経済学研究 *55−4*
北海道大学 2006.3

〈研究ノート〉

Kolmogorovの三公理に続くある御きまりの手順について

園　信太郎

1．はじめに

ここで三公理というのはあまりにも有名な次のA1，A2,及びA3である。但しここで，(Ω, $\mathbb{F}$）は可測空間であり，P は（Ω上の）完全加法族（あるいは σ 集合体）$\mathbb{F}$を定義域とする実数値を取る関数である。

A1.　非負性．$P(A) \geq 0$，$\forall A \in \mathbb{F}$.

A2.　完全加法性. $A_i \in \mathbb{F}$，$i = 1, 2, \cdots$，$A_i \cap A_j = \varnothing$，$\forall (i, j)(i \neq j)$，ならば，$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

A3.　「1」. $P(\Omega) = 1$.

統計学の教科書を何冊か視ると，このように確率測度の「定義」を与えた後に，次の三つの「明白な」性質を正式には確認していない場合があることに気づく。

B1.　$P(\varnothing) = 0$

B2.　有限加法性．A，$B \in \mathbb{F}$，$A \cap B = \varnothing$，ならば，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

B3.　$\Omega \neq \varnothing$.

2．B1の証明

$\varnothing = \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots \cup \varnothing \cup \cdots$ 及びA2より，$P(\varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots + P(\varnothing) + \cdots$ となる。$P(\varnothing) \neq 0$ とすると，P は実数値を取る関数なので，右辺の級数は発散し，一方左辺は実数である。故に，$P(\varnothing) = 0$。ここでは，P が実数値をとる関数であることと，完全加法性のみが使われている。

3．B2の証明

A と B とが互いに排反であるならば，列 A，B，$\varnothing$，$\varnothing$，$\cdots$，も互いに排反である。また，$A \cup B = A \cup B \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$。A2より，$P(A \cup B) = P(A) + P(B) + P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots$。故にB1より，$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$。

4．B3の証明

$\Omega = \varnothing$ とすると，B1より $P(\Omega) = 0$。これはA3に反する。故に $\Omega \neq \varnothing$。

ところで統計学では，Ωは標本空間であり，特定の試行がもたらし得る結果の全体である。従って，「空の」試行を考えるとこれは「空」となる。しかしB3によって，「空の」試行は排除される。

5．加法法則

B2は有限加法性だが，これは「確率の加法法則」に他ならない。一方幾つかの教科書では，「任意の事象 A と B とに対して，$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$。」という命題を，加法法則（あるいは加法定理）として掲げている。しかし,この式の右辺には「加法」のみでなく,「減法」も現れており,やはりこの命題は，包除原理（principle of inclusion and exclusion）の最も基本的な場合と見なすべきである。

包除原理という言葉は，少なくとも日本数学会編『岩波数学辞典第3版』，岩波書店，1985

年，の項目 95 B，266 頁左で，有限集合の基数を数え上げる際の基本原理の一つの名称として使われている。基数の場合に限らず，（有限加法族上で定義されている）有限加法的な集合関数に対しても，同様の「原理」が成立する。

6．おわりに

幾つかの公理を導入する際に，「明白な」性質の幾つかがその公理系から確かに従うことを，「ゆっくり」と確認することは，少なくとも教育上は重要であるように思われる。

2005 年 11 月 24 日（木）