学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏名　　和　田　　和　幸

学 位 論 文 題 名

Spectral Analysis of a Charged Scalar Field Model with Cutoffs
(切断の入った複素スカラー場の模型のスペクトル解析)

本学位論文は，$L^2(\mathbb{R}^d)\oplus L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のボソンフォック空間上で作用する以下のハミルトニアン

$$H = \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega\oplus\omega) + \overline{\mu\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{\mathrm{sp}}(x)\phi(f_x)^*\phi(f_x)\mathrm{d}x + \lambda\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{\mathrm{sp}}(x)(\phi(f_x)^*\phi(f_x))^2\mathrm{d}x},$$

のスペクトルについて解析を行う．本学位論文の内容は [7] に基づいている．$d\in\mathbb{N}$ は空間次元，ω は関数 $\omega(k)=|k|$ による掛け算作用素，$\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega\oplus\omega)$ は $\omega\oplus\omega$ による第二量子化作用素，$\phi(f_x)$ は関数 $f_x\in L^2(\mathbb{R}^d)$ によるスカラー場の作用素，$\chi_{\mathrm{sp}}\in L^1(\mathbb{R}^d)$ は非負値関数で空間切断の役割を果たし，$\lambda>0$, $\mu\in\mathbb{R}$ はそれぞれ結合定数である．線形作用素 T に対して $\overline{T}$ は T の閉包を表し，積分は強 Bochner 積分の意味で取る．これらの厳密な定義や説明は第 2 章で行われる．

第 3 章では H の自己共役性について論じられる．まず Arai [1] の結果を応用し，H が適切な部分空間上で本質的自己共役である事を示す．次に Hidaka [5] によるアイデアを援用し，H の右辺第 3 項目が H に相対有界である事を示す．この事は H 自身が閉作用素である事を導き，自己共役性が従う．

第 4 章では H のスペクトルを特定している．主結果として，H のスペクトルはすべて本質的スペクトルからなり，H の最低エネルギーから $+\infty$ まで連続的に分布している事を示した．証明は Arai [2] における本質的スペクトルの一般論を H に適応する事である．

第 5 章では H の基底状態の存在について論じられる．下に有界な自己共役作用素 A の基底状態が存在するとは，A のスペクトルの下限が A の固有値になっている事を言う．H のスペクトルの下限が $m>0$ に対し，$\omega_m(k):=\sqrt{k^2+m^2}$ と定める．この時次のハミルトニアン

$$H_m = \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega_m\oplus\omega_m) + \overline{\mu\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{\mathrm{sp}}(x)\phi(f_x)^*\phi(f_x)\mathrm{d}x + \lambda\int_{\mathbb{R}^d}\chi_{\mathrm{sp}}(x)(\phi(f_x)^*\phi(f_x))^2\mathrm{d}x},$$

は H と同様に自己共役作用素である事が示される．5 章の前半部分ではこの H_m の基底状態の存在について論じられている．証明方針は Dereziński-Gérard [3] によって確立された，1 の分解を用いて粒子の状態を十分大きな d 次元球内とそれより外の部分に分ける局所化の議論を応用する事である．この議論では Number-Energy Estimate(NEE) と呼ばれる補題が重要な役割を果たすとされている．しかし H_m の右辺第 3 項が $\mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(\omega_m\oplus\omega_m)$ に対して相対有界でない為，NEE を H_m に対して証明する事が困難であった．し

かし場の作用素が 4 次である事を利用し，NEE を回避して H_m の基底状態の存在を証明した．5 章の後半部分は H_m とその基底状態 $\{\Phi_m\}_{m>0}$ に対して適切な意味での極限 $m \to 0$ を考察し，H の基底状態が存在する事を論じている．方針は Griesemer-Lieb-Loss [4] とその改良である Sasaki [6] に基づいている．

第 6 章では固有ベクトルと全電荷との関係について論じられている．全電荷作用素は $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ に対し，$Q := \mathrm{d}\Gamma_{\mathrm{b}}(q \oplus -q)$ で定義される自己共役作用素である．Q のスペクトルはすべて固有値からなり固有値の集合は q の整数倍である．まず H と Q が強可換である事を示した．この事は H が Q の固有空間で分解されるという事実を導く．この時 H の基底状態が Q のどの固有状態に属するかという問題が考えられる．この問題に対し H の実現するヒルベルト空間，スカラー場の作用素の構造に着目した．具体的にはまず $L^2(\mathbb{R}^d) \oplus L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の変換 τ を次で定める．

$$\tau(f, g) := (g, f), \quad (f, g) \in L^2(\mathbb{R}^d) \oplus L^2(\mathbb{R}^d).$$

そして τ の第二量子化である $\Gamma_{\mathrm{b}}(\tau)$ と Q との関係を考察するのである．6 章における主結果として，自己共役作用素 A が (1)Q と強可換である, (2)$\Gamma_{\mathrm{b}}(\tau)$ と強可換である，(3) 固有値 λ が存在し固有空間が 1 次元である，という仮定の下，A の固有値 λ に属する固有ベクトルが Q の固有値 0 の空間に属する事を示した．この帰結として，仮定の下でもし H の基底状態が一意 (スペクトルの下限の固有空間が 1 次元) ならば，基底状態は Q の固有値 0 の空間に属する事が示される．

Appendix A では抽象ボソンフォック空間上で作用する線形作用素に対する事実の一部がまとめられている．Appendix B では Arai [1] による本質的自己共役性についての事実がまとめられている．Appendix C では Arai [2] よる本質的スペクトルに関する事実の一部がまとめられている．

参考文献

[1] A. Arai, “A theorem on essential self-adjointness with application to Hamiltonians in nonrelativistic quantum field theory”, J. Math. Phys. **32**, 2082-2088, (1991).

[2] A. Arai, “Essential spectrum of a self-adjoint operator on an abstract Hilbert space of Fock type and applications to quantum field Hamiltonians”, J. Math. Anal. and App. **246**, 189-216, (2000).

[3] J. Dereziński and C. Gérard, “Asymptotic completeness in quantum field theory. Massive Pauli-Fierz Hamiltonians”, Rev. Math. Phys. **11**, 383-450, (1999).

[4] M. Griesemer, E. H. Lieb and M. Loss, “Ground states in nonrelativistic quantum electrodynamics”, Invent. Math. **145**, 557-595, (2001).

[5] T. Hidaka, “Existence of a ground state for the Nelson model with a singular perturbation”, J. Math. Phys. **52**, 022102, (2011).

[6] I. Sasaki, “Spectral analysis of the Dirac polaron”, Publ. RIMS, **50**, no. 2, 307—339, (2014).

[7] K. Wada,“Spectral analysis of a massless charged scalar field with cutoffs” to appear in Hokkaido Math. J.