北海道大学大学院教育学研究院
教 育 方 法 学 研 究 室
教授学の探究，第30号
2016年1月

小学校幾何教育カリキュラム再構成の構想

高　橋　哲　男
（海星学院高等学校）
佐　藤　敬　行

目次

0　はじめに ……41
1　初等・中等幾何教育プラン作成の方法論 ……41
2　これまで作られてきたプランの紹介と検討 ……44
3　小学校における幾何教育の構想 ……50
4　おわりに ……52

0　はじめに

1970 年、北海道大学教育学部教育方法学研究室は、現在につながる研究の方法論であるいわゆる「70 年構想」を提起した。これを端的に述べるならば次のようになる[1]。

①　現代科学の構造を、“すべての子どもに理解可能な順序”の原理で再構成することが可能であることを仮定する。

②　現代科学の構造を正確に反映した教育内容を、授業過程を含めて客観的な対象とすることが可能であることを仮定する。（授業書等）

③　この授業書は、授業によって検証をうけることが可能であることを仮定する。ただし、この検証は、正確・精密なものであってはならない。

同研究室の数学教育研究グループ（以下「グループ」と略す）は、この方法論のもとでいくつもの幾何教育プランを作成・検証してきた。本稿は、これらのプランを紹介し検討することにより、小学校幾何教育カリキュラム再構成の方向性を探ることを目的とする。

1　初等・中等幾何教育プラン作成の方法論

1－1　佐藤敬行「幾何指導体系の再構成に関する一試論」の中で

グループで最初に作られた幾何教育プランは、佐藤敬行による「相似変換」である。これは、佐藤の修士論文[2]として発表された、いわば幾何教育分野における pilot サーヴェイ的なものである。この論文の目的を以下に引用する[3]。

周知のように現代数学は、それまでの数学の、代数学・幾何学・解析学という強固な分科秩序の破壊の上に成立したが、そのことは幾何教育という領域の設定を否定しない。なぜなら、分科秩序の破壊というのは、公理的な方法の故に数学的対象のすべてを空間と考

1)　教育方法学研究グループ「われわれの研究の将来」（北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第3号、1985 年）121 頁。
2)　佐藤敬行「幾何指導体系の再構成に関する一試論―中学校における相似変換の指導について―」（北海道大学大学院教育学研究科修士学位論文、1977 年、非公刊）。「相似変換」は、中学校 2 年生を指導対象にしたプランである。
3)　前掲佐藤敬行「幾何指導体系の再構成に関する一試論―中学校における相似変換の指導について―」。

えることができるようになったとか、幾何学に代数的方法や解析的方法を用いるようになったというように、それまで孤立的であった諸領域の間に相互連関を見い出すことが可能になったということを意味するのであるから。より具体的に言えば、群という代数系のもとでそれまでの諸幾何学が整理され統一的に把握できるようになった（エルランゲン・プログラム）とか、さらに、線形空間の理論を基礎にユークリッド空間が論じられるようになった（H. Weil）ということである。この線形空間の公理にのったユークリッド空間の展開が現代的な意味での幾何学の認識にとって重要な意味を持つということは、おおかたの一致した意見であろう。

本研究の目的は、そのような公理的展開が可能になるための諸前提を準備する、初等・中等段階での幾何指導体系に関する大まかな構想を提起し、それの検証のための一歩を踏み出すことにある。そのために［中略］幾何指導体系に関する既往研究の批判的検討を行ない、次にこの検討をふまえて新たな指導体系についての大まかな見通しを述べる。なお、そのようなものとして変換群の考えを base にした体系を提起する。

ここでは、初等・中等段階での幾何教育の役割は、ユークリッド空間の公理的展開を可能とするための諸前提を準備することであると述べられている。また、F. クラインの「エルランゲン・プログラム」[4]による変換群の考えを base にするという方針にも、この時点ですでに言及されている。

さらに、本論文は証明論に関して興味深い方針を出している。要約すれば以下のようになろう。

古代ギリシャにおいて初めて成立した論証的科学は、２つの段階に区切ることができる。第一段階は感性的・直観的なものである。たとえばタレスにおける証明は「重ね合わせ」によるものであり、ピュタゴラス学派の初期の証明は小石を並べて算術や幾何学の証明をするいわゆる「小石数学」であった。第二段階はユークリッドの『原論』に見られるような、直観的要素を極力排除し専ら定義や公理のみに基づく純粋に論理的なものである。この第一段階から第二段階への飛躍を動機づけたものは、ギリシャ数学において数から量への転換を誘った、「無理量の発見」「非通約性の発見」であった。無理量の発見と同時に直観的明証に訴える図式的証明の限界を知ったギリシャ人は、エレア派の弁証法的論理の影響を受けつつ数学の対象を純粋に思惟的観念的な存在まで引き上げた。そこではすでに諸定理が直観的に自明であってもそれをそのまま採用することはできなくなった。エレア的論理に対し数学の基礎を確保するために、公準はまさしく「アイテーマタ」（要請）であり、そうすることによってエレア派の論難を切り捨てることができたのである。では初・中等教育段階での論証はどういうものであれば良いのだろうか。少なくとも公理的展開が可能であるとは思われない。かといって一切の論理性を除いて幾何学的事実を示すギリシャ以前でもないだろう。結局ギリシャ初期の直観的明証に訴える図式的証明、この意味での論理性を介した指導が必要と思われる。[5]

そうして「幾何指導体系の骨格」について仮説として以下のように述べている。部分的に引用する。

---

4) F. クライン「エルランゲン・プログラム」（『現代数学の系譜 7』共立出版、1970 年）。
5) この部分は主に、アルパッド.K.サボー著、伊東俊太郎・中村幸四郎・村田全訳『数学のあけぼの―ギリシアの数学と哲学の源流を探る―』（東京図書、1976 年）を参考にして書かれている。

第一段階は、ユークリッド空間の基本概念に関する豊かなイメージを形成する段階で、おおむね小学校の全期間がこれにあてられるであろう。扱われる内容としては少くとも線分の長さ、角の大きさ、平行性は含まれると考えられるが、そのほかにどのようなものが扱われるべきか未だ明らかではない。たとえば、公理に当ることをこの段階で扱うのか、どのように扱うのかは次の段階での合同変換の指導過程との関係で明らかにされるであろう。対称についても同様である。［後略］

第二段階は、タレス的な意味での論理性を介して、クラインの変換群の思想を一定程度実現する段階で、中学校段階がこれにあてられるだろう。ここでは合同変換群と相似変換群が扱われる。合同変換群の指導では、その内部構造の解明として、部分変換である併進・回転・鏡映の相互関係や、合同変換群のもとでの不変な性質として絶対的の距離、角の大きさ、また、図形の合同について扱われる。［中略］相似変換の指導では、相似変換による不変な性質として、線形性、平行性、線分の比を扱い、その中に比例線定理の承認を含める。さらに図形の相似が扱われる。［中略］ピタゴラス［の定理―引用者］や円の指導はクラインの変換群の思想にはなじまないとおもわれる。これらについては、別個に、タレス的意味での論理性を介して指導プランが構想されることになろう。

第三段階では、ベクトル空間の公理系を基礎に公理的方法でユークリッド空間の指導がなされる。高校段階では可能とおもわれる。ここでは、変換群による不変性の探究が幾何学であるというクラインの思想が実現される。

この仮説は、その後の展開によっていくつかの点で変更を余儀なくされた（例えば合同変換群と相似変換群の一部が、小学校段階で実践可能であると示された、など）が、グループでの最初の提起として評価されて良い。

１－２　須田勝彦・久蔵宏幸・岡野勉「授業書「鏡による図形の移動」と授業記録」の中で

前節の佐藤の論文とほぼ同じ方法論を世に問うたのは、須田勝彦・久蔵宏幸・岡野勉「授業書「鏡による図形の移動」と授業記録」[6]であった[7]。そこに書かれている「幾何教育の基本構想」は大要次のようなものであった。

１　初等・中等教育における幾何教育の目標

「ユークリッド空間における図形の基本性質を教えること」に設定する。「論証」や「精神の鍛錬」を目標とはしない。次元は 2 次元または 3 次元が適当である。しかしその指導段階は検討課題である。

２　基本性質の内容

数学論の領域において数学の対象を「量と空間形式」であるとする F.エンゲルスの見解に同意する。解析学や線形代数を用いた指導を可能にするにはどのような準備が必要であるかという視点から、必要と思われる項目を列挙すると以下のようになる。

a)　ユークリッド空間を特徴づける変換群が相似変換群であることから、拡大・縮小、及び相似に関する諸性質。量の領域における倍や比との関連づけ。

6)　須田勝彦・久蔵宏幸・岡野勉「授業書「鏡による図形の移動」と授業記録」（北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第 8 号、1990 年、69-121 頁）。

7)　この時までに、佐藤敬行「相似変換」の他にも須田勝彦「小数とは何か」（北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学研究シリーズ』第 5 号、1978 年）、氏家英夫「面積」（氏家英夫「比較と測度の構成による面積概念の指導過程」（北海道大学大学院教育学研究科修士学位論文、1981 年、非公刊））、須田勝彦「多角形と円」（初出は北海道地区数学教育協議会（以下、道数協と略す）算数プリント編集委員会『新版算数たのしい学習プリント』共同文化社、1986 年）などが作成されている。

b) 相似変換群の最も重要な部分群である合同変換群（等長変換群）を扱うことを可能にする、等長変換の担い手ともいうべき平行四辺形、円などに関する諸性質。

c) 幾何学的諸量の性質を導く鍵となる「面積」および「面積測度」の概念。

d) デカルト座標の導入を意味あるものとする根拠としてのターレスの定理、直交座標系における距離の概念に関わるピタゴラスの定理。

e) このほかに、幾何学の楽しさを演出しうる無限に多くの話題のなかのいくつか。折り紙、二次曲線などの他に、シムソン線やフォイエルバッハの定理など、古典的総合幾何の諸定理もこの素材たりうる。

３　さしあたりの課題

２の内容を整理した上で数学教育のカリキュラムとして構成し、その授業プログラムを実践的に研究していくこと。

この提起から20数年経ったが、d)については、タレスの定理やピタゴラスの定理は「中学校における幾何教育の構想」の範疇には入ると思われるが、そこでの位置付けがどのようなものになるのか未だ明らかではない。e)についても、これらは確かに「初等・中等幾何教育の基本構想」に含まれる可能性があると思われるが、現時点まで実践に耐え得るプランには仕上がっていないし、全体構想のどこにどのように位置付くかも不明である[8]。

１－３　小学校における幾何教育の目標

以上の検討から、筆者らは、初等・中等教育における幾何教育の全体目標をこれまで同様「ユークリッド空間における図形の基本性質を教えること」とする。ただし、「現時点で実現可能（実践可能）な構想」として研究課題を「小学校」に限定することとし、「小学校における幾何教育」の目標を「相似変換群の指導」とする。

２　これまで作られてきたプランの紹介と検討

２－１　佐藤敬行「相似変換」

本プランは中学校２年生を対象として作成され、実験授業も行われた。

0) 拡大図を書こう

1) 相似変換

2) タレスの定理などの応用

3) 図形の相似と三角形の相似条件

の４章で構成されている。

それぞれの章の内容をやや詳しく見よう。

0) 中心拡大の作業（拡大率１未満、負の数を含む）、中心拡大の定義。

1) 中心拡大の定義を相似変換の定義に採用して、用語「相似比」「相似の中心」を定義し、定理１「相似の中心をO、線分ABを相似変換した線分をA'B'とする時、OA'/OA=OB'/OBであればAB//A'B'である」、定理２（タレスの定理―定理１の逆）「相似の中心をO、線分ABを相似変換した線分をA'B'とする時、AB//A'B'であればOA'/OA=OB'/OBである」、

8) 高橋は「中学校幾何教育カリキュラム」に関する９つの単元からなる構想を提起している（高橋哲男「中学校幾何教育カリキュラムの再構成―平面幾何学の公理系について―」（『北海道大学大学院教育学研究科紀要』第84号、2001年、209-233頁）、及び、高橋哲男「中学校幾何教育カリキュラムの再構成―「円の幾何学」単元作成へのノート―」（北海道大学大学院教育学研究科教育方法学研究室『教授学の探究』第19号、2002年、1-23頁）を参照）。しかし、具体的プランが提案・公表されているのはうち３つの単元だけである。

定理 3「相似変換では対応する線分の比は相似比に一致する」の 3 つを、平行線の同位角・錯角、三角形の合同、中点連結定理などを用いて証明。

2) 幾つかの練習問題と、定理 4（比例線定理）「いくつかの平行線に他の 2 直線が交わる時、それぞれの直線が平行線によって切り取られる線分の比は一致する」を、定理 2 を利用して証明。

3) 相似の定義「一方の図形を相似変換することによって他方の図形と合同な図形をつくることができるとき、『2 つの図形は相似である』という」。定理 5（相似な図形の性質）「相似な 2 つの図形では、(1) 対応する線分の比は相似変換の相似比に一致する、(2) 対応する角の大きさはそれぞれ等しい」。

現行の東京書籍の教科書（中 3）[9]の「相似な図形」の章では、まず、「1 つの図形を、形を変えずに一定の割合に拡大、または縮小して得られる図形は、もとの図形と相似であるという」と相似の定義がなされている。次に、方眼紙を使って 3 倍の拡大図を書いてみた後で「相似な図形の性質」として、「相似な図形では、対応する線分の長さの比はすべて等しく、対応する角の大きさはそれぞれ等しい」と結論づける。その後で中心拡大を扱い、「相似の中心」「相似の位置」「相似比」を定義する。そして最後に「三角形の相似条件」に辿り着く。

佐藤のプランは、教科書のこのような扱いに比べれば「よりまし」かもしれないが、所詮同じレベルである。現時点からみるとまことに稚拙な実践であると言わざるを得ない。

なにより、本プランには群の考え方が表に出ていない。一般の相似変換は中心拡大と合同変換の合成であり、相似変換群はその部分群として合同変換群、ホモセティ変換群[10]を持つ。さらに中心拡大の合成は一般的には中心拡大である。このような群の考え方を取り入れたプランが作られるには、今少し時間が必要だったのである。

２－２　須田勝彦「多角形と円」

「多角形と円」[11]は、次節で検討する須田勝彦「いろいろな形」[12]とともに合同変換群（等長変換群）の指導の前提条件を満たすためのものとして位置付く。しかし、発表媒体がともに『学習プリント』であったこと、そして「多角形と円」は 3 年生対象の、「いろいろな形」は 4 年生対象のプランとして掲載されたことによる制約は大きかった。『学習プリント』は、道数協の研究成果を全国に広めるために（より多くの教師たちに活用してもらうために）授業用プリントとして冊子にしたものであり、作成にあたり当時の学習指導要領を考慮せざるを得なかった。筆者らは、道数協のそういった運動方針を批判するものではなく、『学習プリント』の企画を積極的に支持するものである。ただし、グループのプラン作りは、時の学習指導要領に拘束されない、本稿冒頭で紹介した構想のもとで作成されるべきであると考える。

以下、「多角形と円」について検討しよう。『学習プリント』に掲載された３つの版にはそれぞれ微妙に違いがあるが、最新の「21 世紀版」を見ることにする。

(1) このプランは最初の本格的な幾何指導プランに位置付けられている。もちろん全ての教科指導（いや「全ての意図的教育」といってもよいだろう）は、生まれてからこれまでに普段の

9) 藤井斉亮ほか『新しい数学 3』東京書籍、2014 年。
10) 「ホモセティとは、方向を変えない（あるいは、逆にする）変換のことである。いいかえると、ホモセティは直線をそれに平行な直線に移す」（コクセター『幾何学入門』明治図書、1982 年、71 頁）。
11) 須田勝彦「多角形と円」（道数協算数プリント編集委員会『新版算数たのしい学習プリント』共同文化社、1986 年、同『新訂版算数たのしい学習プリント』共同文化社、1992 年、同『21 世紀版算数たのしい学習プリント』共同文化社、2002 年）。
12) 須田勝彦「いろいろな形」（道数協算数プリント編集委員会『新版算数たのしい学習プリント』共同文化社、1986 年、同『新訂版算数たのしい学習プリント』共同文化社、1992 年）。

生活の中で無意識に学習してきた事柄（ヴィゴツキー流にいえば「生活的概念」）をあてにして始めるが、自然科学や数学の指導においては、これらの事柄と「科学的概念」との区別を特に意識しなければならない（例えば凹四角形を「三角形」と考える子どもたちは多い）。

(2)「多角形と円」は、授業用プリントとしては 20 頁を要しており、授業時数は 14 時間を予定している。全体構成は「平面と図形」「点と直線」「角・線分・折れ線」「多角形」「円」「三角形」「四角形」「正多角形」「多面体」の全 9 節からなっている。平面、点、円などの意味を知ると同時に、それらの相互関係に関する幾つかの定理を導いている。また、始点と終点が一致する折れ線が多角形になる条件を考えさせているほか、二等辺三角形に注目することにより垂直二等分線と角の二等分線の作図方法を教えている。

(3)おおまかにいえば、最初の本格的な幾何指導のまとまり（単元）としてはこの程度で十分であると考える。ただ、「質問（答が 1 つに決まらない、あるいはオープンエンドな問い）」、「問題（未知のことを問うのだが、答が確定する問い）」、「練習（既知のことを確実に学習者のものにするための問い）」の区別が曖昧である点は修正する必要がある（次節で見る「いろいろな形」には一応その区別がある）。また形式的なことだが、『学習プリント』の頁数の制限により、プリント 1 頁への記載内容が多く余白が少な過ぎる。作図練習も少ない。子どもたちの多くは作図を好む。頁数を気にせずにもっと多くの作図練習を盛り込むべきである。

(4)個々の内容に関してまず考えたいのは「平行」の扱いである。プランでは平行を、ユークリッド流に「どこまでいっても交わらない」で定義している。はるか彼方はどうなっているのかと無限に思いを走らせるという意味はあるかもしれないが、それは確かめようがない。それより「注意」で述べているように「1 本の直線をずらすことによってできる直線ともとの直線との関係」で定義することも可能ではないのか。この定義によると、平行の場合の同位角の相等は自明となる。

(5)次に「角」の扱いについてであるが、角は、「半直線がはしの点を中心に回転してできる形」と定義している。はたしていきなり「回転量」で定義して良いものだろうか。子どもの抱く角についての自然な（最初の）イメージは、何らかの「尖ったもの」の「開き具合」ではなかろうか（「尖り具合」ではない）。ここから出発してプランで採用している「回転量としての角（半直線の通過領域）」につなげる丁寧さが必要だろう。また、プランでは「角の相等」を扱っていない。これは付け加えるべきだろう。同じ頁に 1 つの角と別のところに端点を打っておけば、白紙を活用することにより「写し取り」を見つけるだろう（子ども同士でその頁を貸し借りすることによっても角の相等を確認できる）。さらに、定義の段階では「回転量」だから問題にならないが、いずれ優角（平角より大きい角）か劣角（平角より小さい角）かが問題となる場面に遭遇する。どこかで「断らない限り劣角を考える」ことを言明しておくことも必要であろう。

(6)「三角形」の節では、二等辺三角形に関して用語「底辺」は明示しているが、「二つの底角が等しいこと」を垂直二等分線の作図によって証明しているにも関わらず、用語「底角」を示していない。これは誤りである。一般にある概念を示したならそれに対して名称を与えることが必須であろう（教科書では至るところでこの誤りを見つけることができる）。この節で、二等辺三角形と正三角形だけでなく、直角三角形、直角二等辺三角形、鋭角三角形、鈍角三角形（もちろん「鋭角」「鈍角」の定義を明示しながらだが）を登場させ、三角形の分類を済ませるのも 1 つの方法である。そうすることにより、次の単元「いろいろな形」では四角形に集

中できる。なお、ここで垂直二等分線と角の二等分線の作図練習は重要である（中学生でもうまく書けない子どもは沢山いる）。また、円を利用して正三角形を書くこと、さらに沢山の円を書いて模様作りをすることは子ども達も喜ぶし、コンパスの使い方に慣れる練習にもなる。第７節に入っている三角形による平面の敷き詰めはこの節に入れるべきだろう。

(7)第７節「四角形」では、いろいろな四角形の特徴を問うたり敷き詰めの課題を課しているが、これらは次の単元「いろいろな形」に譲った方がいい。つまり本単元では三角形と円に絞るべきである。

(8)第８節「正多角形と円」では、円に内接する正多角形の作図を扱っている。正六角形から始まり、正三角形、正十二角形、正二十四角形…の作図、また正四角形（正方形）から始まり、正八角形、正十六角形…の作図はそれ自体子ども達には面白い課題であり、なおかつ角の二等分線の作図の習熟になるだろう。ただし、正五角形の作図はその複雑さのゆえにクラス全体に課すべき課題ではない。もし入れるとすれば「発展」として「取り組みたい人はどうぞ」という位置付けになろう。

(9)第９節「多面体」はこの単元に入れる必要はない。別に「立体図形」あるいは「体積」なる単元を設定した方が良い。

２－３　須田勝彦「いろいろな形」

「いろいろな形」の初出は『学習プリント』の「新版」だが、ここではより新しい「新訂版」を見ることにする。授業用プリントとしては 18 頁からなり、授業時数は 18 時間を予定している。全体は 3 部構成になっている。「Part 1」は「説明できないことば？？？」「平面・直線・空間」「平面・直線・空間（つづき）」「直線と直線」「直線と直線（つづき）」「平面の平行・垂直」「Part 1 の応用問題」の７節から、「Part 2」は「線分・折れ線・多角形」「それがほんとうに三角形、四角形……だろうか？」「三角形」「とくべつな三角形」「とくべつな三角形（つづき）」「四角形」「とくべつな四角形」「とくべつな四角形（つづき）」の 8 節から、「Part 3」は「直方体と立方体」「直方体と立方体（つづき）」の 2 節から成っている。そして最後に評価テスト「みんな 100 てん」がある。

(1)「Part・節」構成を見て容易に気づくのは、「多角形と円」との重複があまりにも多いことである。確かにしばらく前（例えば１年前）に授業で教えたことを子ども達がしっかり覚えていることは期待しにくく、従ってある程度の復習は必要である。しかし、「円と多角形」で学習済みのことが、「ここで初めて解決しなければならない新たな課題」として提出されているものも多い。２つの単元を丁寧に比較対照して、重複しないようにする必要がある。

(2) Part１では、点、平面、直線、空間の相互関係が言葉にまとめられるとともに、角と平行に関する定理が扱われる。「対頂角は等しい」が導かれ、平行線の同位角・錯角の関係が明らかにされる。また空間内における平面同士の平行についても調べられる。

(3) Part２では、三角形の決定条件にあたる内容や四角形の分類を扱っている。これらの幾つかは「多角形と円」の関係部分に付け足して指導することもできる。改訂版を作るにあたって悩むところではある。

(4) Part３では多面体、特に直方体と立方体の性質について簡単に扱っているが、前節「多角形と円」の検討でも述べたように、「立体」については別単元にすべきであろう。

(5) Part１の第 1 節「説明できないことば？？？」を紹介しておく。寺子屋に通う子どもの「独り言」である（行換えは無視する）。

ことばの意味はことばで説明されます。説明していることばの意味はことばで説明されます……。

寺子屋の学問の予習で「おにぎり」ということばの意味を調べた。「おにぎり」＝「にぎりめし」のていねいないいかた。おむすび。私は「にぎりめし」も「おむすび」も意味がわからないので、調べた。「おむすび」＝にぎりめし。おにぎり。けっきょく、「にぎりめし」の意味がわかればいいんだ。「にぎりめし」＝飯(めし)を丸く、または三角形などににぎりかためたもの。おにぎり。おむすび。「飯(めし)」はわかる。「丸」や「三角形」ということばは知らないから調べた。「丸」＝円形。また、球形。「三角形」＝一直線上にない三点を結ぶ三つの線分がつくる図形。

どんどんわからないことばがでてくるので、どんどん調べた。「円形」＝まるい形。「球形」＝球のような形。まるい形。「球」＝球形のもの。「直線」＝まっすぐな線。「まっすぐ」＝まがったりゆがんだりしていないようす。「まがる」＝まっすぐでなくなる。

ここまできて、私は調べることの空(むな)しさを知った。つかれきって、ぜつぼうの思いにひたっているとき、母上が「おにぎりですよ」といって入ってきた。やっと私のぎもんは氷解(ひょうかい)した。

寺子屋の先生の語る、わけのわからないことば。だが、もうことばを調べるのはやめよう。「これがおにぎりか」とわかればいいのだ。

これは無定義語の必要性について述べている。言葉による用語の規定は大事だが、ことの出発点ではまず、言葉の内実がそれとわかれば（イメージとしてつかめれば）よいのだ。きわめて重要な指摘である。

２－４　須田勝彦・久蔵宏幸・岡野勉「鏡による図形の移動」

合同変換の指導プランである「鏡による図形の移動」では、平面上の合同変換である鏡映、平行移動、回転の具体的操作を通して、それらの相互関係である「平行移動は軸の平行な 2 回の鏡映によって生成される」「回転移動は軸の平行でない 2 回の鏡映によって生成される」「平面上の合同変換は高々3 回の鏡映によって生成される」を明らかにすることを目標とした。授業実践の結果、小学校での授業目標としてこのような高いレベルを目指すことに、ひとつの手がかりを得たといえる。

一方、須田らは本プランの「改善の必要」を次のように述べた[13]。

プランの基本的な構成に関して、鏡映、並進、回転の定義とそれらの相互関係の問題が同時に扱われており、それが混乱の原因となっている。［中略］並進や回転はそれ自体、鏡映とは独立に定義された上でその関係が問題になるのである。等長変換がこの 3 つに分解できることこそ、このプランに入る前に獲得しておくべき重要な認識だったのである。

確かに、「並進や回転はそれ自体、鏡映とは独立に定義された上でその関係が問題になる」のはその通りであり、「鏡による図形の移動」の前に平行移動（並進）と回転移動を扱っておく必要があった。この点は、次節で検討する「鏡による図形の移動」の前田輪音による改訂版で実現されている。ただし、「等長変換がこの 3 つに分解できることこそ、このプランに入る前に獲得しておくべき重要な認識だった」という点については、多少注意が必要である。この

13）前掲須田勝彦・久蔵宏幸・岡野勉「授業書「鏡による図形の移動」と授業記録」118 頁。なお、「並進」は「平行移動」「併進」と同じ意味である。本稿では、引用の場合は原文を尊重し、それ以外ではこれらを特に区別なく用いる。

点については後述する。

２－５　前田輪音「「鏡による図形の移動」の改訂版」

「鏡による図形の移動」の前田輪音による改訂版[14]は「序章　合同変換とは」から始まり、「第 1 章　恒等変換」「第 2 章　平行移動」「第 3 章　回転移動」「第 4 章　鏡映」「第 5 章　変換の合成」「第 6 章　図形の対称性」の各章で構成されている。平行移動と回転移動を「鏡映とは独立に定義」したのである。変換の合成を扱い、平面上の合同変換が高々3 回の鏡映の合成変換であることを導いた教育内容の水準は、「鏡による図形の移動」と同様であり、最後に変換を用いた対称性の研究に入っている。

しかし、筆者らの見解を先に述べれば、「第 5 章　変換の合成」、すなわち合成変換の登場が遅いと思われる。その理由は、次節での検討とともに明らかにしていきたい。

２－６　前田輪音「ホモセティー」

(1)幾何教育の構想について

前田は、「鏡による図形の移動」の改訂版による実験授業について述べた論文が掲載された同じ雑誌で、「授業書「ホモセティー」と授業記録―幾何教育における相似変換の指導の一環として―」[15]を発表している。ホモセティーとは、直線をそれに平行な直線に移す変換であり平行移動と中心拡大が該当する。プランでは、合同変換でありながら中心拡大の特殊ケース、すなわちマイナス 1 倍の中心拡大ともいえる半回転にも、平行移動や中心拡大と並ぶ重要な位置を与えている。

題目にあるように、前田はホモセティーの指導を「相似変換の指導の一環として」考えている。しかし、なぜホモセティーを相似変換指導の一環として扱うのか、ホモセティーを扱うことが相似変換の指導においていかなる意義をもつかについて、具体的・積極的に述べているとは言い難い。

ただし前田は、初等および中等教育における幾何教育の目標を「ユークリッド空間における図形の基本性質を教えること」とする須田勝彦の「幾何教育の基本構想」[16]に基づき、さらに F. クラインの「幾何学的性質は主群の変換に対する不変性によって特性づけられる」を引いた上で、「ユークリッド空間における図形の基本性質」を＜相似変換群およびその部分群で不変な図形の性質＞と一歩踏み込んで規定した[17]。したがって、授業書「ホモセティー」は、相似変換群の部分群であるホモセティー変換群に対象を絞り、図形の基本性質すなわちホモセティー変換による図形の不変な性質を明らかにすることを目指したものであったと言えよう。そしておそらく、このことが後にホモセティー変換群より広い相似変換群の性質を学ぶ上で、積極的意義をもつと考えていたのだろうと思われる。相似変換群を学ぶ際、部分群であるホモセティー変換群での不変な性質のうちで、何が依然として不変であり何が不変でなくなるのかを探究することは、幾何学的認識発展の重要な契機となり得るという、幾何教育研究上の作業仮説に立ったのではあるまいか。「ホモセティー」はこのような意味で、単なるひとまとまりの教育内容ではなく「相似変換の指導の一環として」存在するのであるという主張と考えられよう。

この推測の当否はともかく、本作業仮説は、佐藤が述べた「変換群の考えを base にする」と

14）前田輪音「合同変換の授業プランとその授業記録―「鏡による図形の移動」の改訂―」（北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第 12 号、1994 年、45-116 頁）。
15）前田輪音「授業書「ホモセティー」と授業記録―幾何教育における相似変換の指導の一環として―」（北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第 12 号、1994 年、117-153 頁）。
16）前掲須田勝彦・久蔵宏幸・岡野勉「授業書「鏡による図形の移動」と授業記録」70 頁。
17）前掲前田輪音「授業書「ホモセティー」と授業記録―幾何教育における相似変換の指導の一環として―」117 頁。

いう方針をプラン作成の方法論としてより具体化したものであり、筆者らも支持するものである。幾何教育の内容とその指導順序に関して、相似変換群の性質をその部分群ごとに解明するという選択は妥当であろう。「ホモセティー」は、佐藤の「相似変換」に不足していた「群の考え方」をついに取り入れ、「変換群の考えを base にした体系を提起する」大きな一歩となったプランである。

そして、この点こそが、前節で述べた「鏡による図形の移動」の改訂版において、合成変換の登場が遅かったと判断した理由である。「ホモセティー」が相似変換群の部分群としての位置付けを与えられたように、合同変換群の指導においてもその部分群である正格合同変換群を、変格合同変換である鏡映の登場以前に完成させておくべきだったと考える[18]。

(2)相似変換の指導について

「ホモセティー」では平行移動、半回転の後で中心拡大が扱われ、その後、中心拡大と平行移動の合成変換、異なる 2 点に関する中心拡大の合成変換まで取り組まれている。

中心拡大は、「1 つの点 O をきめ、図形上の点 P を、　OP’＝3 × OP　となるような点 P’にうつすことを、<O を中心とする 3 倍の中心拡大>といいます」と、図とともに定義されている。そしてその直後「この［図の―引用者］直線上に、［OP’＝―引用者］3 × OP となるような点は、他にありませんか」と問いかけている。この問いから、a を正の数として、プラス a 倍の中心拡大とマイナス a 倍の中心拡大が区別されることになる。

負の数を習っていない小学生に対してであっても、「マイナス a 倍」の中心拡大を教えることは可能だろうと考える。ただし、生徒の発言には「『マイナス 3 倍』というと 1/3 倍しているみたい」「マイナスだから小さくなるんでないの？」というものもあり、授業記録によれば、授業者が黒板に数直線を書き、原点 O より右側はプラス、左側はマイナスと説明して切り抜けたようである。中心拡大の様々な性質に慣れる前に、プラス a 倍とマイナス a 倍が同時に扱われたことが混乱の一因となったのだろう。

３　小学校における幾何教育の構想

３－１　非系統的幾何教育

遊びとして図形に親しむのは、小学生に限らず中学生や高校生、そして大人でも重要である。特に小学校低学年において、教科での幾何教育が始まる以前から、幾何教育の土台を形成する様々な遊びに触れさせる経験は大切であろう。

例えばタイル。佐藤は整数とその四則の指導の際に度々タイル（厚みのある 1 辺 2 ㎝の正方形で、片面が化粧されていない両面とも同じ模様のもの）を活用してきたが、子ども一人ひとりに 50 個くらい渡すと早速遊び始める。まず、うまく並べて自分の名前をつくる。それから積み木の様にどんどん積み上げていく。そしてドミノ倒しを始める。あるいは平面に並べてなにやら面白げな幾何学模様をつくる。しばらく遊ばせておき、当分の間預けておくから休み時間に自由に遊んでよいと告げる。

例えば積み木。今は直方体の 1 辺が 1m を越すような大型積み木セットが買える。これを空き教室などに置いておき時々遊びに連れて行くのもいいだろう。

18）「△ABC と△A’B’C’が合同なとき、この両者を移す等長変換は、それが向きを保存するか逆にするか、つまり、△ABC と△A’B’C’がこの頂点の順で一致するかしないかにしたがって、正格あるいは変格といわれる」（前掲コクセター『幾何学入門』43 頁）。

例えばポリドロン幾何セット（東京書籍）。1 辺の等しい正三角形、正四角形、正五角形、正六角形、また二等辺三角形がそれぞれたくさんある。中が詰まっているものも、枠だけのものもある。これらをつなぎ合わせて様々な立体を作る。黙っていても早い段階で５つの正多面体をつくる。凹多面体もつくる。

例えばニキーチンの積み木や、よく旅館に置いてある T パズル、そして様々なポリオミノ。この様な道具は道数協の日高地区や帯広地区、また数教協東京地区のメンバーなどがいろいろ工夫して新しものをたくさん作りだしている。

遊びの要素を含むこれら道具を使った活動は、系統的幾何教育には位置付けにくいが、十分に幾何教育の一翼をなすものと考える。

３－２　合同変換以前

第 2 章で検討したことを踏まえて「円と多角形」「いろいろな形」の修正案を作ることになる。その際、学年指定はしない。また単元がこの２つになるかどうかは今後の検討による。「ひとまとまりの教育内容」という視点から、例えば「円に関わる単元」「三角形の単元」「四角形の単元」「立体図形の単元」というように、3 つ以上の単元になる可能性もある。

３－３　合同変換

合同変換の指導については、「鏡による図形の移動」の改訂版をベースにしつつ次のような全体像を構想する。

第 1 部　合同変換(1)

1.1　変換とは何か

1.2　恒等変換

1.3　平行移動とその合成（平行移動群の完成）

1.4　回転移動とその合成（正格合同変換群の完成）

第 2 部　合同変換(2)

2.1　鏡映

2.2　合同変換のすべて（合同変換群の完成）

第 3 部　図形の対称性

変換の合成を後回しにすることなく、第 1 部の「1.3　平行移動とその合成」から登場させ平行移動群を完成させる。「1.4　回転移動とその合成」でも合成を扱い、回転移動の合成が一般的には回転になり、特殊な場合に平行移動となることを確かめる。これで正格合同変換群が完成する。第 2 部は、鏡の世界から来た「みらあ」が登場する物語性のオリジナリティも含めて「鏡による図形の移動」を元に、平行移動と回転移動及びそれらの合成部分を除いたものを基本プランとすればよいと考えている。第 3 部の「図形の対称性」については、「鏡による図形の移動」の改訂版を基本としたい[19]。

合同変換の指導に関する第 2 章での検討及び本節で述べた合同変換指導の構想から、須田らが「等長変換がこの 3 つ［並進、回転、鏡映―引用者］に分解できることこそ、このプランに入る前に獲得しておくべき重要な認識だった」と述べたことについて考え直してみたい。平行移動、回転移動、鏡映の 3 つが合同変換（等長変換）であることを鏡映の合成以前に扱うべき

19）図形の対称性については、「鏡による図形の移動」の改訂版における対称性の研究がヒントとなった、高橋哲男「家紋の対称性の研究に基づく群論入門の授業案」（北海道大学大学院教育学研究科教育方法学研究室『教授学の探究』第 18 号、2001 年、103-143 頁）でも扱っている。ただし、このプランは、対称性の研究を群論への入り口として位置づけており、事前に線対称・点対称を習っていることが望ましいプランになっている。

だとする主張は、確かにその通りであろう。しかし、合同変換が分解される「この 3 つ」は平行移動と回転移動と鏡映ではなく、正確には平行移動と回転移動と併進鏡映[20]である点は措くとして、等長変換が 3 つに分解できることは、やはり、鏡映の合成変換まで扱った「鏡による図形の移動」のなかで獲得されることなのである。すなわち、鏡映の集合は合同変換の生成系をなすのであり、鏡映の合成の回数によって合同変換の分解が可能となる。

筆者らの構想の第 1 部では平行移動と回転移動がそれぞれ定義され、正格合同変換はこの 2 種類に分解されることが獲得される。第 2 部では鏡映が定義され、その合成変換が扱われるなかで、合同変換が正格合同変換と変格合同変換に分解されることが獲得される。両者を合わせて、合同変換（等長変換）が 3 つに分解されることも獲得されることになる。一方、「鏡による図形の移動」及びその改訂版では、「合同変換は高々3 回の鏡映の合成変換である」「2 回の鏡映の合成変換は平行移動または回転移動である」という教育内容に到達している。両者は合わせて、「合同変換は（0 回または 2 回の鏡映の一方である）平行移動、（0 回または 2 回の鏡映の他方である）回転移動、（1 回または 3 回の）鏡映に分解できる」と言い換えられ、ここでようやく分解が完成する。いずれにしても、合同変換が 3 つに分解されることを理解するには合成変換の概念が必要なのである。

３－４　相似変換

相似変換の指導については、「ホモセティー」の中心拡大部分を基本としたい。ただし、筆者らは、プラス a 倍の中心拡大に対してマイナス a 倍の中心拡大を教えるよりも、プラス 1/a 倍の中心拡大を教えたいと考える。倍率が正の数である中心拡大の範囲で、逆変換や合成変換を扱うのである。中心拡大の合成変換で中心拡大にならない場合（倍率の積が 1）や、中心拡大の合成変換が中心拡大になる場合（倍率の積が 1 以外）のそれら 3 つの中心の共線性などに触れることは、この範囲でも可能である。マイナス a 倍の中心拡大は、その後で扱っても十分だろう。

４　おわりに

以上、これまでにグループで作成された幾何教育プランを検討し、小学校における幾何教育の構想の概略を述べた。今後は、この構想に基づき授業書形式で改訂プランを提案したい。

20）併進鏡映とは、1 つの直線 a を軸とする鏡映とその直線に沿う併進の積であり、併進鏡映は不動点をもたない変格等長変換である。前掲コクセター『幾何学入門』46–47 頁参照。