経済学研究 53−4
北海道大学 2004. 3

保険会社のデフォルトと企業年金保険の価格

鈴 木 輝 好

1．はじめに

我が国における年金制度では厚生年金基金および適格退職年金，確定給付年金の 3 つを合わせて企業年金と呼び，企業年金の運営母体を年金基金と呼んでいる。年金基金は年金給付の設計を行うとともに積立金の大部分を生命保険会社あるいは信託銀行に委託することで運用している。そして，この年金基金のアセット・ミックスのうち生命保険会社による運用分は特に1990 年代前半までは安全資産と同等であると考えられていた。保険会社は政令に記載された保証利率を守る運用を続けており，年金基金向けの運用利回りは政策的にさらにそれを上回っていたためである。また，保険会社による年金商品（以下，企業年金保険と呼ぶ）にはいつでも契約を額面価格で解約できるというオプションが形式的には無償で与えられていた。保険会社にデフォルトリスクが無い限り，利率と解約時の額面が保証されていれば企業年金保険を安全資産と考えるのは合理的である。結局，企業年金保険は額面価格で解約できるというオプション性を持っているにも関わらず，明示的にはオプション料を支払っていないことや保険会社のデフォルトリスクが認識されていなかったことが原因で重要な問題とはなっていなかった。

しかし，最近になって企業年金保険の持つオプション性とデフォルトリスクは双方が顕在化しており，オプション性についてはさらに複雑化している。これは，1990 年中ごろからの資産運用の不振に伴い幾つかの生命保険会社が破綻したことおよび生命保険会社が新しく成果配当型商品や解約の際には違約金を伴う商品を増やし始めたことが原因である。本稿の目的はオプション性とデフォルトリスクを考慮した企業年金保険の価格を導出することである。

2003 年 3 月末時点では，企業年金の資産残高 79 兆 43 億円のうち約 24% を生命保険会社が受託しており問題の重要性は減っていない。それにも関わらずこの問題に関する研究はあまり多くはない。既存研究では，湯前（1996）が数値計算を利用して企業年金保険の価格について分析した。また，小林・池田・長谷川(2003)は個人向け変額年金保険の持つオプション性を精査に吟味し，その価格を導出するフレームワークを示した。本稿とこれらの研究との主な違いは保険会社のデフォルトを考慮に入れている点である[1)]。

ところで，80 年代以降信託銀行との熾烈なシェア獲得競争を行ってきた保険会社にとって基金の解約行動は重大な関心事である。保険会社の信用力や保証利率の変化が基金の最適解約行動に与える影響を分析するためには価格式は解析解であることが望ましい。したがって，本稿では，デフォルトリスクを考慮した企業年金保険のプレミアムを解析的に導出する。そのために 2 つの仮定を置いた。第一には，商品の持つオプション性のうち重要な部分に焦点をあてるとともに契約には満期が無いと仮定した。

1）年金運用のあり方については多くの研究がある。例えば浅野（1996）は年金給付を企業債務の一部と考え年金運用のあり方を企業財務とアセットアロケーションの視点から議論している。

実際に多くの企業年金保険は無期限契約である。第二に，生命保険会社の資産運用に関して定常性を仮定した。生命保険会社は債券運用においてバイ・アンド・ホールド戦略あるいはデュレーションを一定に保つような戦略を取ることが多いためである。

さて，デフォルトリスクのあるオプションに関する代表的な研究にはJohnson and Stulz (1987)およびHull and White(1993)がある。ある企業が別の企業の資産価格を参照するオプションを発行した場合を考え，オプション発行企業にオプションペイオフを履行するだけの資産が残っていないリスク（デフォルトリスク）を考慮した。デフォルトリスクについてはMerton (1974)による構造モデルを用いている。本稿で扱う企業年金は保険会社の自社資産の一部を参照するのでこれらのモデルは適用しにくい。そこで本稿では，オプション発行者（生命保険会社）のデフォルトリスクに関して外生モデルであるJarrow and Turnbull(1995)を採用した。

以上の想定の下で，本稿は保険会社のデフォルトを考慮した企業年金保険の価格に関する解析解の導出に成功した。本稿の構成は次の通りである。第2節において，企業年金の持つオプション性を明らかにし，デフォルトリスクを考慮した企業年金保険の価格を導出する。第3節においては，数値例とともに企業年金保険と保険会社のデフォルトの関係について述べる。第4節では，結論および今後の課題について述べる。

2．企業年金保険と価格モデル

2．1　企業年金保険

保険商品はその負債特性にあわせて一般勘定資産あるいは特別勘定資産のどちらかで運用されている。例えば伝統的個人保険など安全志向を要する商品であれば一般勘定資産により，また変額年金保険などハイリスク商品であれば特別勘定資産により運用されている。一般勘定資産は，保険会社の資産の大部分を占めていることが多く，また特別勘定資産が顧客ごとに分離して管理されているのとは対照的に一体的に管理・運用されている。企業年金保険については，一般勘定で運用される商品もあれば特別勘定で運用される商品もあり，年金基金はリスク許容度に応じてどちらかを選択することになる。このうち相対的に残高の多い傾向がある一般勘定資産で運用されている企業年金保険は，次のような特徴のいくつかを併せ持つことが多い。

- 最低利率保証：運用成果にかかわらずある一定の利息を保険会社が保証する仕組み。
- 特別配当：契約の消滅時に株式の含み益などを原資として支払われる利益還元を目的とした仕組み。もともと個人保険の仕組みだが企業年金にも同様の仕組みがある。
- 解約控除付き額面保証：年金基金（委託者）により解約の申し出があった場合，事前に決められた額面とその時点における委託者のファンド持分価格との差額の一定割合等を，委託者が違約金として支払う仕組み。いつでも解約できる。
- 成果配当：決算時点においてある程度の運用成果がある場合，その成果に応じて収益が委託者に配分される仕組み。

以下では，最低利率保証，特別配当，解約控除付き額面保証の3つの仕組みを持ち一般勘定資産で運用されている企業年金保険の価格付けを行う。

2．2　モデル

まず，一般勘定資産および市場に関する仮定を示す。本稿を通じて，市場は完備で裁定機会は存在しないと仮定する。すなわち，唯一つのリスク中立測度Pが存在することを仮定する。また無リスク金利rは一定であるとする。いま$\{B(t);0\leq t\}$を確率空間$(\Omega,\mathcal{F},P)$上の標準1次元ブラウン運動とし，また$\{\mathcal{F}_t;0\leq t\}$は$\{B(s);s\leq t\}$により生成された加算加法族

とする。このとき，一般勘定資産$X(t)$は確率測度Pの下で確率過程

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = rdt + \sigma dB(t), t > 0 \qquad (1)$$

に従うとする[2]。ただし$X(0)=x$である。さらに，生命保険会社のデフォルト時刻を確率変数τで表し，τは$B(t)$とは独立で平均$1/h$の指数分布に従うと仮定する。これはJarrow and Turnbull (1995)の特別な場合に相当し，標準的な条件の下で企業年金保険はリスク中立測度Pの下で評価することが可能である。ただし，企業年金保険のデフォルト時点における損失率をL_sとする。

次にペイオフをモデル化する。企業年金保険には満期が無くまたいつでも解約できるとする。ただし，解約の際には解約控除金あるいは特別配当が生じるとする。すなわち，$X(t)<F$における解約では，基金は解約控除率をα，額面をFとした場合，解約控除金$\alpha(F-X(t))$を支払い額面Fの保証を受けるものとする。このとき解約時点における基金のペイオフは

$$(1-\alpha)F+\alpha X(t),\quad X \leq F$$

である。また$X(t)>F$における解約では，基金は配当率をβとして特別配当を受け取ることができるとする。このとき解約時点における基金のペイオフは

$$(1-\beta)F+\beta X(t),\quad X > F$$

である。ここで配当率βは一般勘定資産における株式等のエクイティ資産の割合と考えてよい。結局，基金の自発的な解約に関するペイオフは

$$\begin{cases} (1-\alpha)F+\alpha X(t), X(t) \leq F \\ (1-\beta)F+\beta X(t), X(t) > F \end{cases} \qquad (2)$$

となる。ただしペイオフ関数の凸性[3]を保証するために

$$\alpha<\beta \qquad (3)$$

を仮定する。さいごに，最低保証利率をCとし基金は保険会社がデフォルトするかまたは契約を解除するまでの間，連続的にこれを受け取るとする。このとき利子Cは一般勘定資産から控除することなく会社資本から賄うとする。会社はその代わりに特別配当実施後に存在する一般勘定資産を資本化する権利を持つ。このようなモデル化は企業年金保険のデフォルトモデルを外生化したことと整合的である。

これらの他に保険会社のデフォルト時のペイオフがある。特別配当実施時のペイオフから基金の本質的な持分は$\beta X(t)+(1-\beta)F$と考えることができる。よってデフォルト時のペイオフを

$$(1-L_s)(\beta X(\tau)+(1-\beta)F), \quad X(\tau)>0, L_s>0 \qquad (4)$$

とする。

ここで，後に格付けに応じた保証利率の設定を議論するために限界保証利率

$$C^* = (1-\beta)F(r-hL_s)+\beta L_s F(r-h) \qquad (5)$$

を定義しておく。第1項は，一般勘定資産のうち債券運用から得られる利息に相当する。また第2項は，デフォルトにより基金が損失する額面を保険会社に預けていると仮定した場合の利息に相当する。そして保証利率について次

2）一般勘定資産のうち何割かは満期のある債券で運用されている。ただし生命保険会社の債券運用では，十分な時間が経過するとラダー型ポートフォリオが構成されるバイ・アンド・ホールド戦略，あるいはデュレーションを一定に保つような戦略が取られることが多い。どちらの場合もボラティリティは一定であると考えることができる。

3）オプションペイオフは権利保有者にとってxの凸関数である。この性質の一般性を調べたものにKijima (2002)がある。

の仮定

$$C \leq C^* \tag{6}$$

をおく。

さて，このような企業年金保険における最適な解約行動について考えよう。まず $X(t) < F$ では，基金は額面保証のオプションを持っている。いま，このオプションの行使時刻を τ_L とする。企業年金保険の価格がある程度下がったら，解約控除金を支払い額面保証の利益を受ける。次に特別配当について考える。仮に保険会社にデフォルトが無いとすれば，特別配当による利得 $(\beta X(t)+(1-\beta)F)$ は実現させせずにそのまま預けておけば良い。しかし，正のデフォルトロス $(L_s > 0)$ を考慮に入れると，ある程度一般勘定資産の価格が上昇した時には契約を解約した方が良い。デフォルトによる損失を被る前に特別配当の利益を確定させるのである。このオプションの行使時刻を τ_U とする[4]。以上から，デフォルトリスクのある企業年金保険のペイオフは，どちらか一方が行使可能でともに早期可能性のあるアメリカン・プットとアメリカン・コールの組み合わせとしてモデル化できることが分かった。したがって，企業年金保険の時刻 0 における価格は自由境界問題の解

$$\begin{aligned} W(x) = \max_{\tau_L,\tau_U} E \Big[& \\ & 1_{\{\tau_L<\tau_U,\tau_L<\tau\}}\left\{(1-\alpha)F+\alpha X\left(\tau_L\right)\right\}e^{-r\tau_L} \\ & +1_{\{\tau_U<\tau_L,\tau_U<\tau\}}\left\{(1-\beta)F+\beta X\left(\tau_U\right)\right\}e^{-r\tau_U} \\ & +1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}(1-L)\left\{(1-\beta)F+\beta X(\tau)\right\}e^{-r\tau} \\ & +\int_0^{\tau_U\wedge\tau_L\wedge\tau} Ce^{-ru}du \,|\, X(0)=x \Big] \end{aligned} \tag{7}$$

として表すことができる。

ここで，企業年金保険はいつでも解約でき特定の満期を持たないこと，また一般勘定資産が確率測度 P の下で定常な確率過程(1)に従うこと，さらにはデフォルト時刻 τ が無記憶性を特徴とする指数分布に従うことから[5]，最適停止時刻を与える τ_U，τ_L は一定の閾値 U, L を用いて

$$\tau_U = \inf\{t : X(t) = U \,|\, X(0) = x\}$$
$$\tau_L = \inf\{t : X(t) = L \,|\, X(0) = x\}$$

のように表現できる[6]。したがって式(8)は

$$\begin{aligned} W(x) = \max_{L,U} E \Big[& \\ & 1_{\{\tau_L<\tau_U,\tau_L<\tau\}}\{(1-\alpha)F+\alpha L\}e^{-r\tau_L} \\ & +1_{\{\tau_U<\tau_L,\tau_U<\tau\}}\{(1-\beta)F+\beta U\}e^{-r\tau_U} \\ & +1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}(1-L)\{(1-\beta)F+\beta X(\tau)\}e^{-r\tau} \\ & +\int_0^{\tau_U\wedge\tau_L\wedge\tau} Ce^{-ru}du \,|\, X(0)=x \Big] \end{aligned} \tag{8}$$

に書き換えることができる。以下では最適解約戦略を与える直線 $x=U$ および $x=L$ を最適行使境界と呼ぶ（図 1 参照)。

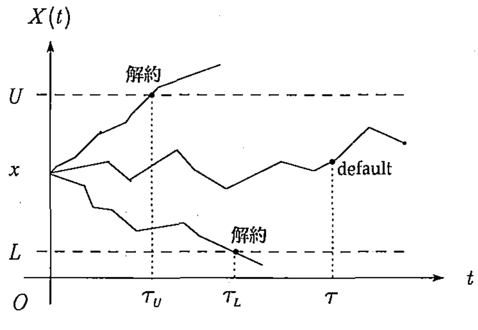


図 1 最適行使境界 U, L とデフォルト

4) Johnson and Stulz (1987) はオプション発行者にデフォルトリスクがある場合にはアメリカンコールオプションでも早期行使される可能性があることを示した。

5) 指数分布の無記憶性 (memoryless property) と社債価格の関係については Kijima (2003) を見よ。

6) このような最適戦略は Merton (1973) における永久アメリカンオプションの保有者および Leland (1994) における永久債の発行者と同様である。

結局，式(8)を解くことにより，企業年金保険の価格に関する次の命題を得る。ただし，初到達時刻 τ_U，τ_L に関するラプラス変換として次の関数

$$f_1(x) = E\left[e^{-(r+h)\tau_U} | X(0) = x > U\right],$$
$$f_2(x) = E\left[e^{-(r+h)\tau_U} | X(0) = x < U\right],$$
$$f_u(x) = E\left[1_{\{\tau_U < \tau_L\}} e^{-(r+h)\tau_U} | X(0) = x, L < x < U\right],$$
$$f_l(x) = E\left[1_{\{\tau_L < \tau_U\}} e^{-(r+h)\tau_L} | X(0) = x, L < x < U\right]$$

を定義しておく。定理 2 および定理 3（ともに付録参照）から各関数は

$$f_1(x) = \left(\frac{x}{U}\right)^{\lambda_1},\ f_2(x) = \left(\frac{x}{U}\right)^{\lambda_2},\quad l_1 = \left(\frac{L}{U}\right)^{\lambda_1},\ l_2 = \left(\frac{L}{U}\right)^{\lambda_2}, \tag{9}$$

$$f_u(x) = \frac{l_2 f_1(x) - l_1 f_2(x)}{l_2 - l_1},\quad f_l(x) = \frac{f_2(x) - f_1(x)}{l_2 - l_1} \tag{10}$$

により与えられ，λ_1，λ_2 は式

$$\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\lambda - (r+h) = 0,\quad \lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0 \tag{11}$$

を満たす。

命題 1　一般勘定資産の価格 $X(t)$ は式(1)に従い $X(0)=x$ とする。また生命保険会社のデフォルト時刻 τ は平均 $1/h$ の指数分布に従うと仮定する。このとき保証利率を C，解約控除率を α，特別配当の配当率を β，額面を F とし，また解約時のペイオフを式(2)，デフォルト時のペイオフを式(4)とする企業年金保険の価格は

$$W(x) = H(x) + f_l(x)(W_l - H(L)) + f_u(x)(W_u - H(U)) \tag{12}$$

により与えられる。ただし

$$H(x) = \beta(1 - L_s)x + (1-\beta)(1 - L_s)\frac{hF}{r+h} + \frac{c}{r+h}, \tag{13}$$

$$W_l = (1-\alpha)F + \alpha L,\quad W_u = (1-\beta)F + \beta U,\ L < x < U \tag{14}$$

とし，L, U は smooth pasting condition

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=L} = \alpha,\ \left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=U} = \beta \tag{15}$$

を満たす。

証明：付録参照

関数 $f_u(x)$ は保険会社がデフォルトする前に $X(t)$ がはじめて最適行使境界 U に達したときに額 1 を支払う証券の価格を意味する。$f_l(x)$ も同様である。このことから，価格式(12)の第 1 項 $H(x)$ は企業年金の本質的な持分を表し，また第 2 項は解約控除付き額面保証の権利行使価値と本質的持分の消失，第 3 項は特別配当を受け取る権利の行使価値と本質的持分の消失を表していることが分かる。ここで式(13)を見ると，本質的持分 $H(x)$ は特別配当の利益およびデフォルト時に回収できる額面の価値，永久利率保証の価値の 3 項から構成されていることを確認できる。図 2 には，適当なパラメータ設定の下で企業年金保険の価格を初期資産 x に関して描いた。$x=L$, U において smooth pasting condition(15)が満たされる。

3．企業年金保険とデフォルトリスク

3．1　解約行動とデフォルトリスク

ここでは基金の解約行動とデフォルトリスクの関係を述べる。まずは，企業年金保険の価格をデフォルト率 h，損失率 L_s に関して描いたものが図 3 である。黒点で示した価格はそれぞれ表 1 に示した格付け別デフォルト率を参照値としている。企業年金価格はデフォルトリ

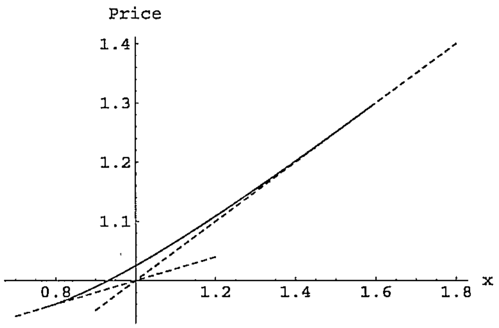


図 2 企業年金の価格

点線は直線 $\{\alpha x+(1-\alpha)F\}$ および $\{\beta x+(1-\beta)F\}$ を表す。最適行使境界は $U=1.59043$, $L=0.765507$。使用したパラメータは次の通り。$\alpha=0.2$, $\beta=0.5$, $h=0.001$, $F=1.0$, $r=0.01$, $L_s=0.8$, $C=0.005$, $\sigma=0.1$

スクの影響を受け難いことが分かる。さらに，行使境界 U, L をデフォルト率 h および損失率 L_s について描いたものが図 4 である。上下どちらの行使境界も h が低い場合に h からの影響を受けやすい。また，特別配当を獲得のための権利行使境界 U はデフォルト率 h および損失率 L_s によって大きく変わる。とくに h が低く格付けの高い保険会社の場合には注意が必要である。

図 4 から結局，企業年金保険の価格がデフォルトリスクからの影響を受けにくいという結果は，最適行使戦略が L_s, h の値によって大きく変化することが原因であると考えられる。生命保険会社のデフォルトリスクの上昇は企業年金保険の価格を大きく下げることはない。しかし解約行動を加速させる。

表 1 格付け別デフォルト率 h

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
h	0.00019	0.00037	0.00084	0.0029	0.0081	0.015	0.027

「格付けとデフォルトの関係 2002年」スタンダード＆プアーズ（2003年 1 月）における 15 年累積デフォルト率（事業会社）より算出。

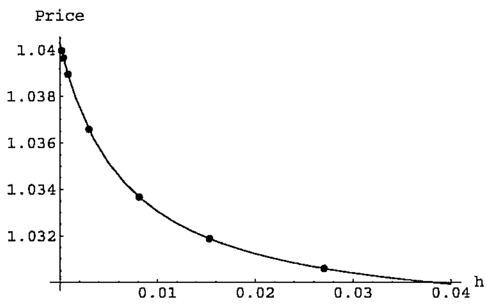
3．2 運用フィーとデフォルトリスク

ここでは，運用フィーと保証利率のデフォルトリスクとの関係について考察する。ただし，デフォルトリスク（格付け）の違う保険会社間での商品の比較を行うために，保証利率を格付けに応じて決まる限界保証利率 C^* と仮定する。式(5)から分かるように限界保証利率は格付けが低いほど高い。また，このとき簡単な計算から

$$H(F)=F$$

が成立し $x=F$ のときは，格付けによらず契約当初における基金の本質的持分は額面 F に等しくなる。以下では，$x=F$ として，基金は契約当初に額面 F を払い込むとする。また企業年金保険価格 $W(F)$ と払い込み価格の差額

$$W(F)-H(F)=W(F)-F$$



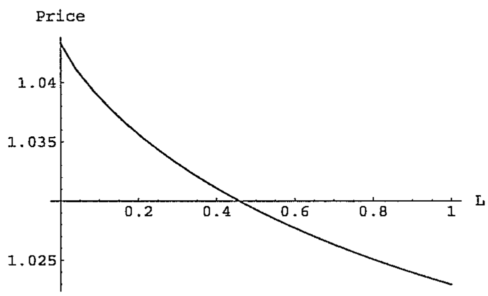


図 3 企業年金価格とデフォルトリスク

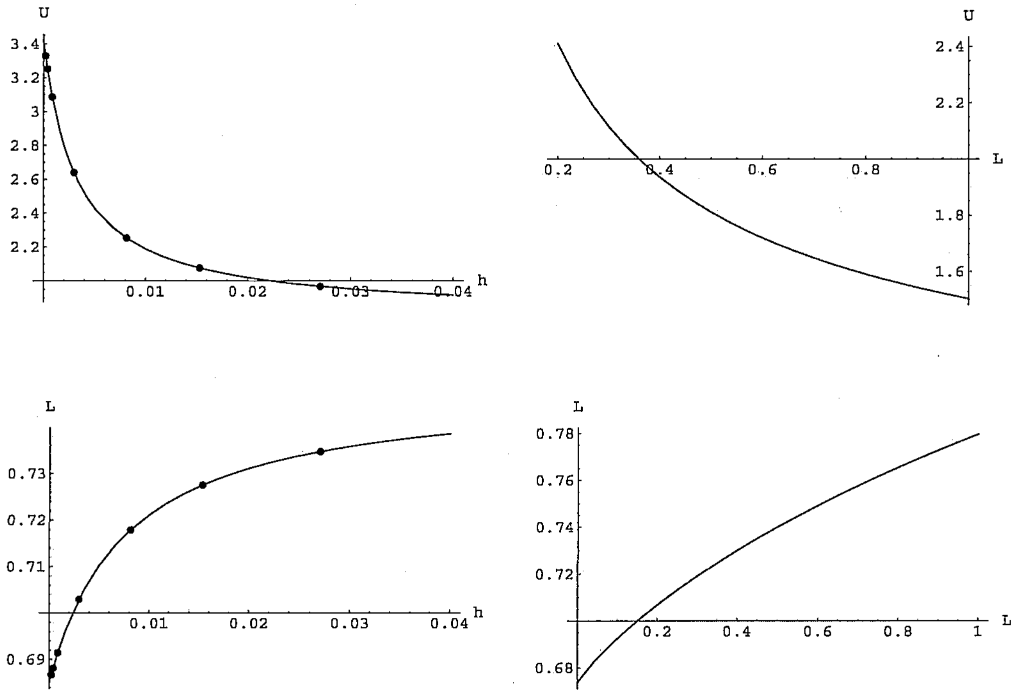


図 4　権利行使境界とデフォルトリスク

図 3，図 4 ともに使用したパラメータは次の通り。r=0.01, L=0.1, C=0.005, σ=0.1, α=0.2, β=0.5, h=0.001, F=1.0.

を運用フィーの総額と考える。

ところで企業年金保険契約では，運用フィーはアップフロント（一括前払い）ではなく定期的に支払われるのが一般的である。そこで本稿では運用フィーは契約解除時刻$(\tau_U \wedge \tau_L)$まで連続的にδだけ支払われると仮定する。ここで，年金基金にはデフォルトリスクが無いと仮定すると関係式

$$E\left[\int_0^{\tau_U \wedge \tau_L} \delta e^{-rt}\, dt\right] = W(F) - F$$

から運用フィー

$$\delta = \frac{r(W(F) - F)}{1 - E\left[e^{-r(\tau_U \wedge \tau_L)}\right]}$$

が得られる。項$E\left[e^{-r(\tau_U \wedge \tau_L)}\right]$は，一般勘定資産が閾値$U$あるいは$L$のどちらかにはじめて到達した（解約が発生した）ときに額 1 が支払われるアローデブロー証券の価格を意味し，定理 3 において$\theta=r$とすれば得られる。以下ではこの項を「解約 ADP」と呼ぶ。

さて，まずは図 5（左）に企業年金保険の価格$W(F)$をデフォルト率hに対して描いた。ただし黒点は格付け別デフォルト率（表 1）に対応する値を示す。また，同時に図 5（右）には解約 ADP を描いた。前節で示した結果と同様に，格付けごとに適当な保証利率を設定したとしても格付けが低い会社ほど企業年金保険の価格は低くまた解約が起こりやすい。

次に，毎期の運用フィーδを図 6（左）に示した。格付けの低い会社ほど連続的に支払う場合の運用フィーδは高い。結局，格付けの低い会社の企業年金保険では価格が安いことから運用フィーの総額は低いが，契約年数が短くなることから，連続的に支払う場合のフィーδで

は割高となることが分かった。

ここでさらに，基金が受け取るネットの利息，すなわち限界保証利率（図 6 右参照）と運用フィーとの差額について考えてみよう。すると表 2 のような結果が得られた。ネットの受け取り利息は格付けの低い会社からの方が大きい傾向があるものの，投資適格級といわれる AAA 格から BBB 格まででではほぼ横並びであることが分かる。

結局，投資適格級の生命保険会社が扱う企業年金保険では，基金が最適な解約戦略をとる限りにおいてネットの受け取り利息は大きく違わないことが分かった。ただし，前節で示したように，最適解約戦略は格付け（デフォルトリスク）の影響を大きく受けることに注意が必要である。

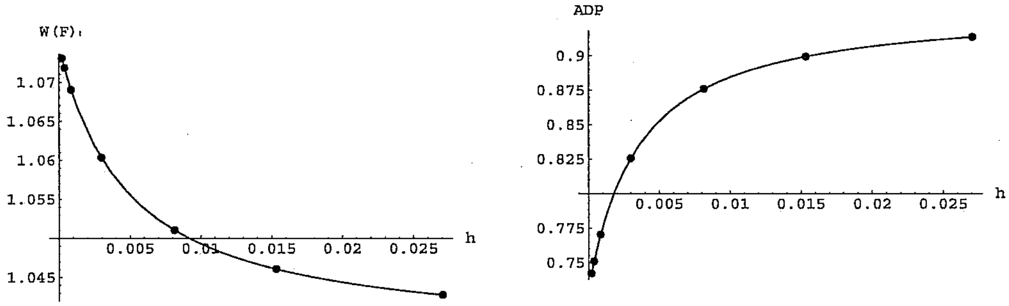


図 5　企業年金価格と解約 ADP

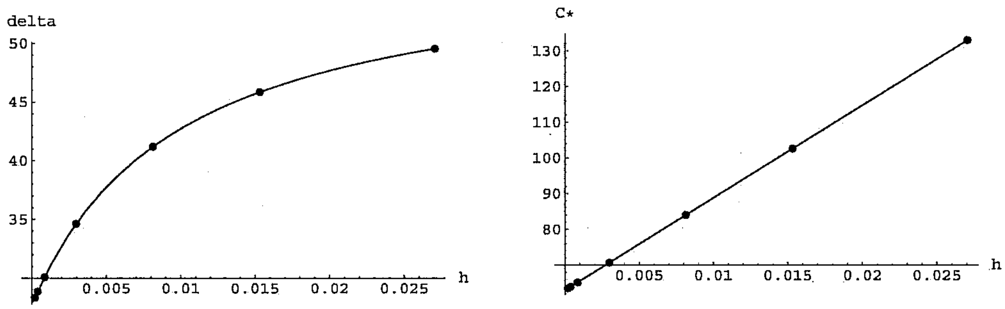


図 6　運用フィーと限界保証利率

図 5，図 6 ともにパラメータの設定は次の通り。$r=0.01$，$L=0.25$，$\sigma=0.1$，$\alpha=0.2$，$\beta=0.5$，$F=1.0$. また表 1 の格付け別デフォルト率に対する値を黒点で示した。

表 2　基金のネット受け取り利息 (bp)

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
$C^*-\delta$	44.4	44.6	45.0	46.4	50.5	62.2	83.4

3．3　特別配当の確保とデフォルトリスク

この節では，保険会社のデフォルトを考慮した場合，特別配当を確保するための解約が重要であることを再度確認する。そこで，企業年金保険の価格が額面 F よりも高い場合には解約行動を行わないことにする。このとき企業年金価格 $W_0(x)$ は

$$W_0(x)=\lim_{U\to\infty}\max_L E\Bigg[1_{\{\tau_L<\tau_U,\tau_L<\tau\}}\{(1-\alpha)F+\alpha L\}e^{-r\tau_L} + 1_{\{\tau_U<\tau_L,\tau_U<\tau\}}\{(1-\beta)F+\beta U\}e^{-r\tau_U} + 1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}(1-L)\{(1-\beta)F+\beta X(\tau)\}e^{-r\tau} + \int_0^{\tau_U\wedge\tau_L\wedge\tau} Ce^{-ru}du\Bigg]$$

$$=H(x)+f_1(x)(W_l-H(L)) \tag{16}$$

により与えられる。ただし

$$L=\frac{\lambda_1}{(1-\lambda)(a-b(1-L_s))} \times\left\{(1-\alpha)F-\frac{c}{r+h}-(1-\beta)(1-L_s)\frac{Fh}{r+h}\right\}$$

であり，$f_1(x)$ は式(9)により，$H(x)$ は式(13)，W_l は式(14)により定義される。

さて，図 7 には命題 1 による企業年金保険の価格 $W(x)$ と式(16)による企業年金保険の価格 $W_0(x)$ を描いた。特別配当を確保するための権利行使を放棄すると企業年金保険の価格は減少する。また，この例では最適行使境界 U を 0.693 から 0.820 に上昇させた。

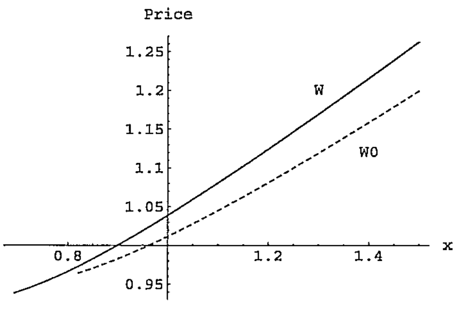


図 7　権利行使の放棄と企業年金価格

(注) 特別配当を確保するための権利行使を考慮した企業年金保険の価格 W は直線 $ax+(1-a)F$ および直線 $bx+(1-b)F$ に high contact する。一方，その権利行使を放棄した価格 W_0 は直線 $ax+(1-a)F$ に high contact し，直線 $(1-L_s)bx+(1-L_s)(1-b)F$ に漸近する。使用したパラメータは $r=0.01$，$L=0.1$，$C=0.005$，$\sigma=0.1$，$\alpha=0.2$，$\beta=0.5$，$h=0.001$，$F=1.0$

ここで，$W_0(x)$ の凸性について確認をする。簡単な計算から

$$\lim_{x\to\infty} W_0(x)=(1-L_s)\beta$$

であるから，価格関数 $W_0(x)$ が凸になるためには仮定(3)よりも厳しい条件

$$\alpha<(1-L_s)\beta \tag{17}$$

が必要である。解約控除率 α は契約により事前に示される。また特別配当率 β は過去の実績から推定が可能である。ところが損失率 L_s は一般に観測・推定ともに難しい。したがって条件(17)は一般には満たされない。結局，特別配当を確保するための権利行使を放棄していると，額面保証契約のオプション性さえもが損なわれる可能性があることが分かった。このとき企業年金保険は，解約のときに違約金を支払う永久利率保証契約でしかなくなる。

4．結論

生命保険会社の一般勘定資産で運用される企業年金保険の価格を保険会社のデフォルトを考慮しながら解析的に導出した。このとき，外生的なデフォルトモデルを採用したことで，一般勘定資産の価値が上昇しているときの最適解約戦略についてモデル化できた。数値例から，企業年金保険の価格はデフォルトの影響を受けにくいが，最適解約戦略はその影響を大きく受けることが分かった。さらに，保険会社が自社のデフォルトリスクに応じた保証利率を設定した場合，運用フィー（オプション料）を控除した基金の毎期のネットの受け取り利息は投資適格級の範囲では格付けによって大きく違わないことが分かった。ただし，このときも最適解約戦略は格付けにより異なることに注意が必要である。また，価格上昇時の解約戦略を捨象すると，価格下落時における額面保証の対価がゼロになる可能性があり企業年金価格を大きく下げることを示した。契約後の期間が長く，特別配当の

価値が高まっている契約に注意が必要である。

本稿には 3 つの課題がある。第一は本稿で得られた解析解を利用し，基金の解約行動に関する比較静学を行うことである。信用力の変化や商品の改定，特に保証利率の変化が解約行動に与える影響は保険会社にとって重要な関心事である。第二は成果配当を考慮に入れることである。成果配当の仕組みを持った企業年金は解約控除とともに今後増える可能性が高い。第三はデフォルト事象と一般勘定資産の価格変動を独立と仮定した点である。一般勘定資産の価格が上昇している場合にはデフォルトリスクは減るはずである。これはデフォルト率を確率過程とすることで解決できる可能性がある。

A　付録

確率変数 $X(t)$ の初到達時刻に関する一般的な定理を示しておく。ただし，$X(t)$ は確率微分方程式

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu dt + \sigma dB(t),\quad t>0 \tag{18}$$

に従うとする。

定理 1　ディンキンの公式から

$$E\left[X(t)e^{-\theta t}\right] - X(0) = (\mu-\theta)\int_0^t X(u)e^{-\theta u}du$$

が成立する。この結果は t が有界な停止時刻の場合においても成立する。

証明　よく知られた結果なので省略する。

定理 2　$x>L$ とし，初到達時刻 τ_L を

$$\tau_L = \inf\{t>0 : X(t) = L \,|\, X(0) = x\}$$

により定義する。このとき任意抽出定理から，任意の θ について

$$E\left[e^{\theta\tau_L}\right] = \left(\frac{x}{L}\right)^{\lambda}$$

が成立する。ただし，$\lambda<0$ は

$$-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\lambda = \theta \tag{19}$$

を満たす。

証明　森村・木島（1991）参照。

定理 3　$U>x>L$ とし，初到達時刻 τ_U を

$$\tau_U = \inf\{t>0 : X(t) = L \,|\, X(0) = x\}$$

により定義する。このとき任意抽出定理から

$$E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L\}}e^{\theta\tau_U}\right] = \frac{l_2\left(\frac{x}{U}\right)^{\lambda_1} - l_1\left(\frac{x}{U}\right)^{\lambda_2}}{l_2 - l_1},$$

$$E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U\}}e^{\theta\tau_L}\right] = \frac{\left(\frac{x}{U}\right)^{\lambda_2} - \left(\frac{x}{U}\right)^{\lambda_1}}{l_2 - l_1},$$

が成立する。ただし，

$$l_1 = \left(\frac{L}{U}\right)^{\lambda_1},\quad l_2 = \left(\frac{L}{U}\right)^{\lambda_2},$$

とし，λ_1，λ_2 は式(19)を満たす。

証明　任意の実数 λ に対して

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \lambda\sigma dB(t)$$

はマルチンゲールであるから，式(18)より

$$V(t) = \left(\frac{X(t)}{x}\right)^{\lambda}\exp\left\{\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right)t\right\}$$

はマルチンゲールである。ここで $\eta = \tau_L \wedge \tau_U$ とすると任意抽出定理が使えて

$$E[V(\eta)] = V(0)$$

が成立する。よって式(19)を満たす λ に対して

$$E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L\}}\left(\frac{U}{x}\right)^{\lambda}e^{\theta\tau_U} + 1_{\{\tau_L<\tau_U\}}\left(\frac{L}{x}\right)^{\lambda}e^{\theta\tau_L}\right] = 1$$

が導かれる。上式は，$\lambda=\lambda_1$，λ_2 を与えた場合 $E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L\}}e^{\theta\tau_U}\right]$，$E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U\}}e^{\theta\tau_L}\right]$ に関する連立方程式となるので，これを解き定理 3 を得る。$X(t)=B(t)$，$L=0$ の結果に関しては Karatzas and Shreve (1988) を参照。

証明（命題 1）：条件付確率の定義から，

$$E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U,\tau_L<\tau\}}e^{-r\tau_L}\right] = E\left[1_{\{\tau_L<\tau_U\}}e^{-(r+h)\tau_L}\right], \quad (20)$$

$$E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L,\tau_U<\tau\}}e^{-r\tau_U}\right] = E\left[1_{\{\tau_U<\tau_L\}}e^{-(r+h)\tau_U}\right]. \quad (21)$$

また，ポアソン分布の性質から

$$E\left[1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}e^{-r\tau}\right] = E\left[\int_0^{\tau_U\wedge\tau_L} he^{-(r+h)t}dt\right] \quad (22)$$

が得られる。式(7)において期待演算の対象となる 4 項のうち第 1 項，第 2 項はそれぞれ関数 $f_u(x)$，$f_l(x)$ の定義および式(20)，(21)から計算できる。また，第 3 項は式(22)を用いて

$$\begin{aligned}&E\left[1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}(1-L)\{(1-\beta)F+\beta X(\tau)e^{-r\tau}\right]\\&=(1-\beta)(1-L)FE\left[1_{\{\tau<\tau_L,\tau<\tau_U\}}e^{-r\tau}\right]\\&\quad+\beta(1-L)hE\left[\int_0^{\tau_U\wedge\tau_L}X(t)e^{-(r+h)t}dt\right]\end{aligned}$$

とした後で定理 1 を適用すれば良い。第 4 項については，$\eta=\tau_U\wedge\tau_L$ として

$$\begin{aligned}E\left[\int_0^{\tau\wedge\eta}Ce^{-ru}du\right]&=E\left[1_{\tau<\eta}\left(\int_0^{\tau}e^{-ru}du\right)\right]\\&\quad+E\left[1_{\eta<\tau}\left(\int_0^{\eta}e^{-ru}du\right)\right]\end{aligned}$$

のようにすれば計算が可能である。以上の 4 項について整理すると式(12)が導かれる。

参考文献

[1] 浅野幸弘（1996），「企業財務からみた年金資産運用」『証券アナリストジャーナル』36(12)，38−51。

[2] 小林孝雄・池田亮一・長谷川洋一郎（2003），「変額年金保険の評価−Valuing Variable Annuities−」『現代ファイナンス』14，23−45。

[3] 森村英典・木島正明（1991），『ファイナンスのための確率過程』日科技連。

[4] 湯前祥二（1996），「準乱数による最低利率保証及び成果配当付き貯蓄商品の価格評価」Jafee 1996 冬季大会予稿集。

[5] Hull, J. and A. White (1995), "The Impact of Default Risk on the Prices of Options and Other Derivative Securities," *Journal of Banking and Finance*, 19, 299 - 322.

[6] Jarrow, R. A. and S. M. Turnbull (1995), "Pricing Derivative on Financial Securities Subject to Credit Risk," *Journal of Finance*, 50, 53 - 86.

[7] Johnson, H. and R. Stulz (1987), "The Pricing of Options with Default Risk," *Journal of Finance*, 42, 267 - 290.

[8] Karatzas, I. and S. E. Shreve (1991), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer.

[9] Kijima, M. (2002), "Monotonicity and Convexity of Option Prices Revisited," *Mathematical Finance*, 12, 411 - 425.

[10] Kijima, M. (2003), *Stochastic Processes with Application to Finance*, Chapman and Hall/CRC.

[11] Leland, H. (1994), "Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure," *Journal of Finance*, 49, 1213 - 1252.

[12] Merton, R. C. (1973), "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 143 - 183.

[13] Merton, R. C. (1974), "On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29, 449 - 470.