $f_n(x_0) = f(x_0)$, il résulte $f_n(x) \in U_k(f_n(x_0))$. Donc, en tenant compte de (4), on a $f_n(Vm_k(x_0)) \subseteq U_k(f_n(x_0))$. Ce qui nous montre que la fonction $f_n(x)$ est continue sur $C \cdot G$. Par suite, l'ensemble des points de discontinuité de $f_n(x)$ est un sous-ensemble de $F+D$ qui est de l-re catégorie dans X, donc $f_n(x)$ est continue-a, c. q. f. d.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 179
§ 1. Sur divers espaces à structure uniforme 182
§ 2. Quelques théorèmes concernant les fonctions continues 202
§ 3. Sur deux problèmes posés par M. FRÉCHET 207
§ 4. Sur les espaces à caractère dénombrable monotone 215
§ 5. Les espaces à caractère dénombrable monotone et vérifiant la condition (D) 230
§ 6. Fonctions mesurables B 238