小学校における量と数の指導についてのいくつかの問題

大　田　邦　郎
（千葉大学教育学部）

はじめに

現在の算数教科書では、分数が2年生から6年生までの5学年にまたがって扱われている。2年生で$\frac{1}{2}$と$\frac{1}{4}$が出てくるが、そのたし算は5年生でようやく可能になるのである。これに対して私は、分数の指導は＜導入から異分母加減算まで＞および＜乗除算＞の2つの単元にまとめて行うべきであると考えている。

また、現在の算数教科書では分数の乗除算が2学年にまたがり、分数×整数、分数÷整数は5年生で、分数×分数、分数÷分数は6年生で扱われている。しかし私は、これらを1学年の1単元にまとめたうえで、分数どうしの乗除算から扱うべきであると考えている。

学習指導要領が教育内容を「細切れ」にしていることで、複数あり得る指導順序のうちのあるものが採用され、他のものが排除されている。つまり、学習指導要領は初等数学の指導について特定の立場に立っていると言わざるを得ない。

また、ある会社の教科書は、1学年あたり17の単元を配置し、その間に10前後のトピックスをはさんでいる。1単元あたりの授業時数は平均9時間程度であるから、ほぼ2週間ごとに単元が変わることになる。

個々の単元、個々のトピックスは、その学年の子どもたちにそれなりに「わかる」かも知れない。しかし、このような「細切れ」のカリキュラムで、子どもたちはどのような数学像を持つようになるだろうか。

現在の学習指導要領・教科書のあり方とは逆に、単元をなるべく大きくまとめて、その中での指導順序、指導方法については各教科書会社、各学校、各教師の裁量にゆだねるのが望ましい。自由な研究が保障されない教育現場で、教師の力量を高めることはできないのである。

本稿では、現在の小学校算数の内容をさしあたり棚上げにして、量と数を中心に初等数学教育で扱うべき内容を考えなおしてみたい。

0　算数でなく数学を

日本では1872（明治5）年の学制以来、初等教育段階の数学を「算術」と呼んできた。中等教育では「数学」が算術、代数、幾何、三角法に分けられていたから、算術は数学の一分野であるという認識があったはずだ。

その後、1941（昭和16）年からの国民学校期に算術は「算数」となり、戦後の学制改革後も現在に至るまで小学校ではこの名称が用いられている。しかし現在、算数と数学との違いは、どの学校段階で扱われるかの違いでしかないようだ。

実際、学習指導要領が改訂される際に、小学校から中学校に移されたり、中学校から小学校に移されたりした内容があった。つまり、同じ内容でも小学校で扱われれば算数、中学校で扱われれば数学になるのであるから、算数と数学の違いはその内容によるのではない。

それでもあえて小学校段階で「算数」と呼ぶのは、「小学校では数学を教えるのではなく、数学的な見方・考え方を教えるのだ」という態度主義的な考え方があるからだろう。

一方で、中学校、高等学校の数学の授業について、大学生たちは<公式を覚えて計算問題を解く>ものであったと言う。ここに現実的な「算数」と「数学」の分断が見られるが、どちらも本来の数学を教える教科であるとは言いがたい。

学校段階によって教科名を変える必要はない。諸外国では一般に初等教育でも中等教育でも「数学」の名称を用いている。

2、3といった自然数概念の初歩の認識[1]から、子どもたちは自分自身の中に数学を作っていく。それを指導するのが本来の数学教育ではないか。

現在の中学校、高等学校の「数学」につながるものとしてではなく、現在の中学校、高等学校の「数学」をも本来の数学に転換するという展望のもとに、「算数」を廃止して小学校の教科として数学を設置したい。

1　小学校数学のカリキュラム

初等教育段階の数学の内容として、自然数とその四則、正の有理数（小数・分数）とその四則を中心に置くことにする[2]。

本研究室の数学グループは、「量にもとづく数学教育」の立場から様々な授業プランを授業書の形で作成してきた。この中で、1975年からの実数をテーマにしての研究が、分数および小数の授業書として実を結んだ。

量と数の関係について言えば、分離量が自然数に対応し、連続量が実数に対応する。ただし、連続量から実数を導くには無限回の測定操作を想定する必要がある。それには、有限回の測定操作で近似して有理数を導く段階が不可欠である。

このような観点から、実数への拡張を射程に入れた分数や小数の授業書が作成された。学習指導要領と教科書では、自然数の四則が終わらないうちに分数や小数が「細切れ」に出てくる。しかし、分数や小数の指導は、本来、分離量と自然数の指導が一通り終わってからなされるべきである。

このことから、小学校の低学年では分離量から自然数とその四則を導き、高学年では連続量から有理数（有限小数・分数）とその四則を導くことを、カリキュラムの中心に置くのである。これまでに作成してきた授業書群のうち、<小数の導入から加減算まで>および<分数の導入から加減算まで>の授業書はここに位置づけられる。

しかし、小数の乗除算、分数の乗除算については、いくつかの授業書が作られてきたが、まだ完成度が十分であるとは言えない。

分数の除法がうまく教えられていないことは、本号の丹尾春彦論文でも指摘されている。分数の除法の理解には、内包量や逆内包量、連続量の倍と等分およびその合成など、量とその操作に関する理解を必要とする。また、小数・分数の乗除算には面積図を何らかの形で利用することになる。

[1] 遠山啓は、数概念の認識以前の数学の段階があるとして、それを「原数学」と呼んだ。遠山啓編『歩きはじめの算数』1972年、国土社。
[2] 整数（負数を含む）を扱うかどうかについては留保する。これは負数の乗除算の意味付け方にかかっている。整数を扱う場合は負の有理数も扱うことになる。

したがって、これまでに作成してきた授業書群のうち＜内包量＞や＜面積＞、また幾何学の初歩に関するいくつかのプランもこのカリキュラムの中に位置づけられるだろう。

分離量と自然数に関しては、1950年代末から数学教育協議会を中心に進められてきた「水道方式」のまとまった研究と実践がある。数学グループはこれを踏まえたうえで、主に連続量と有理数・実数、また関数・微積分の研究を進めてきたが、分離量と自然数に関してもいくつかのプランがある。以下、これらをもとにいくつかの問題提起をしていきたい。

2　分離量と自然数

小学校に入学したばかりの子どもが100まで数えられるとしても、集合の大きさとしての自然数を理解しているとは言えない。数を暗記しているだけの1年生に数とは何かを教えるのが、数学教育の第一歩であり、専門家としての教師の仕事である。

(1)　自然数の概念

1968年学習指導要領から、数概念は順序数からではなく集合数から導入するように方向転換がなされてきた。なかま集め、1対1対応による比較（多い・少ない・同じ）から数指導を始めるようになったのである。しかし、数が出てくる順序はどの教科書も1、2、3、…と、順序数と同じであった[3]。

集合数らしく1以外の数から始まる教科書は、1996年になって登場した。学校図書が3から始めたのである。ただし、見開きページを開いて1から始めることもできるように工夫されており、このスタイルが現在でも続いている。

これに続いて大日本図書も2005年に2から、2011年には3から始まる教科書を発行した。今後も1以外の数から始まる教科書が増えると予想される。物事を「1から始める」のではなく「3から始める」と言うようになるかもしれない。

しかし、1968年学習指導要領から1年生で0を教えることが可能になり、どの教科書も取り入れたのであるが、10より前に0を扱う教科書はまだ現れていない。「10」という数字は1と0からできていることが教えられないから、「10」で一つの数字であるかのように扱われている。10進記数法をこの段階で教えることが必要である。

外国の教科書では、私がいくつか調べた範囲では10の前に0が出てくる場合が多いようだ。早いものでは5の前に出てくる。私も3、2、1、0、4、5の順が良いと考えている[4]。

(2)　自然数の乗法

1皿にお菓子が3個ずつ乗っていて、それが5皿あるとき、お菓子の個数を求める式を日本では3×5（被乗数×乗数）と表す。一方、アメリカでは5×3（five times three 乗数×被乗数）と表す。これには日本語とアメリカ英語の語順の違いが反映している。

---

[3] 大日本図書だけ1970年代の一時期に0から始めたことがある。

[4] 自然数概念の導入から加減算までの指導については、大田邦郎「低学年算数の『基礎・基本』とその学び方」（柴田義松編『算数の「基礎・基本」の学び方』2002年、明治図書）で詳しく述べた。

これは交換法則とは別である。交換法則は、3個ずつ5皿のときも、5個ずつ3皿のときもお菓子の数は等しいという法則である。九九を知ってしまえばどちらも6個だから等しいということになるが、九九を知る前は交換法則は必ずしも自明ではない。

かけ算の意味（1あたり×いくつ分=全体の数）を教えたら、九九の前に交換法則を教えたい。そうすれば九九の指導もその分だけ楽になるだろう。

さらに結合法則と分配法則がある。分配法則$(a+b)\times c = a\times c + b\times c$を九九の前に教えれば、やはり九九の指導が楽になる。また、2位数×1位数の指導の中で利用することもできる[5]。

なお、かけ算の式に、3個/皿×5皿=15個というように、式に「単位」を付けさせる実践も見られるが、1皿あたりお菓子が3個というのを内包量的に表して、3個/皿とするのは誤用であろう。

たとえば速さの単位「㎞/時」は、距離（連続量）÷時間（連続量）で求められる内包量の単位である。お菓子の個数も皿の枚数も連続量ではない。そもそも、「個」も「皿」も単位ではなく「名数」にすぎない。分離量のかけ算に単位は必要ないのである。

(3)　自然数の除法

わり算は包含除よりも等分除がわかりやすいとして、自然数のわり算を連続量である液量の等分から入る実践がある。たしかに「等分」の意味はよくわかるが、自然数のわり算には向いていない。自然数のわり算すなわち分離量のわり算は「余り」を伴うからだ。

つまり、$a\div b$とは$a = qb + r\ (0 \le r < b)$となる$q$（商）と$r$（余り）を見つけることである。

自然数の除法では、等分除は割り切れるときにだけ成立することになる（13個のビー玉を4人に等しく分けることはできない）。一方、包含除は割り切れなくても成立する（13個のビー玉を1人に4個ずつ配ると3人もらえて1個余る）。

教科書には、3年生のわり算を等分除から教えるものと、包含除から教えるものの両方がある。余りが出る場合に$a\div b = q\cdots r$とおかしな「等式」を書くのではなく、$a = qb + r$という書き方をすることも含めて、それぞれの位置づけを再検討したい。

また、0を含むわり算に注意する必要がある。教科書はすべて0÷3型のわり算を扱うが、1÷3型（商が0で余りあり）を扱うものはまれである。これは多位数のわり算の前に扱っておく方が良い。

なお、学習指導要領・教科書では商が1桁で余りのあるわり算（3年生）を筆算（4年生）ですることができない。しかし、これでは余りを求めるひき算を暗算ですることになる。これは3年生には困難なようだ。この時点で筆算を教えたい[6]。

さらに、3÷0（不能）や0÷0（不定）を扱う教科書はない。集合数が自然数であるとすれば0も自然数に含まれるのであり、これらも扱わなければ自然数のわり算を教えたことにならない。

これらは等分除（0等分）では考えられないが、包含除ならなんとか説明できる[7]。また、$a = qb$に（$a=3$、$b=0$）や（$a=0$、$b=0$）を代入して考えさせる方法もある[8]。

5　道数協・算数プリント編集委員会『21 世紀版 算数たのしい学習プリント 2 年』 2002 年、共同文化社。

6　1989 年学習指導要領までは 3 年生で商 2 桁の筆算まで扱っており、教科書によっては商 1 桁で余りのあるわり算から筆算を始めていた。しかし、1998 年学習指導要領からこれらが分断され、3 年生で筆算が使えなくされた。

以上のような方向で、自然数概念とその四則については、基本的に分離量の範囲での指導を組み立てたい。また、学習指導要領・教科書では自然数の四則が終わらないうちに小数・分数とその加減算が出てくるが、自然数の四則を終えてから小数・分数を扱うようにしたい。

3 連続量と有理数

連続量を単位で測って半端が出たとき、単位を等分して半端を測っていく方法と、半端で単位を測っていく方法がある。これらの測定操作は無限に続き、無限小数または無限連分数が得られる。これが実数である。これらの操作を途中で止めれば、近似値として有限小数または有限連分数が得られる。これが有理数である。

有理数の指導を小数から始めるか、それとも分数から始めるか、論理的にはどちらも可能である。しかし、小数の概念とその四則計算は、自然数の概念とその四則計算の延長上にある。カリキュラムとしては小数を先に位置づけたい。

(1) 小数の導入から加減算まで

当時、本研究室の助手であった須田勝彦は、1977年度の数学サブゼミで小数の授業書の素案を示した。長さを単位量で測って半端が出たとき「単位の10等分という考え方は、普通の問題設定からは必然的に出てくるものではない」[9]というのが須田の仮説であった。

① まず、単位量（L）より小さい単位（P）を作って測る。
② さらに半端が出たらより小さい単位（U）を作って測る。
③ しかしそれでは繰り上がりができないため、たし算した結果の大小比較ができない。
④ それで1L=7P、1P=12Uとなるように小単位の大きさを微修正する。
⑤ 7等分と12等分では繰り上がりの計算が面倒だから1P=7Uと再修正する。
⑥ 7等分にそろってもやはり繰り上がりが面倒だから、全部10等分にそろえる。

須田の素案では③の次が⑥になっていたが、当時大学院生であった氏家英夫や大田の意見も取り入れて、上記のように段階が細分化された。

こうして長さの測定から小数の発見、加減算までを「ドンガバチョ村の四季」という読み物形式で考えていく授業書「小数とはなにか」[10]が作成された。

数学史上でもこれらの段階が実際にあったこと、また10進小数はステヴィンにより16世紀末に発見されたこと、そしてネイピアが現在の小数点記号を用いたことも授業書に取り入れられた。

---

[7] 3個のビー玉を1人に0個ずつ配るといつまでも配り終わらない（3÷0…不能）。0個のビー玉を1人に0個ずつ配ると何人でももらえる（0÷0…不定）。

[8] 吉田智和「小学校における整数のわり算の指導」（2004年度千葉大学修士論文）に、小学校3年生に教えた実験授業の記録がある。

[9] 須田勝彦「小数の指導を考えるために」1977年（数学サブゼミへのレジュメ）。

[10] 須田勝彦「授業書『小数とは何か』による授業」（『教授学の探究』第3号、1985年、北海道大学教育学部教育方法学研究室）。

さらに、⑤の系統的7等分と⑥の系統的10等分の段階では、測定操作が無限に続くことが示唆されており、有限小数（有理数）は無限小数（実数）の一部あるいは近似として捉えられるようになっている。

この授業書は、当時の学習指導要領・教科書に合わせて、当初は小学校3年生を対象に実験授業にかけられた。しかし、教科書で小数を学習したはずの高学年のクラスでこの授業書を用いても、子どもたちは新鮮な気持ちで取り組むという。

この授業書「小数とはなにか」は、ほぼこのままで小学校の数学カリキュラムに取り入れたい。

(2)　小数の乗除算

ステヴィンは小数を、現在の記法で 2.360567 と書くところを、2⓪3①6②0③5④6⑤7⑥と記した。これは、⓪を小数点と見なせば現在のネイピアによる記法と同じであり、また、最後の⑥を10の負べき数と見なせば 2360567×10^{-6} という記法でもある。

須田は、素案の時点で「この方法で一貫すれば、とくに子どもに困難とされている乗法、除法の指導も（10の負べき計算）＋（整数のかけ算）という形で整理できて、かなりやさしくなるだろう」と述べている。

その後、須田はこの方向で、小数の乗除算について授業書「新数学対話」などを作成して試みたが、未完成である。現在、ステヴィンの記法も取り入れた小数乗除の授業書作成が、道数協札幌算数サークルにより進められており、完成すれば小学校数学のカリキュラムに取り入れることになるだろう。

小数の乗法の指導にあたっては、計算は10の負べき計算によるとしても、シェーマとして面積図の利用が考えられる。また、面積図は分数の乗法にも用いられる。小数の乗除算の前後に面積の指導[11]を位置づける必要がある。

(3)　分数の導入から加減算まで

授業書「小数とはなにか」が作成される2年前、数学グループの学生であった大田は、1975年度のサブゼミでの研究をふまえつつ、須田の指導のもとで授業書「新しい数―分数」[12]を作成した。

この授業書も、小数の場合と同様に分数を実数の一部として捉えた上で、小学校4年生を対象に、連分数形式を用いずに下記の③の半端Bの処理まで行うものであった。

①　ある長さ（連続量）を単位量1で測ると、n 個とれて半端Aが出る。
②　その半端Aで単位量を測ると、a 個とれてさらに半端Bが出る。
③　その半端Bで半端Aを測ると、b 個とれてさらに半端Cが出る。
④　その半端Cで半端Bを測ると、c 個とれてさらに半端Dが出る。……

11　氏家英夫「授業書による面積概念の指導」（北海道合同教研 研究推進委員会編『北海道の教育』1981年版）。

12　大田邦郎『教授学研究シリーズ No.3 小学校の分数指導における新しい試み―導入から加減算までの授業書とその解説―』1978年、北海道大学教育学部教育方法学研究室。

この操作は一般的には無限に続き、最初の量の大きさは無限連分数

$$n+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{\ddots}}}}$$

で表される。無限連分数は無理数であり、$\frac{n}{m}$ の形の分数（有理数）で表すことはできない。

しかし、測定操作を有限回で止めて得られる有限連分数は、$\frac{n}{m}$ の形の分数（有理数）に変形することができる。このような連分数の扱いは小学生には困難でも、中学生や高校生に実数を指導する際には必要となるだろう[13]。

この授業書のもうひとつの特色は、分数を導入したら加減算までまとめて教えるというところにある。そして、この場合の加減算は同分母分数ではなく、異分母分数の加減算である。そのために、導入のあとで分数の変身として 倍分、約分、通分を続けて扱っている。

また、$\frac{3}{0}$ や $\frac{0}{0}$ も考えさせている。これは、$\frac{b}{a}$ を「1を a 等分した b 個分（分割分数）」としてだけでなく、「a 個で b の大きさ（商分数）」としても意味付けたことで可能になった[14]。

この授業書を2014年度にコンパクトに改訂して、改めて実験授業にかけた。近いうちにその結果をまとめる予定である。これも、小学校数学のカリキュラムに取り入れたい。

(4)　分数の乗除算

かつて大田は面積図を用いた分数乗除算の授業書[15]を作成したことがある。さらに、除法に関しては面積図ではなく、逆内包量を用いた分数乗除算の授業書[16]も作成した。

分数は連続量（外延量と内包量に分類される）の大きさを表すから、分数の乗除算は連続量をもとに考える必要がある。内包量の三用法（カッコ内は速さ、時間、距離の場合）

　第 1 用法　外延量÷外延量＝内包量（距離÷時間＝速さ）

　第 2 用法　内包量×外延量＝外延量（速さ×時間＝距離）

　第 3 用法　外延量÷内包量＝外延量（距離÷速さ＝時間）

で言えば、乗法は第 2 用法に限られる。しかし、除法は第 1 用法と第 3 用法の 2 つの場合がある。

除法を面積図や線分図を用いて説明できるのは、第 1 用法である。教科書は第 1 用法の場合だけを説明している。

一方、逆内包量を用いて除法が説明できるのは第 3 用法である。内包量を逆内包量にすれば、

---

[13] 積田さゆり「中学校における実数の指導」2008 年度千葉大学修士論文。

[14] 0 個で 3m になる長さは存在しない。また、どんな長さも 0 個で 0m になる。

[15] 1979 年度にある小学校の 6 年生 2 クラスを対象に実験授業を実施した。

[16] 大田邦郎、佐藤洋子「授業のプログラミングに関する実証的研究―分数除法の指導を素材として―」『千葉大学教育工学研究 第 9 号』1988 年。また、この 2013 年度改訂版が本号の丹尾論文に掲載されている。

第 3 用法＜距離÷速さ＝時間＞の式が、第 2 用法＜逆速さ×距離＝時間＞と変換されるのである。

自然数の除法が等分除と包含除の両方で説明されるように、分数の除法も第 1 用法と第 3 用法の両方で説明されるべきではないだろうか。その際、どのような説明の仕方があり得るか、まだ研究の余地がある。

また、内包量や逆内包量によるプランだけなく、倍（割合）によるプラン[17]もある。内包量か倍かではなく、両方とも扱うこともあって良い。

分数の乗除算をどう扱うかによって、面積や内包量、倍などが小学校数学のカリキュラムにどう位置づくかが定まってくる。分数の乗除算については小学校数学の最後に位置づけるというだけで、具体的な内容についてはまだ保留とせざるを得ない。

分数は初等数学のまとめであると同時に、実数、関数などの中等数学への入り口でもある。小学校数学について論ずる際は、つねに分数乗除算までどう展開するかを念頭に置く必要がある。

付記

本稿は、本研究室数学グループの研究成果の一部をトレースしつつ、小学校数学の課題について考察したものである。ここ 2 年間の、グループのメンバーとの討議も踏まえたつもりであるが、うまくまとまっていなければお詫びしたい。

また、この間、道数協札幌小学校サークルの月例会にも何度か参加した。同サークルの堀岡武氏には個人的にもいろいろ教えていただいた。また、丹尾春彦氏には分数乗除の、櫻田和也氏には分数の導入から加減算までの実験授業を実施していただいた。この共同研究から多くの知見を得ることができた。記して感謝したい。

なお、本稿は 2013-15 年度、日本学術振興会科学研究費補助金（基盤研究 C）「初等数学の教育内容構成に関する実験的・ 歴史的研究－分数教授の歴史と構想」（課題番号 25381016、研究代表者、岡野勉）による研究成果の一部である。

[17] 道数協・算数プリント編集委員会『21 世紀版 算数たのしい学習プリント 5 年』 2002 年、共同文化社。