経済学研究 *65－1*
北海道大学 2015.6

サヴェジ基礎論における規範的接近

園　　信太郎

1．はじめに

規範的，英語では normative，という形容詞は人によって内訳がかなり異なっているようである。極端な場合には，数学的接近をしているのならば「規範的だ」としている場合もあるようである。ここでは，サヴェジ氏の「基礎論」(1954，1972)での規範的接近を問題とする。彼は，公準たち（postulates）を提示する際に，読者が一人一人の立場から，各公準を「ためす」ことを強く望んでいる。「この公準を自身が侵犯していることに気づくのならば，自身はどのように反応するであろうか」と，自身に問うことを事実上要求しているのである。

彼は自身が提示する公準たちが，「経済行動における合理性」に反していないことを，真剣に要請する。つまり数学的公準系の基盤に「合理性」が貫徹されることを要求するのである。今日の数学においては，数学的に rich（豊饒）ならばそれが良い公理（axiom）であるという見解が，しばしば暗黙の内に通用しているようであり，例えば選択公理が好例である。そして，数学原理から（経済行動に対する）公理系へという，いわば「ながれ」があるようである。だが，サヴェジ氏は「逆」であり，「経済行動における合理性」から公準系へという，いわば批判的「ながれ」を保持している。この意味でサヴェジ氏は「古典的」である。

2．無差別性の非自明性

Preference，つまり選好を，サヴェジ氏は「このみ」の問題ではなく，「決定」の問題であるとする。「個」の選好を問うとは「個」の決定を問うことに他ならない。つまり，「決定の合理性」が問われることとなる。

異なる選択肢 **a**，**b** に対して二者択一を求められて，**b** を「個」が選ぶのならば，彼は **a** よりも **b** を「選好する」と表現しても，悪くはないであろう。だが，ここで無差別性が問題となる。「異なる」選択肢が「無差別」とは，結局いかなることか。ε を任意の，但し正の，「額」とすると，これがいかに微少ではあっても，**a** よりも「**b** と ε」を選び，**b** よりも「**a** と ε」を選ぶのならば，この場合，**a** と **b** とは無差別であると表現しても，不当ではないであろう。

しかし，この $\forall\varepsilon>0$ を「経験的に」とらえようとすると，問題に突き当たる。例えば，ε として 10^{-16}円をとり，これくらいで「充分だ」と判断したとする。しかし，この「充分だ」は，「**a** と **b** とが「無差別ではない」とすれば，その格差は 10^{-16}円より大である」という判断を，暗黙の内に前提としているのであり，無差別性に対する何らかの特徴づけが既に行われていると，想定しているのである。つまり，潜在的な「論理の悪循環」が疑われるのである。

そこでサヴェジ氏は選好への間接的接近をはかることとなる。つまり「**a** か **b** かで **b** を選ぶ」状況を，「**a** は **b** よりも選好される，にはあらず」と表現して，$\mathbf{a}\leq\mathbf{b}$ と表記するのである。ここで用心すべきなのは，$\neg\,\mathbf{a}\leq\mathbf{b}$（$\mathbf{a}\leq\mathbf{b}$ にはあらず）を $\mathbf{b}<\mathbf{a}$ と表記するとしても，こ

の＜は，否定¬によって間接的に導入される二項関係であり，positive な意味はこのままでは持ち得ないということである。

後にサヴェジ氏は，第六公準 P 6 や，その前任者である P 6′によって，＜に対して，positive な意味づけを行うこととなる。彼が P 6′を探り出すのにいかに苦心しているかは，「基礎論」を見ればわかることである。

3．「結果」の非自明性

Consequence，つまり「結果」だが，これは行為者である「個」が荷うこととなる「窮極的むくい」のことであり，このような「むくい」を「行為，act」から「単離」して，あたかも prize や income のように取り扱うのがサヴェジ氏の流儀である。

彼が「基礎論」で述べている様に，「結果」とは「個」の状態だが，しかし Savage（1967 a）で本音を漏らしているように，これは純粋経験の一種である。それは外物によって示唆はできても近似はできない一個の「経験」であり，「むくい」である。例えば，あえて筆者の例をあげれば，「根元苦」，「平常心」，「適」，などがある。

「結果」は単離されて自在に活用される。「快晴の日の「窮極的どしゃぶり体験」」というような想像上の実験が，自在に遂行されたりもするのである。

Utility，つまり効用とは，「個」が保持する価値尺度であり，各「結果」に実数値を対応させる関数によって表現される。Probability，つまり確率に基づいて，結局「たしからしさ」の尺度に基づいて，サヴェジ氏は効用を基礎づけている。しかし，確率概念に先行して，ある種の価値判断が導入される。つまり，「ある「結果」の対（c, c′）が存在して，c′は c よりも選好が上位である」という第五公準 P5 が持ち出されるのである。これは数学的には，nontriviality と表現されるものだが，内容上は確率に先行して，価値尺度ではないが，ある種の価値判断が，例えば（はずれ賞，あたり賞）というように，「存在する」ことを意味する。

一方，「結果」間の選好だが，これは行為間の選好の統制下に組込まれる。つまり，常に「結果」c をもたらす選択肢，結局の所「行為」を，<c>と表記すると，「$c \leq c'$とは$\langle c\rangle \leq \langle c'\rangle$のことである」と定義するのである。<c>はいわゆる定数的行為だが，その性格は自明ではない。「この」世界の状態がいかなるものであれ常に「結果」c をもたらす行為とは，「不動の行為」であり，「あたりまえ」とは言い難い。しかし数学的には，「定数」の「関数」への埋め込みであり，ほとんど慣例的である。

4．「行為」の定式化

Act，つまり「行為」の定式化だが，空ではない「この」世界 S の各「状態，s」に対して「結果」を対応させる関数を，みな「行為」と呼ぶこととするのである。「想像上の実験」の場で多様な行為が考察される。

「この」世界 S とは「状態，state」たちの集まりであり空ではない。S の部分集合は「事象，event」と呼ばれる。空事象 $\emptyset$ 及び全事象 S は共に事象である。

B を事象とし n を正の整数とする。$(\mathrm{B}_i)_{i=1}^{n}$ が B に対する分割であるとは，

$$\mathrm{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}_i, i \neq j \Rightarrow \mathrm{B}_i \cap \mathrm{B}_j = \emptyset,$$

のことである。分割は任意有限個の空事象を項として含み得る。例えば，（B, C）を A に対する分割とすると，例えば（B, $\emptyset$, C, $\emptyset$, $\emptyset$）も A に対する分割である。このような空項を含む分割は，Lebesgue 式近似和の極限で期待値を導入する際に，逆像によって誘導される（定義域上の）分割たちが当然空項を含み得るので，暗黙の内に利用されていると言って良い。

行為 f は，S から「結果」の全体 Csq への写像である。f が有限個の値しか取らない場合，これを初等的と形容する。つまり，f が初等的とは，S の f による像が有限集合であることである。

$(B_i)_{i=1}^{n}$をSに対する分割とし，$(c_i)_{i=1}^{n}$を「結果」の列とする。すると，B_i上で「結果」c_iのみを値として取る行為は，初等的である。

5．確率

Bruno de Finetti の主観主義をサヴェジ氏は強く支持している。主観主義の立場とは，行為者としての「個」から分離された客体としての「確率」，つまり「真の」確率の存在を認めない立場であり，結局，「絶対的な」確率を拒否する立場である。この立場は，個体差が確率に影響することを容認する。つまり，同じ状況，同じ証拠，同じ「このみ」を持つ「異なる」個人が，同じ事象に対して，「異なる」確率を保持することを拒否しないのである。ここで注意すべきなのは，主観主義における「個」とは，「合理」的であるということである。主観主義における合理性とは，個体差を容認するのである。

若き日の de Finetti は，「Dutch book 排除の原則」を導入して，この「個」の合理性をとらえようとした。後年彼は，マネー（money）の効用関数を表に出していない（若き日の）自身の流儀を棄て去ることとなるが，サヴェジ氏は，若き日の de Finetti の枠組みを，一貫して高く評価している。「その雨が降れば，この百円を謹呈する」という（信用できる）「くじ」に，73 円まで出す覚悟がある「個」は，「その雨」の確率を 0.73 と判断しているのである。この「かけ率」による接近は，あくまでも近似的ではあるが，確率の本質に関っている。つまり確率とはきわめて日常的な「もの」であり，それは「個」のオピニオンである。

例えば火山の専門家を想定してみよう。彼は火山の噴火などの火山活動を調査し研究している。しかし，人の尺度からすれば地質学的尺度は巨大である。頻度論的に（「特定の」火山の）噴火の「確率」を見積ることは，頻度論的接近に忠実である限りにおいて，極めて困難である。しかし彼は，個人的な確率，即ち personal probability を，保持しているはずである。我我ができる最善に近いことは，この火山学者が，堂堂と，「これは私のオピニオンだが」とことわりつつ，自身の個人的確率を公表し得る雰囲気及び環境を整えることであろう。そのためには，本来の「確率」とはいかなるものかを，教育の場で「おしえる」ことが必須である。「データが少ないので確率はわからない」などという言い回しは，結局は探求者本人の貴重な「経験」を死蔵する実に「恐ろしい」表現である。

Bruno de Finetti の流儀を深く研究したサヴェジ氏は，結局次のように確率をとらえる。「「あなた」が選んだ「その」卵が食えるのならば 100 円を謹呈する」という（信用できる）「くじ」があるとして，「その白」よりも「その茶」の方を選ぶのならば，自身にとって，「その白」よりも「その茶」の方が，「食える」事に関して，「より確からしい」と（自身は）判断していると，（少なくとも自身は）みなすとする。しかし，無差別性の問題があるので，サヴェジ氏は，「事象 B は事象 C よりも確からしい，にはあらず」という間接的な接近を図ることとなる。つまり，$B \leq C$ という二項関係$\leq$を導入する。この場合，$B < C$ とは$\neg C \leq B$ のことであり，$<$は，このままでは，positive な意味は持っていない。

ここで用心すべきなのは「等確率」の非自明性である。B と C とが無差別，つまり $B \doteq C$ とは，定義上は，$B \leq C \wedge C \leq B$ だが，その内容は自明ではない。例えば，なぜか「うら」と「おもて」との区別はつくが，「絶対的に歪んでいない」一枚のコインの「存在」と，その「投げ上げ」を持ち出して，異なるが等確率の

事象たちの存在を主張するとしよう。すると，当然のことだが，このような「コイン」の存在を仮定することは，結局の所，ある種の（自明でない）事象たちの「たしからしさ」が定量化できることを仮定することと，実質的に同じなのではないのかという疑念が，提示できる。「たしからしさ」が実数値として量化できることは少しも自明ではないので，いわば潜在的定量化仮説へのこの疑念は正当であり，真剣に対処しなければならない。

6．P 6′

第六公準P 6の前任者であるP 6′を，サヴェジ氏は苦心して「発見」する。即ち，

「B及びCを任意の事象とし，B<Cとせよ。すると「世界」に対するある分割が存在して，その分割の各項Dに対して，B∪D<C。」

がP 6′である。コインの投げ上げに関する「世界」の分割を考えれば，この公準はもっともらしいであろう。

しかし，この公準を，何らかの「連続性」に関ると見なしてしまうと誤解が生じやすい。実際，Banach limit を利用することによって，有限加法性を満たすが完全加法性は満たさない，自明ではない（しかも興味を引く），P 6′をみたす「確率」が容易に定義できる。

サヴェジ氏は，Bruno de Finetti の思索を継承して，Kolmogorov system における完全加法性を，「公理」ではなく，有用な「仮説」と見なしており，この「仮説」を満たさない「確率」が，常に「不合理」とは言い切れないと判断している。

このP 6′と従属選択の原理とを利用して，サヴェジ氏は，次の等分割補題を導く。

「Aを任意の事象とせよ。Aに対する分割（B，C）で，BとCとが無差別であるものが存在する。」

この等分割補題に基づいて，サヴェジ氏は，定性的確率≤を表現する定量的確率の存在を導く。この「確率」は，定量的に精密とでも呼ぶべき性質を持っているのだが，結局潜在的定量化仮説を導入する必要はなくなり，しかも「個」を指定すれば，「確率」は一意的に定まる。

この「確率」は有限加法性をみたし，また条件つき確率の定義の「合理性」が基礎づけられる。さらには，乗法法則及びベイズ・ルールが導出される。

7．P 7など

P 1からP 6までにより，初等的行為に対する von Neumann−Morgenstern 効用の存在が示されるが，第七公準P 7の導入により，一般的行為に対する効用関数の存在が従う。

だが，このP 7はサヴェジ氏の創出であり，「商量の原理，the sure−thing principle」に基づくものではない。また，このP 7を利用することにより，効用関数の有界性が従い，St. Petersburg paradox が生じないこととなる。なお副産物として，期待効用最大化の原理が従う。

統計学においてしばしば言及される自乗損失は，「上に有界」ではない。つまり，損失の根拠である効用が有界ではない。結局，期待効用最大化の原理を尊重する限り，St. Petersburg paradox が不可避である。やはり自乗損失には問題があると言って良いのではなかろうか。自乗損失に執着すると，common sense に反する規準にぶつかるかもしれない。

8．「1」に関する注意など

Kolmogorov system では公理の一つとして，$P(\Omega)=1$ が掲示される。数学の一分野と

して確率論を展開するのならば，この天下り式仮定は別に問題とはならない。ここでの「1」とは，実数体（さらには複素数体）の乗法単位元である。だが，統計学における「確率」とは「たしからしさ」であり，それは「ふたしか」に関るものであり，この「ふたしか」そのものは，空間，点，図形，数（すう），量，長さ，次元，といった数学の対象では（通常は）ない。この事物論理における「ふたしか」が，純論理における「1」に結びつく必然性はない。そこで統計家は，$\mathbf{P}(\Omega)=1$ を，何らかの合理的な根拠に基づいて導出する暗黙の責務を負う。この証明されるべき等式は，例えば，「Dutch book 排除の原則」から従うのだが，そこでの「1」は，もはや純論理での「1」ではなく，事物論理的基盤を持つ「1」である。

なお，通常の確率論では，ある種の完全加法的測度を「確率」と呼ぶとしているのみで，「確率」そのものは無定義である。J. Neyman, E. S. Pearson, A. Wald, E. L. Lehmann，といった名前から連想される領域を数理統計学と呼べば，そこでの「確率」とは，正にこの無定義概念としての「確率」であり，そのままでは事物論理との関りは不明である。しかし現実の作業から第一に要請されるのは，正にこの「定義」なのである。例えば，特定の検定統計量の値が特定の棄却域に入る「たしからしさ」とは，結局いかにして「定義」されるのであろうか。数理統計学は，このような基本的問に対して，なぜか沈黙するのである。

さらには，「変量」の「特定の具体的値」による置き換えを，この独特の領域は遂行する。その際，「実現値，realized value」という「ことば」が発明されて，「その変量をその実現値によって置き換える」などと言われたりする。しかし，このような「直接的置き換え」は，数学的に正当化されるものではない。数学的には，例えば事象「$\mathbf{X}=\mathbf{x}$」が与えられているという「条件つき」での，（条件つきの）「確率」及び「期待値」が，考察されるべきである。

9．よくある錯誤

「通用する確率がかなり小さい事象が現に起こったとするよりは，この仮説を棄却するべきだ。」との趣旨の発言が良くなされるが，このような「論法」には問題がある。問題となっている「事象」の生起が観察される「まえ」に算出された（「その」事象の）確率が，その事象が実際に起こったという「事実」と，どのように関るかは少しも自明ではない。但し，「まえ」の確率が「0」であるのならば，そこで現実にこの「0」が通用すれば，検定仮説は当然棄却される。だが，問題の確率が，例えば 10^{-16} であっても，実際に通用すれば，ただ「起こった」という事実のみがもたらされるのみである。「あと」と「まえ」とを結びつける logic が明晰に規定されない限り，この種の「論法」の合理的基盤は不明である。宝くじで大当たりを取った場合，抽選の過程になんらかの不正が（ほぼ確実に）あったと判断するよりは，ただ単に lucky だったとする方が common sense に合致するであろう。「証拠」を得た「あと」と，まだ得ていない「まえ」の状況とは，混同されてはならないのである。

補遺：2014 年 9 月 10 日に同志社大学今出川キャンパス（京都）にて，日本心理学会の場で，筆者は短い講演を行った。また，同年 11 月 19 日には統計数理研究所（立川，東京）にて，やはり短い講演を行った。上の短文はそれらの講演に関るものである。なお，両講演に際しては，特に吉野諒三教授（統計数理研究所）に御尽力を頂いた。他に，繁桝算男，川崎能典，両先生より有益な刺激を受けた。ここに感謝の意を記させていただく。

2015 年 2 月 7 日（土）札幌の北大キャンパスにて

参考文献

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics, Second Revised Edition*, Dover, New York, 1972. サヴェジ氏の「基礎論」である。なお，初版は 1954 年に John Wiley & Sons, New York, より出ている。サヴェジ氏は，1917 年 11 月 20 日に生まれ 1971 年 11 月 1 日に急逝しているので，第二版は死後である。「基礎論」は二つの序文と第 1 章から第 6 章までをとにかく通読するのが良いと思う。その際，第 3 章第 7 節と第 5 章第 5 節を読み飛ばさないようにするのが得策である。なお第 4 章は必ず熟読すべきである。「基礎論」は統計学の基礎への偉大な貢献だが，副産物として，個人的期待効用の最大化原理をもたらすので，経済学にも関りがある。経済及び統計に関る古典である。

Savage, Leonard Jimmie, *The Writings of Leonard Jimmie Savage—A Memorial Selection—*, The American Statistical Association, 1981. サヴェジ氏の「論文集」である。この 508 頁から 513 頁にかけて，“Difficulties in the theory of personal probability”, *Philosophy of Science*, 34, 305－310, 1967 a, が収められている。また，同論文集の 514 頁から 528 頁にかけて，“Implications of personal probability for induction”, *The Journal of Philosophy*, 64, 593－607, 1967 b, が収められている。この“b”は，帰納法へのサヴェジ氏の見解を知るためには必読であり，深く非凡な思索である。

園 信太郎，『確率概念の近傍—ベイズ統計学の基礎をなす確率概念—』，内田老鶴圃，2014 年 5 月。ぜひとも学生に通読してもらいたい確率算の基礎である。