Discussion Paper, Series B, No.2017-153

離散型１部門ラムゼーモデルの基本的性質について

久保田　肇

2017 年 11 月

北海道大学大学院経済学研究院

060-0809　札幌市北区北９条西７丁目

離散型1部門ラムゼーモデルの基本的性質について

久保田肇
北海道大学経済学研究院

平成 29 年 11 月

概 要

本稿では効用関数が下に有界のケースのラムゼーモデルに関する、最適経路の存在、特徴付け、厚生経済学の基本定理等の基本的な性質を議論する。

1　はじめに

離散型無限期間１部門ラムゼーモデルは現代の動学的経済理論の基本モデルで、動学的な問題を扱う様々な分野で用いられている。特に現代マクロ経済学や現代国際マクロ経済学では標準モデルである。そこで本稿では、この１部門ラムゼーモデルの最適解（最適経路）の基本的性質を考察する。最適解/最適経路の存在やその経路の特徴付け、更に、最適経路の競争均衡としての表現に関する動学的厚生経済学の基本定理を扱う。

2　モデル

この経済には、各時点で消費にも投資も使える財が１つあるとして、生存期間が無限期間の同質的な L 人の消費者がそれを各期で消費し、無限期間に渡って経済活動を行う１企業が各期で労働と資本を投入してこの財を産出するとする。消費者は各期で非弾力的に労働を供給するとして、その大きさを１に基準化しておき、同質的な消費者の効用は各期で財の消費によって発生するとして、その効用関数を $u : R_+ \to R_+, c \to u(c)$ する。ここでは簡単化のために、$u(0) = 0$ とする。[1]　企業の生産関数を $F : R_+ \times R_+ \to R_+, (K, L) \to F(K, L)$ とする。そして、F を１次同次、$k = K/L$ を一人当たり資本として、$f(k) = F(k, 1) = F(K/L, 1)$ とする。

$c_{t,} + k_{t+1} \leqq f(k_t), t = 1, 2, \cdots, 0 \leqq c_{t,} t = 0, 1, 2, \cdots, 0 \leqq k_t, t = 1, 2, \cdots, k_0 = \overline{k}_0 (> 0)$, 所与、を満たす時に、消費と資本ストックの経路 $(c_t, k_t)_{t=0}^{\infty} = (\widetilde{c}, \widetilde{k}) \in (R^2)^{\infty}$ を実行可能とする。[2]　そして、k_0 から実行可能な経路の集合を $\Pi(k_0)$ として、$\Pi(k_0) = \{(\widetilde{c}, \widetilde{k}) : c_t + k_{t+1} \leqq f(k_t), t = 1, 2, \cdots, 0 \leqq c_t, t = 0, 1, 2, \cdots, 0 \leqq k_t, t = 1, 2, \cdots, k_0 = \overline{k}_0\}$、$k_0$ から実行可能な消費経路の集合を $\Pi^c(k_0)$ として、$\Pi^c(k_0) = \{\widetilde{c} = (c_t)_{t=0}^{\infty} : \exists (\widetilde{c}, \widetilde{k}) \in \Pi(k_0)\}$、$k_0$ から実行可能な資本ストックの経路の集合を $\Pi^k(k_0)$、$\Pi^k(k_0) = \{\widetilde{k} = (k_t)_{t=0}^{\infty} : \exists (\widetilde{c}, \widetilde{k}) \in \Pi(k_0)\} = \{\widetilde{k} = (k_t)_{t=0}^{\infty} : 0 \leqq k_{t+1} \leqq f(k_t), t = 0, 1, 2, k_0 = \overline{k}_0\}$、とする。以下では f を単調増加的とするので $k_0 \leqq k'_0$ ならば $f(k_0) \leqq f(k'_0)$ となり、$c'_0 = c_0 + (f(k'_0) - f(k_0)), c'_t = c_t, k'_t = k_t, t = 1, 2, \cdots,$ とすれば、$(\widetilde{c'}, \widetilde{k'}) \in \Pi(k'_0)$ となって $\Pi(k_0) \subset \Pi(k'_0)$ となる。

ラムゼーモデルの標準的な問題は

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \ s.t. \ \widetilde{c} \in \Pi^c(k_0) \qquad (RM)$$

と表わされ、将来効用の割引現在価値を最大にする k_0 からの実行可能経路 $(\widetilde{c}, \widetilde{k})$ を見つける事になる。[3]　ここで、$\beta \in (0, 1)$ は将来効用の割引因子である。この問題に最適解 $(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*}) \in \Pi(k_0)$ が存在すると、$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^*) = V(k_0)$ となり、$V : R_+ \to R_+$ を価値関数とする。[4]　また、以下に仮定する u の単調増加性より、最適経路 $(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*})$ については、$c_t^* + k_{t+1}^* = f(k_t^*), t = 0, 1, 2, \cdots,$ となるので、$u(f(k) - k') = v(k, k')$ とすると、上記の問題

[1] もちろん $u(0)$ が下に有界であればよい。$u(0) = -\infty$ のケースは別途扱う。
[2] ここでは、簡単化のために資本ストックの減耗率を 100% としている。
[3] 以下では簡単に、$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$ と記す。
[4] u の単調増加性と $u(0) = 0$ より $V(k_0) \geqq 0$ である。

は問題は

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t v(k_t, k_{t+1}) \ s.t. \ \widetilde{k} \in \Pi^k(k_0) \tag{RM'}$$

と表わされ、将来効用の割引現在価値を最大にする k_0 からの実行可能資本ストック経路 $\widetilde{k}$ を見つける事に帰着される。[5]　この形の表現が通常既約型ラムゼーモデル（reduced form Ramsey Model) と言われるものである。

3　仮定

本稿ではラムゼーモデルにおいて通常用いられる以下の標準的仮定を置く。

$A.1$: $\beta \in (0,1)$

$A.2$: $u : R_+ \to R_+, u(0) = 0, u' > 0$（強単調増加的）$, u'' < 0$（強凹的）

$A.3$: $\lim_{c \to 0} u'(c) = +\infty$（稲田条件）

$A.4$: $f : R_+ \to R_+, f(0) = 0, f' > 0$（強単調増加的）$, f'' < 0$（強凹的）$, \lim_{k \to \infty} f'(k) < 1, 1 < \lim_{k \to 0} f'(k) \leqq +\infty$

$A.5$: $\lim_{k \to 0} f'(k) (= f'(0)) > 1$

$A.2$ において $u' > 0$ としていて u が強単調増加的なので、最適経路 $(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*})$ に対して $c_t^* + k_{t+1}^* = f(k_t^*), t = 0, 1, 2, \cdots,$ となり、RM' に対して最適解が存在することを示せばよい。$A.4$ の $f''(k) < 0$ より $f(k) - k$ は強凹である。$A.4$ における $\lim_{k \to \infty} f'(k) < 1$ より、十分に大きい任意の $h > 0$ に対して $f'(h) - 1 < 0$ となるが、$f'' < 0$ より $f'(h) - 1$ は強単調減少的で、ある十分に大きい $h' > 0$ に対して $f'(h') - 1 < 0$ とすると、十分に大きい任意の $k (> h') > 0$ に対して $f(h') - h' < -(f'(h') - 1)(k - h'), f'(k) - 1 < (f'(h') - 1)$ となって、$f(k) - k = f(h') - h' + \int_{h'}^{k} (f'(h) - 1) dh < f(h') - h' + (f'(h') - 1)(k - h') < 0$ となる。この時、$f'(0) > 1$ であれば、十分に小さい任意の $h > 0$ に対して $f'(h) > 1$ となるので、十分に小さい任意の $k > 0$ に対して、$f(k) - k = \int_0^k (f'(h) - 1) dh > 0$ となる。十分に小さい任意の $h > 0$ に対して $f'(h) > 1$、ある十分に大きい $k > 0$ に対して $f'(k) - 1 < 0$ なので、ある $k^s > 0$ が存在して $f'(k^s) - 1 = 0$ となるが、$f(k) - k$ は $f''(k) < 0$ より強凹なので、ある一意的な $k^s (> 0)$ があり、$\max_{k>0} [f(k) - k] = f(k^s) - k^s = c^s (> 0)$ となる。この時、k^s は定常的な消費を最大にする黄金律資本ストックである。また、十分に小さい任意の $k > 0$ に対して $f(k) - k > 0$ で、十分に大きい $k > 0$ に対して $f(k) - k < 0$ なので、$f(k) - k$ の強凹性より、ある一意的な $\overline{k} (> k^s) > 0$ が存在して、$f(\overline{k}) - \overline{k} = 0, k > \overline{k} \to f(k) - k < 0$ となる。この $\overline{k}$ を最大維持可能資本ストックという。この時もちろん、$f(0) - 0 = 0$ である。[6]　$A.5$ は

[5] 以下では簡単に、$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t v(k_t, k_{t+1})$ と記す。

[6] $f'(0) \leqq 1$ であれば $\overline{k} = 0$ とすれば $f(\overline{k}) - \overline{k} = f(0) - 0 = 0$ となり、$f'' < 0$ より $k > k = 0 \to f(k) - k < 0$ となる。

ラムゼーモデルにおける厚生経済学の (第 2) 基本定理を示す際に重要となる。十分に小さい $k>0$ に対して $k<f(k)$ となり、$0<c=f(k)-k$ となり、定常的に正の消費や資本ストックを実現する経路が存在することを保証する。

4 最適経路の存在

この節では上記の仮定の下で上記のラムゼーモデル RM に最適解が存在することを示す。非空コンパクト集合上の連続関数は最大値 (と最小値) を持つというワイエルシュトラスの最大最小定理を適用する。そこで、$\widetilde{c^n}\to\widetilde{c}(n\to\infty)\Longleftrightarrow c_t^n\to c_t(n\to\infty), t=1,2,\ldots.$ と定義した座標別収束位相 (もしくは直積位相) を用いて、その収束に関して $\Pi(k_0)$ が非空コンパクト集合であり、$\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)=U(\widetilde{c})$ が連続である事を示す。まず、$(\widetilde{c},\widetilde{k})$ を $\widetilde{c}=(f(k_0),0,0,\cdots),\widetilde{k}=(k_0,0,0,\cdots)$ とすると、$(\widetilde{c},\widetilde{k})\in\Pi(k_0)$ となるので、$\Pi(k_0)\neq\emptyset$ である。

次に、任意の $k_0\geqq 0$ に対してある $M>0$ が存在して、$\Pi(k_0)$ が有界で $(\widetilde{c},\widetilde{k})\in\Pi(k_0)\Longrightarrow \sup_{t=1,2....}(c_t,k_t)\leqq M$ となることを示す。$k_0\leqq\overline{k},\widetilde{k}=(k_t)_{t=0}^{\infty}\in\Pi^k(k_0)$ とすると、$f'>0$ より f は単調増加で資源制約より $0\leqq k_1\leqq f(k_0)\leqq f(\overline{k})=\overline{k},0\leqq k_2\leqq f(k_1)\leqq f(\overline{k})=\overline{k},\cdots$ となるので、$0\leqq k_t\leqq\overline{k},t=1,2....$ である。$k_0>\overline{k},\widetilde{k}=(k_t)_{t=0}^{\infty}\in\Pi^k(k_0)$ とすると、資源制約と $\overline{k}$ の性質より $0\leqq k_1\leqq f(k_0)<k_0$ となるが、$k_1\leqq\overline{k}$ であれば、$k_0\leqq\overline{k}$ のケースを適用すれば、$0\leqq k_t\leqq\overline{k},t=2,3....$ となり、$0\leqq k_t\leqq\max(\overline{k},k_0),t=1,2....$ となる。一方、$\overline{k}<k_1$ であれば資源制約と $\overline{k}$ の性質より $0\leqq k_2\leqq f(k_1)<k_1<k_0$ となり、$k_2\leqq\overline{k}$ であれば、$0\leqq k_t\leqq\overline{k},t=2,3....$ となり、また、$\overline{k}<k_2$ であっても $0\leqq k_3\leqq f(k_2)<k_2<k_1<k_0$ となって減少的となるので、$0\leqq k_t\leqq\max(\overline{k},k_0),t=1,2,3....$ となる。すると、$0\leqq c_t\leqq f(k_t)\leqq f(\max(\overline{k},k_0))$ となるが、$k_0\leqq\overline{k}\Longrightarrow f(k_0)\leqq f(\overline{k})=\overline{k},\overline{k}<k_0\Longrightarrow\overline{k}=f(\overline{k})\leqq f(k_0)<k_0$ となって、$f(\max(\overline{k},k_0))=\max(f(\overline{k}),f(k_0))\leqq\max(\overline{k},k_0)$ となり、$\sup_{t=1,2,3....}(c_t)\leqq\max(\overline{k},k_0)$ となるので、そこで $M=\max(\overline{k},k_0)$ とすれば、$\sup_{t=1,2....}(c_t,k_t)\leqq M$ となる。

これより、$\widetilde{k}=(k_t)_{t=0}^{\infty}\in\Pi^k(k_0)(\widetilde{c}=(c_t)_{t=0}^{\infty}\in\Pi^c(k_0))$ とすると、$k_t,c_t\in[0,M],t=1,2....$ なので、$\widetilde{k}(\widetilde{c})\in[0,M]\times[0,M]\times\cdots=[0,M]^{\infty}$ となる。まず、ここで $[0,M]^{\infty}$ が座標別収束位相で点列コンパクトである事をします。$\widetilde{x^n}=(x_t^n)_{t=0}^{\infty}\in[0,M]^{\infty},n=1,2,....$ とする。$(x_1^n)_{n=1}^{\infty}\in[0,M]$ に対してはボルツアーノ・ワイエルシュトラス定理 (BW) より収束部分列があり、ある $(x_1^{n_q^1})_{q=1}^{\infty}\in[0,M]$ と $x_1\in[0,M],x_1^{n_q^1}\to x_1(q\to\infty)$ となる。次に、$(x_2^n)_{q=1}^{\infty}\in[0,M]$ の部分列 $(x_2^{n_q^1})_{q=1}^{\infty}$ に対しても (BW) より、ある $(x_2^{n_q^2})_{q=1}^{\infty}\in[0,M]$ と $x_2\in[0,M],x_2^{n_q^2}\to x_2(q\to\infty)$ となる。この時、$(x_1^{n_q^2})_{q=1}^{\infty}$ は $(x_1^{n_q^1})_{q=1}^{\infty}$ の部分列で $x_1^{n_q^1}\to x_1(q\to\infty)$ なので、$x_1^{n_q^2}\to x_1(q\to\infty)$ である。以下同様にして、$\tau=1,2,\ldots,t$ まで $x_t\in[0,M],(x_{\tau}^{n_q^{\tau}})_{q=1}^{\infty},\tau'\leqq\tau$ に対して $(x_{\tau'}^{n_q^{\tau}})_{q=1}^{\infty}$ は $(x_{\tau'}^{n_q^{\tau'}})_{q=1}^{\infty}$ の部分列で、$\tau'\leqq\tau$ に対して $x_{\tau'}^{n_q^{\tau}}\to x_{\tau'}(q\to\infty)$ とする。そして、$(x_{\tau+1}^{n})_{q=1}^{\infty}$ の部分列 $(x_{\tau+1}^{n_q^{\tau}})_{q=1}^{\infty}$ を考えると、(BW) より、あるの部分列 $(x_{\tau+1}^{n_q^{\tau+1}})_{q=1}^{\infty}\in[0,M]$ と $x_{\tau+1}\in[0,M],x_{\tau+1}^{n_q^{\tau+1}}\to x_{\tau+1}(q\to\infty)$ となるが、$\tau'\leqq\tau$ に対して $(x_{\tau'}^{n_q^{\tau+1}})_{q=1}^{\infty}$ は $x_{\tau'}^{n_q^{\tau'}}\to x_{\tau'}(q\to\infty)$ となる $(x_{\tau'}^{n_q^{\tau'}})_{q=1}^{\infty}$ の部分列なので $x_{\tau'}^{n_q^{\tau+1}}\to x_{\tau'}(q\to\infty)$ となる。このようにして、各 $t=1,2,\ldots,$ に対して $(x_t^{n_q^t})_{q=1}^{\infty}$ は $(x_t^n)_{q=1}^{\infty}$ の部分列で、$\tau\leqq t$ に対して $x_{\tau}^{n_q^{\tau}}\to x_{\tau}(q\to\infty)$ と出来る。そして、各 $q=1,2,....$ に対して数列 $\widetilde{x^{n_q^{\mathrm{q}}}}=(x_{\mathrm{t}}^{n_q^{\mathrm{q}}})_{t=0}^{\infty}\in[0,M]^{\infty}$ を考えると、これは数列 $\widetilde{x^n}=(x_{\mathrm{t}}^n)_{t=1}^{\infty},n=1,2,....$ の部分列で、各 $t=1,2,....$ に対して $x_t^{n_q^q}\to x_t(q\to\infty)$ となるので

$\widetilde{x}=(x_{\mathrm{t}})_{t=0}^{\infty}\in[0,M]^{\infty}$ とすると、$\widetilde{x^{n_q^{\mathrm{q}}}}\to\widetilde{x}(q\to\infty)$ となって、$\widetilde{x^{n_q^{\mathrm{q}}}}=(x_{\mathrm{t}}^{n_q^{\mathrm{q}}})_{t=0}^{\infty},q=1,2,....,$ が $\widetilde{x^n}=(x_{\mathrm{t}}^n)_{t=1}^{\infty}$ の収束部分列となっていて、$[0,M]^{\infty}$ は点列コンパクトである。

今 $(\widetilde{c^n},\widetilde{k^n})\in\Pi(k_0),n=1,2,....,(\widetilde{c^n},\widetilde{k^n})\to(\widetilde{c},\widetilde{k})(n\to\infty)$ とする。$c_t^n,k_t^n\geqq 0,(c_t^n,k_t^n)\to(c_t,k_t)(n\to\infty)$ より $c_t,k_t\geqq 0,t=1,2,....$ である。また、資源制約より $0\leqq c_t^n+k_{t+1}^n\leqq f(k_t^n)$ と $A.4$ から成立する f 連続性より $0\leqq c_t+k_{t+1}\leqq f(k_t),t=1,2,....,$ となって、$(\widetilde{c},\widetilde{k})\in\Pi(k_0)$ となり、$\Pi(k_0)$ は座標別収束に関して閉集合である。すると、射影の連続性より $\Pi^c(k_0)$ や $\Pi^k(k_0)$ も座標別収束に関して閉集合である。そして、$[0,M]^{\infty}$ の点列コンパクト性と $\Pi^c(k_0),\Pi^k(k_0)\subset[0,M]^{\infty}$ より $\Pi^c(k_0),\Pi^k(k_0)$ も点列コンパクトになる。

$\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)=U(\widetilde{c})$ の連続性を示す。$\widetilde{c}=(c_{\mathrm{t}})_{t=0}^{\infty}\in\Pi^c(k_0)$ とする。$\exists\widetilde{k}\in\Pi^k(k_0)$ に対して、$0\leqq c_t+k_{t+1}\leqq f(k_t)\leqq f(M),t=0,1,2,....,$ なので、$0\leqq\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)\leqq\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(f(M))=u(f(M))/(1-\beta)=M'<\infty,\forall k_0\geqq 0$ である。$\widetilde{c^n}\to\widetilde{c}(n\to\infty)$ とする。今 $\varepsilon>0$ として、$\exists T_\varepsilon>0$ を $\displaystyle\sum_{t=T_\varepsilon+1}^{\infty}\beta^t u(c_t)\leqq\sum_{t=T_\varepsilon+1}^{\infty}\beta^t u(f(M))=\beta^{T_\varepsilon+1}u(f(M))/(1-\beta)<\varepsilon/3$ となるように選ぶ。すると、$|U(\widetilde{c^n})-U(\widetilde{c})|=|\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t^n))-\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t))|\leqq\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t|u(c_t^n)-u(c_t)|=\sum_{t=0}^{T_\varepsilon}\beta^t|u(c_t^n)-u(c_t)|+\sum_{t=T_\varepsilon+1}^{\infty}\beta^t|u(c_t^n)-u(c_t)|\leqq\sum_{t=0}^{T_\varepsilon}\beta^t|u(c_t^n)-u(c_t)|+\sum_{t=T_\varepsilon+1}^{\infty}\beta^t(u(c_t^n)+u(c_t))=\sum_{t=0}^{T_\varepsilon}\beta^t|u(c_t^n)-u(c_t)|+2\sum_{t=T_\varepsilon+1}^{\infty}\beta^t(u(f(M))+u(f(M))\leqq\sum_{t=0}^{T_\varepsilon}\beta^t|u(c_t^n)-u(c_t)|+2\varepsilon/3,\forall n\geqq 1$ となる。そして、u の連続性と $t=0,1,2,....,T_\varepsilon$ の有限性より、$\displaystyle\sum_{t=0}^{T_\varepsilon}\beta^t|u(c_t^n)-u(c_t)|$ の連続性も成立して、$\exists n_\varepsilon\geqq 1,\forall n\geqq n_\varepsilon,\displaystyle\sum_{t=0}^{T_\varepsilon}\beta^t|u(c_t^n)-u(c_t)|<\varepsilon/6$ となる。すると、$|U(\widetilde{c^n})-U(\widetilde{c})|\leqq\displaystyle\sum_{t=0}^{T_\varepsilon}\beta^t|u(c_t^n)-u(c_t)|+2\varepsilon/3\leqq\varepsilon/6+2\varepsilon/3=5\varepsilon/6<\varepsilon,\forall n\geqq n_\varepsilon$ となって、U は座標別収束に関して連続である。

すると、$\Pi^c(k_0)$ の座標別収束に関する点列コンパクト性と U の座標別収束に関する連続性が成立するので、ワイエルシュトラスの最大最小定理より最大解が存在して、$\exists\widetilde{c^*}\in\Pi^c(k_0),U(\widetilde{c^*})=\max U(\widetilde{c})(\widetilde{c}\in\Pi^c(k_0))$ となる。[7] この時、$\exists\widetilde{k^*}\in\Pi^k(k_0)$ があって $(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})\in\Pi(k_0)$ となり、$0\leqq c_t^*+k_{t+1}^*\leqq f(k_t^*),t=0,1,2,....,$ となって、$c_t^*\leqq f(k_t^*)-k_{t+1}^*$ となるが、$\widetilde{c^*}$ が最大解であることと u の単調性より $c_t^*=f(k_t^*)-k_{t+1}^*,t=0,1,2,....,$ となる。

5　最適経路の特徴づけ

本節では、最適解の一意性、内部性、オイラー方程式といった最適経路の特徴付けを行う。

最初に $A.2$ の効用関数の強凹性に基づいて最適解の一意性を示す。今、$(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*}),(\widetilde{c'},\widetilde{k'})\in\Pi(k_0),(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})\neq(\widetilde{c'},\widetilde{k'})$ を k_0 からの異なる二つの最適経路とする。$A.2$ の効用関数の強単

[7] 以下では簡単に、$\max U(\widetilde{c})$ と記す。

調性より、$c_t^*=f(k_{t-1}^*)-k_t^*, c_t'=f(k_{t-1}')-k_t', t=1,2,\ldots, k_t^*=k_t'=k_0$ となるので、$c_t^*=c_t', t=0,1,2,\ldots,$ とすると $k_t^*=k_t', t=0,1,2,\ldots,$ となって、$(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})\neq(\widetilde{c'},\widetilde{k'})$ に矛盾するので、$\exists\tau\geqq 0,1,2,\ldots, c_\tau^*\neq c_\tau'$ となる。今、$c_t(1/2)=1/2c_t^*+1/2c_t', k_t(1/2)=1/2k_t^*+1/2k_t', t=0,1,2,\ldots,$ として、$(\widetilde{c}(1/2),\widetilde{k}(1/2))=(c_t(1/2),k_t(1/2))_{t=1}^\infty$ とすると、$A.4$ の f の凹性より、$c_t(1/2)+k_{t+1}(1/2)=1/2c_t^*+1/2c_t'+1/2k_{t+1}^*+1/2k_{t+1}'=1/2(c_t^*+k_{t+1}^*)+1/2(c_t'+k_{t+1}')=1/2f(k_t^*)+1/2f(k_t')\leqq f(1/2k_t^*+1/2k_t')=f(k_t(1/2)), t=0,1,2,\ldots,$ となって、$(\widetilde{c}(1/2),\widetilde{k}(1/2))$ は k_0 より実行可能となって、$(\widetilde{c}(1/2),\widetilde{k}(1/2))\in\Pi(k_0)$ となる。[8] すると、$A.2$ の u の凹性と強凹性より、$1/2u(c_t^*)+1/2u(c_t')\leqq u(1/2c_t^*+1/2c_t'), 1/2u(c_t^*)+1/2u(c_t')<u(1/2c_t^*+1/2c_t'),$ より、$U(\widetilde{c}(1/2))=\sum_{t=0}^\infty\beta^t u(c_t(1/2))=\sum_{t=0}^\infty\beta^t u(1/2c_t^*+1/2c_t')=\sum_{t\neq\tau}\beta^t u(1/2c_t^*+1/2c_t')+\beta^\tau u(1/2c_\tau^*+1/2c_\tau')>\sum_{t\neq\tau}\beta^t[1/2u(c_t^*)+1/2u(c_t')]+\beta^\tau[1/2u(c_\tau^*)+1/2u(c_\tau')]=1/2\sum_{t=0}^\infty\beta^t u(c_t^*)+1/2\sum_{t=0}^\infty\beta^t u(c_t')=1/2U(\widetilde{c^*})+1/2U(\widetilde{c'})=U(\widetilde{c^*})$ となって、$\widetilde{c^*}$ の最適性に矛盾が起こる。[9] 故に、$(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})=(\widetilde{c'},\widetilde{k'})$ となって、最適経路は一意的である。

次に、$A.3$ と $A.4$ に基づいて最適経路 $(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})$ の内部性を示す。まず、$k_0>0$ より $c_t^*=0, t=0,1,2,\ldots,$ とならないことに注意する。実際、$c_t^*=0, t=0,1,2,\ldots.$ として、$c_0=k_0>0, c_t=0, t=1,2,\ldots, k_t=0, t=1,2,\ldots.$ とすると、$(\widetilde{c},\widetilde{k})\in\Pi(k_0)$ であるが、$U(\widetilde{c^*})=\sum_{t=0}^\infty\beta^t u(c_t^*))=\sum_{t=0}^\infty\beta^t u(0)=0<u(k_0)=u(c_0)=\sum_{t=0}^\infty\beta^t u(c_t)=U(\widetilde{c}))$ となって、$\widetilde{c^*}$ の最適性に矛盾するからである。これより、$\exists\tau\geqq 0,1,2,\ldots, c_\tau^*>0$ となる。すると、$0<c_\tau^*+k_{\tau+1}^*=f(k_\tau^*)$ より $k_\tau^*>0$ となるが、$0<c_{\tau-1}^*+k_\tau^*=f(k_{\tau-1}^*)$ より $k_{\tau-1}^*>0$ となるので、帰納的に考えると、$k_t^*>0, t=0,1,2,\ldots,\tau$ となる。$\tau=0$ と $\tau\geqq 1,2,\ldots,$ のケースがあるが、まずが後者を考える。$c_\tau^*>0$ と $0<c_\tau^*+k_{\tau+1}^*=f(k_t^*)$ より $k_t^*>0$ であり、$0<c_{\tau-1}^*+k_t^*=f(k_{t-1}^*)$ となるので、$k_{t-1}^*>0$ である。今 $c_{\tau-1}^*=0$ として、$(\tau-1)$ 期と τ 期の消費とと τ 期と $(\tau+1)$ 期の資本のみを以下のように変更した経路 $(\widetilde{c},\widetilde{k})$ を考える。$\varepsilon>0$ を $k_t^*-\varepsilon>0, f(k_t^*-\varepsilon)-k_{\tau+1}^*>0$ となる十分に小さい数として、$c_{\tau-1}=\varepsilon, k_\tau=k_\tau^*-\varepsilon>0, c_\tau=f(k_t^*-\varepsilon)-k_{\tau+1}^*>0$ とする。すると、$(\tau-1)$ 期に $k_{\tau-1}^*$ から $\tau+1$ 期に $k_{\tau+1}^*$ に戻るので、$(\widetilde{c},\widetilde{k})$ は k_0 から実現可能で、$(\widetilde{c},\widetilde{k})\in\Pi(k_0)$ である。そこで、$\Delta U_\varepsilon=U(\widetilde{c})-U(\widetilde{c^*})=\sum_{t=0}^\infty\beta^t u(c_t)-\sum_{t=0}^\infty\beta^t u(c_t^*))=\beta^{\tau-1}(u(c_{\tau-1})-u(c_{\tau-1}^*))+\beta^\tau(u(c_t)-u(c_t^*))$ とすると、$\Delta U_\varepsilon/\beta^{\tau-1}=(u(c_{\tau-1})-u(c_{\tau-1}^*))+\beta(u(c_t)-u(c_t^*))\geqq u'(c_{\tau-1})(c_{\tau-1}-c_{\tau-1}^*)+\beta(u'(c_t)(c_t-c_t^*)=u'(\varepsilon)\varepsilon+\beta(u'(c_t)(f(k_t^*-\varepsilon)-k_{\tau+1}^*-(f(k_t^*)-k_{\tau+1}^*))=u'(\varepsilon)\varepsilon+\beta(u'(c_t)(f(k_t^*-\varepsilon)-f(k_t^*))$ となる。[10] 更に、$\Delta U_\varepsilon/\varepsilon\beta^{\tau-1}\geqq u'(\varepsilon)+\beta(u'(c_t)(f(k_t^*-$

---

[8] 一般的には $\Pi(k_0)$ の凸性が成立する。今、$(\widetilde{c},\widetilde{k}),(\widetilde{c'},\widetilde{k'})\in\Pi(k_0)$ を k_0 からの異なる二つの最適経路として、$\lambda\in(0,1)$ に対して、$c_t(\lambda)=\lambda c_t+(1-\lambda)c_t', k_t(\lambda)=\lambda k_t+(1-\lambda)k_t', t=0,1,2,\ldots,$ ととして、$(\widetilde{c}(\lambda),\widetilde{k}(\lambda))=(c_t(\lambda),k_t(\lambda))_{t=1}^\infty$ とすると、$A.4$ の f の凹性より、$c_t(\lambda)+k_{t+1}(\lambda)=\lambda c_t+(1-\lambda)c_t'+\lambda k_{t+1}+(1-\lambda)k_{t+1}'=\lambda(c_t+k_{t+1})+(1-\lambda)(c_t'+k_{t+1}')\leqq\lambda f(k_t)+(1-\lambda)f(k_t')\leqq f(\lambda k_t+(1-\lambda)k_t')=f(k_t(\lambda)), t=0,1,2,\ldots,$ となって、$(\widetilde{c}(\lambda),\widetilde{k}(\lambda))$ は k_0 より実行可能となって、$(\widetilde{c}(\lambda,\widetilde{k}(\lambda))\in\Pi(k_0)$ となる。これより、$\Pi^c(k_0)$ や $\Pi^k(k_0)$ の凸性も成立する。

[9] $0\leqq U(\widetilde{c^*})=\sum_{t=0}^\infty\beta^t u(c_t^*))<\infty$ でないとこのことが成立しないことに注意。もしも $0\leqq U(\widetilde{c^*})=\sum_{t=0}^\infty\beta^t u(c_t^*))=\infty$ であれば、$U(\widetilde{c^*})=\sum_{t=0}^\infty\beta^t u(c_t^*))=U(\widetilde{c}(1/2))=\sum_{t=0}^\infty\beta^t u(c_t(1/2))=\infty$ でであり、$U(\widetilde{c^*})<U(\widetilde{c}(1/2))$ は成立しない。

[10] u の凹性より、$(u(y)-u(x)\leqq u'(x)(y-x)$ となり、$(u(x)-u(y)\geqq u'(x)(x-y)$ となるので、ここで、

$\varepsilon) - f(k_t^*))/\varepsilon \to u'(0) - \beta(u'(c_t^*)f'(k_t^*) = \infty(\varepsilon \to 0)$ となるので、十分に小さい $\varepsilon > 0$ に対して $\Delta U_\varepsilon/\varepsilon\beta^{\tau-1} > 0$ となって、$U(\widetilde{c}) - U(\widetilde{c^*}) > 0$ となり、$\widetilde{c^*}$ の最適性に矛盾する。[11]　これより、$c_{\tau-1}^* > 0$ となり、故に、帰納的に考えると、$c_t^* > 0, t = 0, 1, 2, \ldots, \tau$ となる。

次に、$k_{\tau+1}^* > 0$ を示す。$k_{\tau+1}^* = 0$ とすると、$c_\tau^* = f(k_t^*) > 0, c_{\tau+1}^* + k_{t+2}^* = f(k_{t+1}^*) = f(0) = 0$ となるので $c_{\tau+1}^* = k_{t+2}^* = 0$ となる。そこで、τ 期と $(\tau+1)$ 期の消費と $(\tau+1)$ 期の資本のみを以下のように変更した経路 $(\widetilde{c}, \widetilde{k})$ を考える。$\varepsilon > 0$ を $c_t^* - \varepsilon > 0$ となる十分に小さい数として、$k_\tau = k_\tau^*, k_{\tau+1} = \varepsilon > 0, c_\tau = c_t^* - \varepsilon = f(k_\tau^*) - \varepsilon > 0, c_{\tau+1} = f(k_{\tau+1}) = f(\varepsilon) > 0, k_{\tau+2} = k_{\tau+2}^* = 0$ とする。すると、τ 期の $k_\tau = k_\tau^*$ から $(\tau+2)$ 期に $k_{\tau+2} = k_{\tau+2}^*$ に戻るので、$(\widetilde{c}, \widetilde{k})$ は k_0 から実現可能で、$(\widetilde{c}, \widetilde{k}) \in \Pi(k_0)$ である。そこで、$\Delta U_\varepsilon = U(\widetilde{c}) - U(\widetilde{c^*}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) - \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^*)) = \beta^\tau(u(c_\tau) - u(c_\tau^*)) + \beta^{\tau+1}(u(c_{t+1}) - u(c_{t+1}^*)) = \beta^\tau(u(f(k_\tau^*) - \varepsilon) - u(f(k_\tau^*)) + \beta^{\tau+1}(u(f(\varepsilon)) - u(0))$ とすると、$\Delta U_\varepsilon/\beta^\tau = (u(f(k_\tau^*) - \varepsilon) - u(f(k_\tau^*)) + \beta(u(f(\varepsilon)) - u(0)) \geqq -u'(f(k_\tau^*))\varepsilon + \beta u'(f(\varepsilon)f(\varepsilon)$ となる。[12]　更に、$\Delta U_\varepsilon/\varepsilon\beta^\tau \geqq -u'(f(k_\tau^*)) + \beta(u'(f(\varepsilon))f(\varepsilon)/\varepsilon \to -u'(f(k_\tau^*)) + \beta(u'(0)f'(0) = \infty(\varepsilon \to 0)$ となるので、十分に小さい $\varepsilon > 0$ に対して $\Delta U_\varepsilon/\varepsilon\beta^\tau > 0$ となって、$U(\widetilde{c}) - U(\widetilde{c^*}) > 0$ となり、$\widetilde{c^*}$ の最適性に矛盾する。[13]　これより、$k_{\tau+1}^* > 0$ となる。

更に、$c_{\tau+1}^* > 0$ を示す。$c_{\tau+1}^* = 0$ とすると、$c_\tau^* + k_{t+1}^* = f(k_t^*) > 0, k_{t+2}^* = f(k_{t+1}^*) > 0$ となるが、そこで、τ 期と $(\tau+1)$ 期の消費と $(\tau+1)$ 期の資本のみを以下のように変更した経路 $(\widetilde{c}, \widetilde{k})$ を考える。$c_\tau^* > 0$ より $\varepsilon > 0$ を $c_\tau^* - \varepsilon > 0$ となる十分に小さい数として、$k_\tau = k_\tau^*, k_{\tau+1} = k_{\tau+1}^* + \varepsilon > 0, c_\tau = c_\tau^* - \varepsilon > 0, c_{\tau+1} = f(k_{\tau+1}) - k_{\tau+2} = f(k_{\tau+1}^* + \varepsilon) - f(k_{\tau+1}^*) > 0, k_{\tau+2} = k_{\tau+2}^* = f(k_{\tau+1}^*) > 0$ とする。すると、τ 期の $k_\tau = k_\tau^*$ から $(\tau+2)$ 期に $k_{\tau+2} = k_{\tau+2}^*$ に戻るので、$(\widetilde{c}, \widetilde{k})$ は k_0 から実現可能で、$(\widetilde{c}, \widetilde{k}) \in \Pi(k_0)$ である。そこで、$\Delta U_\varepsilon = U(\widetilde{c}) - U(\widetilde{c^*}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) - \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^*)) = \beta^\tau(u(c_\tau) - u(c_\tau^*)) + \beta^{\tau+1}(u(c_{t+1}) - u(c_{t+1}^*)) = \beta^\tau(u(c_\tau^* - \varepsilon) - u(c_\tau^*)) + \beta^{\tau+1}(u(f(k_{\tau+1}^* + \varepsilon) - f(k_{\tau+1}^*)) - u(0)$ とすると、$\Delta U_\varepsilon/\beta^\tau = (u(c_\tau^* - \varepsilon) - u(c_\tau^*)) + \beta(u(f(k_{\tau+1}^* + \varepsilon) - f(k_{\tau+1}^*)) - u(0)) \geqq -u'(c_\tau^* - \varepsilon)\varepsilon + \beta u'(f(k_{\tau+1}^* + \varepsilon) - f(k_{\tau+1}^*))(f(k_{\tau+1}^* + \varepsilon) - f(k_{\tau+1}^*))$ となる。[14]　更に、$\Delta U_\varepsilon/\varepsilon\beta^\tau \geqq -u'(c_\tau^* - \varepsilon) + \beta(u'(f(k_{\tau+1}^* + \varepsilon) - f(k_{\tau+1}^*))(f(k_{\tau+1}^* + \varepsilon) - f(k_{\tau+1}^*))/\varepsilon \to -u'(c_\tau^*)) + \beta u'(0)f'(k_{\tau+1}^*) = \infty(\varepsilon \to 0)$ となるので、十分に小さい $\varepsilon > 0$ に対して $\Delta U_\varepsilon/\varepsilon\beta^\tau > 0$ となって、$U(\widetilde{c}) - U(\widetilde{c^*}) > 0$ となり、$\widetilde{c^*}$ の最適性に矛盾する。[15]　これより、$c_{\tau+1}^* > 0$ となる。すると、帰納的に考えると、$c_t^* > 0, t = \tau, \tau+1, \tau+2, \ldots,$ となって、$c_t^* > 0, t = 0, 1, 2, \ldots,$ となる。また、$k_t^* > 0, t = \tau+1, \tau+2, \ldots,$ となって、$k_t^* > 0, t = 0, 1, 2, \ldots,$ となる。これより、$(c_t^*, k_t^*) > 0, t = 0, 1, 2, \ldots,$ となって、$(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*})$ に内部性が成立する。

最後に、上で示した最適経路 $(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*})$ の内部性を利用して、最適経路 $(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*})$ 上でオイラー方程式が成立することを示す。まず、$c_t^* > 0, k_t^* > 0, t = 0, 1, 2, \ldots,$ より、$0 < k_{\tau+1}^* < f(k_t^*), t = 0, 1, 2, \ldots,$ となるので、k_t^* と k_{t+2}^* を固定して y を $k_{\tau+1}^*$ の十分に小さい $\varepsilon-$ 近

$x = c_{\tau-1}(c_\tau), y = c_{\tau-1}^*(c_\tau^*)$ としている。

[11] $A.3$ の稲田条件より、$u'(\varepsilon) \to u'(0) = \infty(\varepsilon \to 0)$、また、$c_t = f(k_t^* - \varepsilon) - k_{t+1}^* \to f(k_t^*) - k_{t+1}^* = c_t^*(\varepsilon \to 0)$、更に、$A.4$ より $(f(k_t^* - \varepsilon) - f(k_t^*))/\varepsilon \to -f''(k_t^*) > 0(\varepsilon \to 0)$ となることを利用している。

[12] u の凹性に関する前注参照。

[13] まず、$c_t^* = f(k_t^*) > 0$ より $0 \leqq u'(f(k_t^*) < \infty$ であり、また、$A.3$ の稲田条件より、$u'(f(\varepsilon)) \to u'(0) = \infty(\varepsilon \to 0)$、更に、$A.4$ より $f(\varepsilon)/\varepsilon \to f''(0) > 0(\varepsilon \to 0)$ となることを利用している。

[14] u の凹性に関する前注同様。

[15] まず、$c_t^* > 0$ より $0 \leqq u'(c^*) < \infty$ であり、また、$A.3$ の稲田条件より、$u'(f(k_{t+1}^* + \varepsilon) - f(k_{t+1}^*)) \to u'(0) = \infty(\varepsilon \to 0)$、更に、$A.4$ と $k_{t+1}^* > 0$ より $(f(k_{t+1}^* + \varepsilon) - f(k_{t+1}^*))/\varepsilon \to f''(k_{t+1}^*) > 0(\varepsilon \to 0)$ となることを利用している。

傍内 $B_\varepsilon(k^*_{\tau+1})$ の点とすると、$A.4$ の f の連続性より、$|y-k^*_{\tau+1}|<\varepsilon, 0<y<f(k^*_t), 0<k^*_{\tau+2}<f(y)$ とできる。そこで、最適経路 $(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})$ の t 期の消費、$t+1$ 期の消費、$t+1$ 期の資本のみを $c_t=f(k^*_t)-y, c_{t+1}=f(y)-k^*_{\tau+2}, k_{\tau+2}=y$ へ変更した経路 $(\widetilde{c},\widetilde{k})$ を考えると、τ 期の k^*_τ から $(\tau+2)$ 期に $k^*_{\tau+2}$ に戻るので、$(\widetilde{c},\widetilde{k})$ は k_0 から実現可能で、故に、$0 \geqq U(\widetilde{c})-U(\widetilde{c^*})=\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)-\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c^*_t))=\beta^\tau(u(c_\tau)-u(c^*_\tau))+\beta^{\tau+1}(u(c_{t+1})-u(c^*_{t+1}))=\beta^\tau(u(f(k^*_t)-y)-u(u(f(k^*_t)-k^*_{\tau+1}))+\beta^{\tau+1}(u(f(y)-k^*_{\tau+2})-u(f(k^*_{t+1})-k^*_{\tau+2}))$ となり、$\beta^\tau u(u(f(k^*_t)-k^*_{\tau+1}))+\beta^{\tau+1}u(f(k^*_{t+1})-k^*_{\tau+2}))\geqq\beta^\tau(u(f(k^*_t)-y)+\beta^{\tau+1}(u(f(y)-k^*_{\tau+2}),\forall y\in B_\varepsilon(k^*_{\tau+1})$ となる。そこで $G(y)=\beta^\tau(u(f(k^*_t)-y)+\beta^{\tau+1}(u(f(y)-k^*_{\tau+2}),\forall y\in B_\varepsilon(k^*_{\tau+1})$ とすると、$G(k^*_{\tau+1})\geqq G(y)\forall y\in B_\varepsilon(k^*_{\tau+1})$ であり、G は $k^*_{\tau+1}$ において最大値を実現する。すると、$A.2$ の u の微分可能性より G も微分可能なので、最大の一階条件より、$G'(k^*_{\tau+1})=0$ となるが、$G'(y)=-\beta^t u'(f(k^*_t)-y)+\beta^{\tau+1}u'(f(y)-k^*_{\tau+2})f'(y)$ なので、$G'(k^*_{\tau+1})=-\beta^t u'(f(k^*_t)-k^*_{t+1})+\beta^{\tau+1}u'(f(k^*_{t+1})-k^*_{\tau+2})f'(k^*_{t+1})=0$ であり、故に、$\beta^t u'(c^*_t)=\beta^t u'(f(k^*_t)-k^*_{t+1})=\beta^{t+1}u'(f(k^*_{t+1})-k^*_{\tau+2})f'(k^*_{t+1})=\beta^{t+1}u'(c^*_{t+1})f'(k^*_{t+1})$ となって、$u'(c^*_t)=u'(f(k^*_t)-k^*_{t+1})=\beta u'(f(k^*_{t+1})-k^*_{\tau+2})f'(k^*_{t+1})=\beta u'(c^*_{t+1})f'(k^*_{t+1}), t=0,1,2,\ldots,$ となり、最適経路 $(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})$ 上でオイラー方程式が成立する。

6　価値関数とその性質

既に見てきたように、$A.1, A.2, A.4$ の下では、初期資本ストック $k_0(\geqq 0)$ から一意的な最適経路 $(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})$ が存在するので、$V(k_0): R_+\to R_+$ を $V(k_0)=\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c^*_t))=U(\widetilde{c^*})=\max U(\widetilde{c})=\max\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)$ として定義して、これを価値関数 $(Value\ Function)$ という。ここでは、この価値関数の性質を見ていくことにする。$k_0=0$ であれば $c^*_t=0, t=0,1,2,\ldots,$ となり、$A.2$ より $u(0)=0$ なので、$V(k_0)=U(\widetilde{c^*})=\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c^*_t))=0$ である。一方、$k_0>0$ であれば $c_t=k_0, c_t=0, k_t=0, t=1,2,\ldots,$ という実行可能な経路 $(\widetilde{c},\widetilde{k})$ を考えれば、$A.2$ より $c>0\to u(c)>0$ なので、$V(k_0)=U(\widetilde{c^*})=\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c^*_t)\geqq\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)=u(k_0)>0$ となる。また、$c^{1*}_t=c^*_{t+1}, k^{1*}_t=k^*_{t+1}, t=0,1,2,\ldots,$ として $(\widetilde{c^{1*}},\widetilde{k^{1*}})=(c^{1*}_t,k^{1*}_t)^\infty_{t=0}=(c^*_{t+1},k^*_{t+1})^\infty_{t=0}$ とすると、初期資本ストック $k_0(\geqq 0)$ から最適経路 $(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})$ に関しては、その1期からの経路 $(\widetilde{c^{1*}},\widetilde{k^{1*}})=(c^{1*}_t,k^{1*}_t)^\infty_{t=0}=(c^*_{t+1},k^*_{t+1})^\infty_{t=0}$ が $k^*_1(\geqq 0)$ を初期資本ストックとする最適経路となり、$V(k_1)=U(\widetilde{c^{1*}})=\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c^{1*}_t)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c^*_{t+1})$ となる。実際、$(\widetilde{c^{1*}},\widetilde{k^{1*}})$ が $k_1(\geqq 0)$ を初期資本ストックとする最適経路でないとすると、$k^*_1(\geqq 0)$ から実行可能な経路 $(\widetilde{c'^*},\widetilde{k'^*}), k'^*_0=k^*_1$ に対して、$U(\widetilde{c'^*})=\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c'^*_t)>U(\widetilde{c^{1*}})=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c^{1*}_t)$ となるが、初期資本ストック $k_0(\geqq 0)$ から k^*_1 に移ってから $(\widetilde{c'^*},\widetilde{k'^*})$ に沿って動く経路は考えると、それは $k_0(\geqq 0)$ から実行可能で、$V(k_0)=U(\widetilde{c^*})=\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c^*_t)=u(c^*_0)+\sum_{t=1}^{\infty}\beta^t u(c^*_t)=u(c^*_0)+\beta\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c^*_{t+1})=u(c^*_0)+$

$\beta\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t^{1*}) < u(c_0^*) + \beta\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t'^{*})$ となるが、これは $(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*})$ が $k_0(\geqq 0)$ からの最適経路であることに矛盾する。故に、$(\widetilde{c^{1*}}, \widetilde{k^{1*}})$ は $k_1^*(\geqq 0)$ を初期資本ストックとする最適経路である。すると以下同様にして、初期資本ストック $k_0(\geqq 0)$ から最適経路 $(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*})$ に関して、その t 期からの経路 $(\widetilde{c^{t*}}, \widetilde{k^{t*}}) = (c_\tau^{t*}, k_\tau^{t*})_{\tau=0}^{\infty} = (c_{\tau+t}^*, k_{\tau+t}^*)_{\tau=0}^{\infty}$ が $k_t^*(\geqq 0)$ を初期資本ストックとする最適経路となり、$V(k_1^*) = U(\widetilde{c^{t*}}) = \sum_{\tau=0}^{\infty}\beta^\tau u(c_\tau^{t*}) = \sum_{\tau=0}^{\infty}\beta^\tau u(c_{t+\tau}^*)$ となる。これより、最適経路の途中からの経路もその途中経路の始まりの資本ストックを初期資本とする最適経路となっている。なお、最適経路に関するこの性質のことを最適性原理 $(Principle\ of\ Optimality)$ という。この時、$V(k_0) = U(\widetilde{c^*}) = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t^*) = u(c_0^*) + \sum_{t=1}^{\infty}\beta^t u(c_t^*) = u(c_0^*) + \beta\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_{t+1}^*) = u(c_0^*) + \beta\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t^{1*}) = u(c_0^*) + \beta V(k_1)$ となる。

最初に $V(k_0)$ の強単調増加性を示す。$k_0(\geqq 0) < k_0'$ とする。$k_0 = 0 < k_0'$ とすると、上で見たように、$V(k_0) = 0 < V(k_0')$ となるので、$0 < k_0 < k_0'$ とする。$\widetilde{c^*} \in \Pi^c(k_0)$ を k_0 からの最適消費経路、$\widetilde{c^{*\prime}} \in \Pi^c(k_0')$ を k_0' からの最適消費経路として、k_0' からの一つの消費経路 $\widetilde{c} \in \Pi^c(k_0')$ を $c_0' = c_0^* + (k_0' - k_0) > c_0^*, c_t = c_t^*, k_t = k_t^*, t = 1, 2, \ldots.$ とすると、$V(k_0') = U(\widetilde{c^{*\prime}}) \geqq U(\widetilde{c})$ なので、$V(k_0') - V(k_0) = U(\widetilde{c^{*\prime}}) - U(\widetilde{c^*}) \geqq U(\widetilde{c}) - U(\widetilde{c^*}) = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)) - \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t^*)) = u(c_0) - u(c_0^*) > 0$ より、$V(k_0') > V(k_0)$ となって、強単調増加性が成立する。

次に、V の強凹性を示す。まずは V の凹性を示す。今、$k_0 \neq k_0'(\geqq 0), (\widetilde{c}, \widetilde{k}) \in \Pi(k_0)$ を k_0 から最適経路、$(\widetilde{c'}, \widetilde{k'}) \in \Pi(k_0')$ を k_0' からの最適経路として、$\lambda \in (0, 1)$ として、$k_t^\lambda = \lambda k_t + (1 - \lambda)k_t'(\geqq 0), c_t^\lambda = \lambda c_t + (1-\lambda)c_t'(\geqq 0), t = 0, 1, 2, \ldots.$ として $(\widetilde{c^\lambda}, \widetilde{k^\lambda}) = (c_t^\lambda, k_t^\lambda)_{t=0}^{\infty}$ とする。$A.4$ の f の凹性と資源制約条件より、$c_t^\lambda + k_{t+1}^\lambda = \lambda c_t + (1-\lambda)c_t' + \lambda k_{t+1} + (1-\lambda)k_{t+1}' = \lambda(c_t + k_{t+1}) + (1-\lambda)(c_t' + k_{t+1}') \leqq \lambda f(k_t) + (1-\lambda)f(k_t') \leqq f(\lambda k_t + (1-\lambda)k_t') = f(k_t(\lambda)), t = 0, 1, 2, \ldots,$ となって、$(\widetilde{c^\lambda}, \widetilde{k^\lambda})$ は k_0^λ より実行可能となって、$(\widetilde{c^\lambda}, \widetilde{k^\lambda}) \in \Pi(k_0^\lambda)$ となり、$\widetilde{c^\lambda} \in \Pi^c(k_0^\lambda), \widetilde{k^\lambda} \in \Pi^k(k_0^\lambda)$ となる。すると、$A.2$ の u の凹性と価値関数の性質より、$V(k_0^\lambda) \geqq \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t^\lambda) \geqq \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t[\lambda u(c_t') + (1 - \lambda)u(c_t')] = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t') + \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(1 - \lambda)u(c_t') = \lambda V(k_0) + (1 - \lambda)V(k_0')$ となって、V の凹性が成立する。更に、V の強凹性もが成立する。$k_0'(= 0) < k_0$ とすると、$(\widetilde{c'}, \widetilde{k'}) \in \Pi(k_0')$ ならば $c_t' = 0, k_t' = 0, t = 0, 1, 2, \ldots.$ となる。また、k_0 からの最適経路 $(\widetilde{c}, \widetilde{k}) \in \Pi(k_0)$ とすると、$k_0 > 0$ より $c_t > 0, k_t > 0, t = 0, 1, 2, \ldots.$ であり、$c_t' \neq c_t, k_t' \neq k_t, t = 0, 1, 2, \ldots.$ となる。$\lambda \in (0, 1)$ として、$k_t^\lambda = \lambda k_t + (1 - \lambda)k_t'(\geqq 0), c_t^\lambda = \lambda c_t + (1 - \lambda)c_t'(\geqq 0), t = 0, 1, 2, \ldots.$ とすると、$A.2$ の u の強凹性より $u(c_t^\lambda) > [\lambda u(c_t) + (1 - \lambda)u(c_t')], t = 0, 1, 2, \ldots.$ となる。また、$(\widetilde{c^\lambda}, \widetilde{k^\lambda}) = (c_t^\lambda, k_t^\lambda)_{t=0}^{\infty}$ とすると、$(\widetilde{c^\lambda}, \widetilde{k^\lambda})$ は k_0^λ より実行可能となって、$(\widetilde{c^\lambda}, \widetilde{k^\lambda}) \in \Pi(k_0^\lambda)$ となり、$\widetilde{c^\lambda} \in \Pi^c(k_0^\lambda), \widetilde{k^\lambda} \in \Pi^k(k_0^\lambda)$ となる。すると、価値関数 V の性質より、$V(k_0^\lambda) \geqq \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t^\lambda) > \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t[\lambda u(c_t') + (1 - \lambda)u(c_t')] = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t') + \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(1 - \lambda)u(c_t') = \lambda V(k_0) + (1 - \lambda)V(k_0')$

となって、このケースの V の強凹性が成立する。[16]　次に、$k_0, k'_0 > 0, k_0 \neq k'_0$ とすると、$k_0, k'_0 > 0$ より $c_t, c'_t > 0, k_t, k'_t > 0, t = 0,1,2,\ldots$ であり、$\exists t = 0,1,2,\ldots, c'_t \neq c_t$ となる。もしもそうでなくて $c'_t = c_t, \forall t = 0,1,2,\ldots,$ とすると、特に、$c_0 = f(k_0) - k_1 = c'_0 = f(k'_0) - k'_1, c_1 = f(k_1) - k_2 = c'_1 = f(k'_1) - k'_2$ である。[17]　オイラー方程式より、$u'(c_0) = \beta u'(c_1) f'(k_1), u'(c'_0) = \beta u'(c'_1) f'(k'_1)$ であるが、$c_0 = c'_0, c_1 = c'_1$ より $f'(k_1) = f'(k'_1)$ となり、$f' > 0, f'' < 0$ より $k_1 = k'_1$ である。すると $c_0 = c'_0$ となって $k_0 = k'_0$ となる。しかし、これは $k_0 \neq k'_0$ に矛盾するので、$\exists \tau = 0,1,2,\ldots, c'_\tau \neq c_\tau$ となる。するとこの τ では、$A.2$ の u の強凹性より $u(c^\lambda_\tau) > [\lambda u(c_\tau) + (1-\lambda) u(c'_\tau)]$ であり、また、u の凹性より $u(c^\lambda_t) > [\lambda u(c_t) + (1-\lambda) u(c'_t)], \forall t = 0,1,2,\ldots,$ となる。すると、$k_0 = 0$ のケースと同様に、価値関数 V の性質より、$V(k^\lambda_0) \geqq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c^\lambda_t) > \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\lambda u(c'_t) + (1-\lambda) u(c'_t)] = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c'_t) + \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (1-\lambda) u(c'_t) = \lambda V(k_0) + (1-\lambda) V(k'_0)$ となり、このケースでも V の強凹性が成立する。[18]

V の連続性の成立を示す。V の凹性より V は定義域 R_+ の内部の R_{++} 上で連続となるので、V が $k = 0$ で連続なことを示せばよい。[19]　$k^n_0 \to 0 (n \to \infty)$ とすると、$0 < \overline{k}$ より $(0 <) k^n_0 < \overline{k}, n = 1,2,\ldots$ としてよい。$(\widetilde{c^n}, \widetilde{k^n}) \in \Pi(k^n_0)$ を k^n_0 からの最適経路、$n = 1,2,\ldots$ とする。$c^n_t, k^n_t > 0, t = 1,2,\ldots, n = 1,2,\ldots$ である。$0 < c^n_0, k^n_1 < f(k^n_0) < f(\overline{k}) = \overline{k}, n = 1,2,\ldots,$ となるので、$0 < c^n_1, k^n_2 < f(k^n_1) < f^2(k^n_0) < f^2(\overline{k}) = \overline{k}, n = 1,2,\ldots,$ となり、同様にして、$0 < c^n_t, k^n_{t+1} < f(k^n_t) < f^t(k^n_0) < f^t(\overline{k}) = \overline{k}, n = 1,2,\ldots, t = 0,1,2,\ldots,$ となる。すると、$T = 1,2,\ldots,$ を任意に一つ固定すると、$\sum_{t=T}^{\infty} \beta^t u(c^n_t) \leqq \sum_{t=T}^{\infty} \beta^t u(f(k^n_t)) \leqq \sum_{t=T}^{\infty} \beta^t u(f(\overline{k})) = \beta^T u(f(\overline{k}))/(1-\beta) < +\infty, n = 1,2,\ldots$ となる。今、$\varepsilon > 0$ を任意に所与として T_ε を $\sum_{t=T}^{\infty} \beta^t u(c^n_t) \leqq \beta^T u(f(\overline{k}))/(1-\beta) < \varepsilon/2, n = 1,2,\ldots$ となるように選ぶ。$t = 0,1,2,\ldots,, T$ については、f の連続性より f^t も連続なので、$k^n_0 \to 0 (n \to \infty)$ より

[16] $0 \leqq U(\widetilde{c}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)) < \infty$ でないとこのことが成立しないことに注意。もしも $0 \leqq U(\widetilde{c}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)) = V(k_0) = \infty$ であれば、$V(k^\lambda_0) \geqq \lambda V(k_0) + (1-\lambda) V(k'_0) = \infty$ となって、強い不当式 $>$ では成立しない。$V(k_0) = \infty$ のケースでは、追い越し基準 (*Overtaking Criterion*) や追い付き基準 (*Catching up Criterion*) を用いる必要がある。

[17] $A.2$ の u の単調性より最適経路では資源制約が等号で満たされる。

[18] ここでも前注が適用される。

[19] 凸関数 $f; X \to R, X(\neq \emptyset)(\subset R^l)$, 凸開集合の連続性は以下のように示せる。$\overline{x} \in X$ に対して $\exists \gamma > 0$, 十分に小さい、$\overline{x}$ を内点とする各辺の幅が γ の l 次元単体 C が存在して X に含まれる。この時、C の各点は C の $(i+1)$ 個の頂点の凸一次結合として一意的に表現される。すると、C の $(l+1)$ 個の頂点の f の値の最大値を M とすると、f の凸性より C の各点 x に対して $f(x) \lessapprox M$ となる。さて、$\overline{x}$ は C の内点なので $\delta > 0$, 十分に小さい、$B_\delta(\overline{x}) \subset C$ となる。今 $x \in B_\delta(\overline{x}), x \neq \overline{x}, ||x - \overline{x}|| < \delta$ として、線分 $x\overline{x}$ の延長上で $B_\delta(\overline{x})$ の境界上の点を y, z とすると、$y = \overline{x} + (x - \overline{x})\delta/||x - \overline{x}||, z = \overline{x} - (x - \overline{x})\delta/||x - \overline{x}||$ と表現される。すると、x は y と $\overline{x}$ の凸結合として、$\lambda = ||x - \overline{x}||/\delta \in (0,1)$ とすると、$x = \lambda y + (1-\lambda)\overline{x}$、$\overline{x}$ は x と z の凸結合として、$\lambda = ||x - \overline{x}||/\delta \in (0,1)$ とすると、$\overline{x} = x/(1+\lambda) + \lambda z/(1+\lambda)$ となる。すると、f の凸性より $f(x) \leqq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(\overline{x}) \leqq \lambda(M - f(\overline{x})) + f(\overline{x})$ となって , $f(x) - f(\overline{x}) \leqq \lambda(M - f(\overline{x}))$ となり、また、$f(\overline{x}) \leqq f(x)/(1+\lambda) + \lambda f(z)/(1+\lambda) \leqq f(x)/(1+\lambda) + \lambda M/(1+\lambda)$ となって、$(1+\lambda) f(\overline{x}) \leqq f(x) + \lambda M$ となり、$-\lambda(M - f(\overline{x})) \leqq f(x) - f(\overline{x})$ となって、$f(\overline{x}) - f(x) \leqq \lambda(M - f(\overline{x}))$ となる。これより、$|f(x) - f(\overline{x})| \leqq \lambda(M - f(\overline{x})) = [(M - f(\overline{x}))/\delta]||x - \overline{x}||$ となって、$x \to \overline{x} \Rightarrow f(x) \to f(\overline{x})$ となり、f の $\overline{x}$ における連続性が成立する。

$f^t(k_0^n) \to 0(n\to\infty)$ となり、すると $0 \leqq f(k_t^n) \leqq f^t(k_0^n)$ より、$f(k_t^n) \to 0(n\to\infty)$ となる。これより $\displaystyle\sum_{t=0}^{T-1}\beta^t u(c_t^n) \leqq \sum_{t=0}^{T-1}\beta^t u(f(k_t^n)) \to 0(n\to\infty)$ となり、十分に大きい任意の n に対して、$\displaystyle\sum_{t=0}^{T-1}\beta^t u(c_t^n) \leqq \varepsilon/2$ となり、故に、十分に大きい任意の n に対して、$\displaystyle V(k_0^n) = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t^n) = \sum_{t=0}^{T-1}\beta^t u(c_t^n) + \sum_{t=T}^{\infty}\beta^t u(c_t^n) < \varepsilon$ となって、V も $k=0$ で連続である。

$V : R_+ \to R_+$ は凹関数なので、$\partial V(k) = \{p \in R : V(k') - V(k) \leqq p(k'-k)\}$ を V の k における劣微分（$Subdiferential$）といい、$k>0$ において $\partial V(k)$ は非空凸コンパクトであり、ここでは $V_+(k)(V_-(k))$ を V の k における右側微分（左側微分）とすると、$\partial V(k) = [V_+(k), V_-(k)]$ となる。故に、$\#\partial V(k) = 1$ とすると、V は k において微分可能となり、$V'(k) = \partial V(k)$ となる。[20]

そこで V の微分可能性とそれに基づく包絡線定理（$Envelop\ Theorem$）を示す。$k_0 > 0$ に対して $(\widetilde{c}, \widetilde{k}) \in \Pi(k_0)$ を k_0 から最適経路とする。。$k_0 > 0$ より、$c_t, k_t > 0$ なので、$0 < c_t, k_{t+1} < f(k_t), t = 0,1,2,....$ となるが、特に、$0 < c_0, k_1 < f(k_0)$ である。f の連続性より $k_0' > 0$ を k_0 に十分に近いとすると、$0 < c_0, k_1 < f(k_0')$ とできるので、$c_0' = f(k_0') - k_1 (= f(k_0') - f(k_1) + c_0) > 0, c_t' = c_t, t = 1,2,...., k_t' = k_t, t = 1,2,....,$ とすると $(\widetilde{c'}, \widetilde{k'}) \in \Pi(k_0')$ であり、$\displaystyle V(k_0') \geqq \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t') = u(c_0') + \sum_{t=1}^{\infty}\beta^t u(c_t') = u(f(k_0') - k_1) + \sum_{t=1}^{\infty}\beta^t u(c_t) = u(f(k_0') - k_1) - u(c_0) + V(k_0) = u(c_0 + k_0' - k_0) - u(f(k_0) - k_1) + V(k_0)$ となり、$V(k_0') - V(k_0) \geqq u(f(k_0') - k_1) - u(f(k_0) - k_1)$ となる。そして、$p \in \partial V(k_0)$ とすると、$V(k_0') - V(k_0) \leqq p(k_0' - k_0)$ なので、$u(f(k_0') - k_1) - u(f(k_0) - k_1) \leqq p(k_0' - k_0)$ となり、u と f の凹性より $u(f)$ も凹なので $p \in \partial u(f)(k_0)$ となるが、u と f の微分可能性より $u(f)$ も微分可能なので $p = (u(f))'(k_0) = u'(f(k_0) - k_1)f'(k_0)$ であり、$\#\partial V(k_0) = 1$ となって、V は k_0 で微分可能であり、$V'(k_0) = u'(f(k_0) - k_1)f'(k_0)$ である。

7 価値関数とベルマン方程式の関係

ここでは、価値関数 V とベルマン方程式 ($Bellman\ Eqation$) や横断性条件 ($Transversality\ Condition$) との関係を議論する。価値関数 V がベルマン方程式を満たすとは、次の関係が成立することである。

$$V(k_0) = \max[u(f(k_0) - k) + \beta V(k)]\ s.t.\ 0 \leqq k \leqq f(k_0) \quad \forall k_0 \geqq 0^{21}$$

また、価値関数 V が横断性条件を満たすとは次の関係が成立することである。

$$\beta V(k_T) \to 0(T\to\infty) \quad \forall \widetilde{k} \in \Pi(k_0)$$

以下では価値関数 V がこれらの関係を満たす唯一の連続関数であることを示す。

[20] 凹関数の微分可能性については例えば以下を参照されたい。Rockafellar(1970,Thm 25.1, p.242) や Berkovitz(2002,Thm 3.1, p.106)。

[21] 以下では簡単に、$V(k_0) = \max[u(f(k_0) - k) + \beta V(k)]$ と記し、同様の記法を適用して同様の表現を記す。

まず、$(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})\in\Pi(k_0)$ を k_0 から最適経路とする。すると、$t=1$ から先の経路は初期資本ストック k_1^* から実現可能なので、価値関数の性質によって $\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_{t+1}^*)\leqq V(k_1^*)$ であり、資源制約より $k_1^*\in[0,f(k_0)]$ なので、$V(k_0)=U(\widetilde{c^*})=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t^*)=u(c_0^*)+\sum_{t=1}^{\infty}\beta^t u(c_t^*)=u(f(k_0)-k_1^*)+\beta\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_{t+1}^*)\leqq u(f(k_0)-k_1^*)+\beta V(k_1^*)\leqq \max[u(f(k_0)-k)+\beta V(k)]$ となる。一方、u と V の連続性より、$\exists k_1'\in[0,f(k_0)],[u(f(k_0)-k_1')+\beta V(k_1')=\max[u(f(k_0)-k)+\beta V(k)]$ となる。$(\widetilde{c''},\widetilde{k''})\in\Pi(k_0)$ を k_1' から最適経路とすると、$V(k_1')=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t''),k_0''=k_1'$ となり、また、$(k_0,k_1',k_1'',\ldots,f(k_0)-k_1',c_0'',c_1'',\ldots,)\in\Pi(k_0)$ は k_0 から実行可能経路で、その総効用は $u(f(k_0)-k_1')+\sum_{t=1}^{\infty}\beta^t u(c_{t-1}'')=u(f(k_0)-k_1')+\beta\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t'')=u(f(k_0)-k_1')+\beta V(k_1')[=\max[u(f(k_0)-k)+\beta V(k)]]$ となるが、k_0 からの最適経路が $V(k_0)$ を実現するので、$u(f(k_0)-k_1')+\beta V(k_1')\leqq V(k_0)$ であり、故に、$V(k_0)=u(f(k_0)-k_1')+\beta V(k_1')=\max[u(f(k_0)-k)+\beta V(k)]$ となって、価値関数 V はベルマン方程式を満たす。

$(\widetilde{c},\widetilde{k})\in\Pi(k_0)$ を k_0 からの実行可能経路とする。すると、実行可能経路の有界性より、$0\leqq k_t\leqq A=\max[\overline{k},k_0],t=0,1,2,\ldots.$ であり、V の単調増加性より $0\leqq V(k_t)\leqq V(A),t=0,1,2,\ldots.$ なので、$0\leqq\beta^t V(k_t)\leqq\beta^t V(A)\to 0(t\to\infty)$ となって、横断性条件（TVC）が成立する。

次に、$W:R_+\to R_+$ を横断性条件を満たす連続関数でベルマン方程式を満たすとする。$k_0(\geqq 0)$ を任意の初期資本ストックとする。ベルマン方程式および u と W の連続性より、$W(k_0)=\max[u(f(k_0)-k)+\beta V(k)]=[u(f(k_0)-k_1')+\beta W(k_1'),\exists k_1'\in[0,f(k_0)]$ となる。次に、k_1' に対して同じ議論を適用すると、$W(k_1')=\max[u(f(k_1')-k)+\beta V(k_1')]=u(f(k_1')-k_2')+\beta W(k_2'),\exists k_2'\in[0,f(k_1')]$ となり、この $W(k_1')$ を $W(k_0)$ に代入すると、$W(k_0)=[u(f(k_0)-k_1')+\beta W(k_1')=u(f(k_0)-k_1')+\beta[u(f(k_1')-k_2')+\beta W(k_2')]=u(f(k_0)-k_1')+\beta u(f(k_1')-k_2')+\beta^2 W(k_2'),\exists k_2'\in[0,f(k_1')]$ となる。これを帰納的に t 期まで続けていくと、$W(k_0)=u(f(k_0)-k_1')+\beta u(f(k_1')-k_2')+\beta^2 u(f(k_2')-k_3')+\ldots\beta^{t-1}u(f(k_{t-1}')-k_t')+\beta^t W(k_t')=\sum_{t=0}^{t-1}\beta^t u(f(k_t')-k_t')+\beta^t W(k_t'),\exists k_t'\in[0,f(k_{t-1}')]$ となる。そしてこれを更に $t\to\infty$ とすると、$\exists\widetilde{k'}=(k_t')_{t=0}^{\infty}\in\Pi^k(k_0),k_0'=k_0,\beta^t W(k_t')\to 0(t\to\infty)$ となるが、$u(f(k_t')-k_t')(\geqq 0),t=0,1,2,\ldots,$ より $\sum_{t=0}^{t-1}\beta^t u(f(k_t')-k_t')(\geqq 0)(\leqq\sum_{t=0}^{t-1}\beta^t u(f(A)))$ は（非負）単調増加列なので、$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(f(k_t')-k_t')\leqq(\geqq 0)(\leqq\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(f(A))<+\infty)$ は収束して、$W(k_0)=\sum_{t=0}^{t-1}\beta^t u(f(k_t')-k_t')+\beta^t W(k_t')\to\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(f(k_t')-k_t')$ となり、$W(k_0)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(f(k_t')-k_t')$ となる。$\widetilde{k'}=(k_t')_{t=0}^{\infty}\in\Pi^k(k_0),k_0'=k_0$ と価値関数 V の性質より、$W(k_0)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(f(k_t')-k_t')\leqq V(k_0)$ となる。一方、$(\widetilde{c},\widetilde{k})\in\Pi(k_0)$ を k_0 からの最適経路として $V(k_0)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(f(k_t)-k_t)$ とする。W はベルマン方程式を満たし、$k_1\in[0,f(k_0)]$ なので、$W(k_0)=\max[u(f(k_0)-$

$k) + \beta W(k)] \geqq [u(f(k_0) - k_1) + \beta W(k_1)]$ である。同様に、$k_2 \in [0, f(k_1)]$ なので、$W(k_1) = \max[u(f(k_1) - k) + \beta W(k)] \geqq [u(f(k_1) - k_2) + \beta W(k_2)]$ であり、代入すると、$W(k_0) \geqq u(f(k_0) - k_1) + \beta u(f(k_1) - k_2) + \beta^2 W(k_2)$ となる。これを帰納的に t 期まで続けていくと、$W(k_0) \geqq u(f(k_0) - k_1) + \beta u(f(k_1) - k_2) + \beta^2 u(f(k_2) - k_3) + \ldots \beta^{t-1} u(f(k_{t-1}) - k_t) + \beta^t W(k_t) = \sum_{t=0}^{t-1} \beta^t u(f(k_t) - k_t) + \beta^t W(k_t)$ となる。そしてこれを更に $t \to \infty$ とすると、W は横断性条件を満たすので、$\widetilde{k} \in \Pi^k(k_0)$ より $\beta^t W(k_t) \to 0 (t \to \infty)$ となるが、$u(f(k'_t) - k'_t)(\geqq 0), t = 0, 1, 2, \ldots,$ より $\sum_{t=0}^{t-1} \beta^t u(f(k_t) - k_t) \to \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k'_t) - k'_t) = V(k_0)$ であることに注意すると、$W(k_0) \geqq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t) - k_t) = V(k_0)$ となる。これより、$W(k_0) = V(k_0), \forall k_0 \geqq 0$ となって、$V = W$ となり、価値関数 V がベルマン方程式の唯一の横断性条件を満たす連続関数である。[22]

さて、$\widetilde{k^*} \in \Pi^k(k_0)$ を k_0 から最適資本ストック経路とすると、$V(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k^*_t) - k^*_{t+1}) = u(f(k^*_t) - k^*_{t+1}) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t u(f(k^*_t) - k^*_{t+1}) = u(f(k^*_t) - k^*_{t+1}) + \beta \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k^*_{t+1}) - k^*_{t+2})$ となるが、$(k^*_1, k^*_2, \cdots) \in \Pi^k(k^*_1)$ は k^*_1 から実行可能な資本ストック経路なので、$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k^*_{t+1}) - k^*_{t+2}) \leqq V(k^*_1)$ であり、故に、$V(k_0) = u(f(k^*_0) - k^*_1) + \beta \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k^*_{t+1}) - k^*_{t+2}) \leqq u(f(k_0) - k^*_1) + \beta V(k^*_1)$ である。一方、$(k'_1, k'_2, k'_3, \cdots) \in \Pi^k(k^*_1), k'_1 = k^*_1,$ を k^*_1 から最適な資本ストック経路とすると、$V(k^*_1) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k'_{t+1}) - k'_{t+2})$ となるが、$k'_1 = k^*_1$ より $(k_0, k'_1, k'_2, \cdots) \in \Pi^k(k_0)$ は k_0 から実行可能な資本ストック経路なので、$V(k_0)$ の性質より、$u(f(k_0) - k'_1) + \beta \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k'_{t+1}) - k'_{t+2})) = u(f(k_0) - k^*_1) + \beta \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k'_{t+1}) - k'_{t+2})) = u(f(k_0) - k^*_1) + \beta V(k^*_1) \leqq V(k_0)$ である。故にこれらより、$u(f(k_0) - k^*_1) + \beta V(k^*_1) = V(k_0)$ となる。この時、$V(k_0) = u(f(k^*_0) - k^*_1) + \beta \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k^*_{t+1}) - k^*_{t+2}) = u(f(k_0) - k^*_1) + \beta V(k^*_1)$ なので、$V(k^*_1) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k^*_{t+1}) - k^*_{t+2})$ であり、$(k^*_1, k^*_2, \cdots) \in \Pi^k(k^*_1)$ は k^*_1 からの最適資本ストック経路である。

次に、$u(f(k^*_t) - k^*_{t+1}) + \beta V(k^*_{t+1}) = V(k^*_{t+1}), t \geqq 0, (k^*_t, k^*_{t+1}, \cdots) \in \Pi^k(k^*_t)$ は k^*_t からの最適資本ストック経路で $V(k^*_t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \beta^t u(f(k^*_{t+\tau}) - k^*_{t+\tau+1})$ となっている時に、$u(f(k^*_{t+1}) - k^*_{t+2}) + \beta V(k^*_{t+2}) = V(k^*_{t+2}), (k^*_{t+1}, k^*_{t+2}, \cdots) \in \Pi^k(k^*_{t+1})$ は k^*_{t+1} からの最適資本ストック経路で

[22]定常型割引付動的計画法では、ベルマン方程式を連続関数空間からそれ自身への写像と捉え、それが縮小写像となっていることから、縮小写像の不動点定理を適用して、それに一意的な不動点が存在することを示して、それがベルマン方程式を満たす一意的な連続関数であることを示している。詳しくは Lucas-Strky(1989, Ch.2,3) 参照。

$V(k^*_{t+1})=\sum_{\tau=0}^{\infty}\beta^t u(f(k^*_{t+\tau+1})-k^*_{t+\tau+2})$ となっている事を示す。[23] $V(k^*_t)=\sum_{\tau=0}^{\infty}\beta^t u(f(k^*_{t+\tau})-k^*_{t+\tau+1})=u(f(k^*_t)-k^*_{t+1})+\sum_{\tau=1}^{\infty}\beta^t u(f(k^*_{t+\tau})-k^*_{t+\tau+1})=u(f(k^*_t)-k^*_{t+1})+\beta\sum_{\tau=0}^{\infty}\beta^t u(f(k^*_{t+\tau+1})-k^*_{t+\tau+2})$ となるが、$(k^*_{t+1},k^*_{t+2},\cdots)\in\Pi^k(k^*_{t+1})$ は k^*_{t+1} から実行可能な資本ストック経路なので、$\sum_{\tau=0}^{\infty}\beta^t u(f(k^*_{t+\tau+1})-k^*_{t+\tau+2})\leqq V(k^*_{t+1})$ であり、故に、$V(k^*_t)=u(f(k^*_t)-k^*_{t+1})+\beta\sum_{\tau=0}^{\infty}\beta^t u(f(k^*_{t+\tau+1})-k^*_{t+\tau+2})\leqq u(f(k^*_t)-k^*_{t+1})+\beta V(k^*_{t+1})$ である。一方、$(k'_{t+1},k'_{t+2},k'_{t+3},\cdots)\in\Pi^k(k^*_{t+1}),k'_{t+1}=k^*_{t+1},$ を k^*_{t+1} から最適な資本ストック経路とすると、$V(k^*_{t+1})=\sum_{\tau=0}^{\infty}\beta^t u(f(k'_{t+\tau+1})-k'_{t+\tau+2})$ となるが、$k'_{t+1}=k^*_{t+1}$ より $(k^*_t,k'_{t+1},k'_{t+2},\cdots)\in\Pi^k(k^*_t)$ は k^*_t から実行可能な資本ストック経路なので、$V(k^*_t)$ の性質より、$u(f(k^*_t)-k'_{t+1})+\beta\sum_{\tau=0}^{\infty}\beta^t u(f(k'_{t+\tau+1})-k'_{t+\tau+2}))=u(f(k^*_t)-k^*_{t+1})+\beta\sum_{\tau=0}^{\infty}\beta^t u(f(k'_{t+\tau+1})-k'_{t+\tau+2}))=u(f(k^*_t)-k^*_{t+1})+\beta V(k^*_{t+1})\leqq V(k^*_t)$ である。故にこれらより、$u(f(k^*_t)-k^*_{t+1})+\beta V(k^*_{t+1})=V(k^*_t)$ となる。この時、$V(k^*_t)=u(f(k^*_t)-k^*_{t+1})+\beta\sum_{\tau=0}^{\infty}\beta^t u(f(k^*_{t+\tau+1})-k^*_{t+\tau+2})=u(f(k^*_t)-k^*_{t+1})+\beta V(k^*_{t+1})$ なので、$V(k^*_{t+1})=\sum_{\tau=0}^{\infty}\beta^t u(f(k^*_{t+\tau+1})-k^*_{t+\tau+2})$ であり、$(k^*_{t+1},k^*_{t+2},\cdots)\in\Pi^k(k^*_{t+1})$ は k^*_{t+1} からの最適資本ストック経路である。[24]

次に、$\widetilde{k}\in\Pi^k(k_0)$ を k_0 から一つの実行可能資本ストック経路として、$V(k_t)=u(f(k_t)-k_{t+1})+\beta V(k_{t+1}),t=0,1,2,\ldots,,\beta^t V(k_t)\to 0(t\to\infty)$ とする。$V(k_{t+1})$ に $u(f(k_{t+1})-k_{t+2})+\beta V(k_{t+2})$ を代入していくと、$V(k_0)=u(f(k_0)-k_1)+\beta V(k_1)=u(f(k_0)-k_1)+\beta[u(f(k_1)-k_2)+\beta V(k_2)]=u(f(k_0)-k_1)+\beta u(f(k_1)-k_2)+\beta^2V(k_2)=u(f(k_0)-k_1)+\beta u(f(k_1)-k_2)+\cdots+\beta^t V(k_t)=\sum_{\tau=0}^{t-1}\beta^\tau u(f(k_\tau)-k_{\tau+1}))+\beta^t V(k_t)$ となるが、$\beta^\tau u(f(k_\tau)-k_{\tau+1}))\geqq 0,t=0,1,2,\ldots,,$ より $\sum_{\tau=0}^{t-1}\beta^\tau u(f(k_\tau)-k_{\tau+1}))\to\sum_{\tau=0}^{\infty}\beta^\tau u(f(k_\tau)-k_{\tau+1}))(t\to\infty)$ なので、$\beta^t V(k_t)\to 0(t\to\infty)$ より、$V(k_0)=\sum_{\tau=0}^{\infty}\beta^\tau u(f(k_\tau)-k_{\tau+1}))$ となって、$\widetilde{k}\in\Pi^k(k_0)$ は $V(k_0)$ を実現する実行可能資本ストック経路なので、$\widetilde{k}$ は k_0 からの最適資本ストック経路である。

8　最適政策関数とその性質

既に示したように、$\widetilde{k^*}\in\Pi^k(k_0)$ を価値関数 $V(k_0)$ を実現する最適資本ストック経路とすると、$V(k_0)=u(f(k_0)-k^*_1)+\beta V(k^*_1)=\max[u(f(k_0)-k)+\beta V(k)]$ となっているの

[23]既に示した最適性原理からこの結果が成立しているのである。

[24]ここでは用いていないが、V は価値関数なので横断性条件が成立して、もちろん、$\beta V(k^*_t)\to 0(t\to\infty)$ となっている。

で、$k_1^* = aug\max[u(f(k_0) - k) + \beta V(k)]$ であり、u や f の強凹性と V の凹性よりこの k_1^* は一意的である。そこで、$\varphi(k) = aug\max[u(f(k) - k') + \beta V(k')], 0 \leqq \varphi(k) \leqq f(k)$ として、$\varphi : R_+ \to R_+$ を最適資本ストック政策関数とし、$c(k) = f(k) - \varphi(k)(\geqq 0)$ として、$c : R_+ \to R_+$ を最適消費政策関数とする。

この時、φ について、以下の性質が成立する。先ず、φ は連続である。[25] $k_0(\geqq 0)$ に対して $k_0^n(\geqq 0) \to k_0(n \to \infty)$ とする。また、$k_1^n = \varphi(k_0^n), n = 1, 2, \cdots,$ とする。資源制約より $0 \leqq k_1^n \leqq f(k_0^n), n = 1, 2, \cdots,$ であるが、f の連続性より $\exists\eta > 0,$ 十分に大きな n に対して、$0 \leqq k_1^n \leqq f(k_0^n) + \eta$ となるので、$(k_1^n)_{n=1}^\infty$ は有界であり、ボルツアーノ・ワイエルシュトラス定理より収束部分列 $(k_1^{n_q})_{q=1}^\infty$ が存在して、$k_1^{n_q} \to k_1(q \to \infty)$ となり、また、f の連続性より、$0 \leqq k_1 \leqq f(k_0)$。そこで、$k_1^{n_q} = \varphi(k_0^{n_q}), q = 1, 2, \cdots,$ とすると、φ の定義より、$V(k_0^{n_q}) = u(f(k_0^{n_q}) - k_1^{n_q}) + \beta V(k_1^{n_q}), q = 1, 2, \cdots,$ であり、V, f, u の連続性より $V(k_0) = u(f(k_0) - k_1) + \beta V(k_1)$ となって、φ の一意性より、$\varphi(k_0) = k_1$ となる。これより、$(k_0^{n_q})_{q=1}^\infty, k_1^{n_q} = \varphi(k_0^{n_q}) \to \varphi(k_0) = k_1(q \to \infty)$ となって、φ は k_0 で連続である。

この時、$k_0 > 0$ とすると、既に示したように、$k_{t+1}^*, c_t^* > 0, t = 1, 2, \cdots,$ なので、$k_1^* = \varphi(k_0) > 0, c_0^* = f(k_0) - \varphi(k_0) > 0$ である。また、既に示したように、$\widetilde{k^*} \in \Pi^k(k_0)$ の最適性 $\Longleftrightarrow V(k_t^*) = u(f(k_t^*) - k_{t+1}^*) + \beta V(k_t^*), t = 1, 2, \cdots,$ なので、φ の定義より、$\varphi(k_t^*) = k_{t+1}^*, t = 0, 1, 2, \cdots,$ であり、$k_{t+1}^* = \varphi(k_t^*) = \varphi(\varphi(k_{t-1}^*)) = \varphi \circ \varphi(k_{t-1}^*) = \varphi^2(k_{t-1}^*) \cdots = \varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi(k_0) = \varphi^t(k_0), t = 0, 1, 2, \cdots$ である。

φ は強単調増加的です。$(0 \leqq)k_0 < k_0'$ とする。$k_0 = 0$ とすると、既に示したように、$k_1 = \varphi(k_0) = 0 < k_1' = \varphi(k_0')$ となるので、$k_0 > 0$ とする。$k_1 = \varphi(k_0), k_2 = \varphi(k_1), k_1' = \varphi(k_0'), k_2' = \varphi(k_1')$ として $k_1 = \varphi(k_0) \geqq k_1' = \varphi(k_0')$ とする。そして、$c_1 = f(k_0) - k_1, c_2 = f(k_1) - k_2, c_1' = f(k_0') - k_1', c_2' = f(k_1') - k_2'$ とすると、$k_0, k_0' > 0$ より、$k_1, k_2, k_1', k_2' > 0, c_1, c_2, c_1', c_2' > 0$ なので、オイラー方程式より、$u'(c_0) = u'(f(k_0) - k_1) = \beta u'(c_1)f'(k_1) = \beta u'(f(k_1) - k_2)f'(k_1), u'(c_0') = u'(f(k_0') - k_1') = \beta u'(c_1')f'(k_1') = \beta u'(f(k_1') - k_2')f'(k_1')$ となる。また、包絡線定理より、$V'(k_1) = \beta u'(f(k_1) - k_2)f'(k_1), V'(k_1') = \beta u'(f(k_1') - k_2')f'(k_1')$ なので、代入すると、$u'(f(k_0) - k_1) = \beta V'(k_1), u'(f(k_0') - k_1') = \beta V'(k_1')$ となる。V は凹なので V' は単調減少であり、$k_1 \geqq k_1'$ より $V'(k_1) \leqq V'(k_1')$ となって、$u'(f(k_0) - k_1) \leqq u'(f(k_0') - k_1')$ となる。そして、u は凹なので u' は単調減少であり、$f(k_0) - k_1 \geqq f(k_0') - k_1'$ となって、$f(k_0) - f(k_0') \geqq k_1 - k_1' \geqq 0$ となり、f の単調増加性より $k_0 \geqq k_0'$ となるが、$k_0 < k_0'$ に矛盾が起こる。これより、$k_1 = \varphi(k_0) < k_1' = \varphi(k_0')$ となって、φ は強単調増加的である。すると、V' の単調減少性より、$u'(c_1)) = u'(f(k_0) - \varphi(k_0)) = \beta V'(\varphi(k_0)) > \beta V'(\varphi(k_0')) = u'(f(k_0') - \varphi(k_0')) = u'(c_1'))$ となり、u' の単調減少性より、$f(k_0) - \varphi(k_0) = c(k_0) = c_1 < f(k_0') - \varphi(k_0') = c(k_0') = c_1'$ となり、$c = f - \varphi$ は強単調増加的である。通常の結果は非交差命題 $(Non-crossing\ lemma)$ と言われている。

9 最適経路の収束性

ここでは最適資本ストック経路の収束性に関するいわゆるターンパイク定理を議論する。

まず、最適定常資本ストック k^s を $k^s = \varphi(k^s) \Leftrightarrow V(k^s) = u(f(k^s) - k^s) + \beta V(k^s) \Leftrightarrow \widetilde{k^s} = \arg\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k^s) - k^s), \widetilde{k^s} = (k^s, k^s, \cdots)$ として定義する。すると、$k^s > 0$ の時には、オ

[25] $f(x)$ の連続性のためには、$x^n \to x(n \to \infty) \Rightarrow \exists x^{n_q}, q = 1, 2, \cdots, f(x^{n_q}) \to f(x)$ を示せばよい。

イラー方程式より $u'(f(k^s)-k^s)=\beta u'(f(k^s)-k^s)f'(k^s)$ となるので、$f'(k^s)=1/\beta$ となる。また、f' は強単調減少的なので、$k^s>0$ の時にはこのような k^s は一意的である。もちろん、$f'(0)\leqq 1/\beta$ の時には、f' の強単調減少性より $f'(k^s)=1/\beta$ となる $k^s>0$ は存在せず、この時には、$k^s=0$ とする。

この時、$k_0(>0)$ からの最適ストック経路 $\widetilde{k^*}=(k_t^*)_{t=0}^\infty$ については単調性が成立する。すなわち、$k_0\leqq k_1^*\leqq k_2^*\leqq\cdots$ かまたは $k_0\geqq k_1^*\geqq k_2^*\geqq\cdots$ となる。これは、$k_1^*=k_0$ とすると、$k_2^*=\varphi(k_1^*)=\varphi(k_0)=k_1^*=k_0$ となり、更に、$k_3^*=\varphi(k_2^*)=\varphi(k_0)=k_0$ となるので、同様にして、$k_{t+1}^*=k_t^*=k_{t-1}^*=\cdots=k_0$ となって、この時には、$k_t^*=k_0=\varphi(k_0)=k^s$ である。次に、$k_1^*>k_0$ とすると、φ の強単調増加性から、$k_2^*=\varphi(k_1^*)>\varphi(k_0)=k_1^*$ となり、更に、$k_3^*=\varphi(k_2^*)>\varphi(k_1^*)=k_2^*>k_1^*>k_0$ となるので、同様にして、$k_{t+1}^*>k_t^*>k_{t-1}^*>\cdots>k_0$ となる。一方、$k_1^*<k_0$ とすると、φ の強単調増加性から、$k_2^*=\varphi(k_1^*)<\varphi(k_0)=k_1^*$ となり、更に、$k_3^*=\varphi(k_2^*)<\varphi(k_1^*)=k_2^*<k_1^*<k_0$ となるので、同様にして、$k_{t+1}^*<k_t^*<k_{t-1}^*<\cdots<k_0$ となる。これより、$k_0\leqq k_1^*\leqq k_2^*\leqq\cdots$ かまたは $k_0\geqq k_1^*\geqq k_2^*\geqq\cdots$ となる。

すると、$\widetilde{k^*}=(k_t^*)_{t=0}^\infty$ は単調数列になるが、$0\leqq k_t^*\leqq M=\max(\bar{k},k_0), t=0,1,2,\ldots$ なので、$\widetilde{k^*}=(k_t^*)_{t=0}^\infty$ は有界な単調数列となるので、単調増加のケースでは $\widetilde{k^*}=(k_t^*)_{t=0}^\infty$ はその上限 k' に収束して $k_t^*\to k'(t\to\infty)$ となり、また、単調減少のケースでは $\widetilde{k^*}=(k_t^*)_{t=0}^\infty$ はその下限 k' に収束して $k_t^*\to k'(t\to\infty)$ となる。この時、$0\leqq k_t^*\leqq M, t=0,1,2,\ldots$ なので、$0\leqq k'\leqq M$ である。そして、$k_{t+1}^*=\varphi(k_t^*), t=0,1,2,\ldots$ なので、φ の連続性より $k_t^*\to k'(t\to\infty)$ とすると、$k'=\varphi(k')$ となって、$k'=k^s$ である。$k'\geqq 0$ なので $k'>0$ とすると、最適消費政策関数の性質より $f(k^s)-\varphi(k')=f(k^s)-k'=c'>0$ となるので、$\widetilde{c'}=(c',c',\cdots),\widetilde{k'}=(k',k',\cdots)\in\Pi(k')$ とすると、$k'=\varphi(k')$ となっているので k' からの最適経路であり、$c_t'=c'>0$ よりオイラー方程式 $u'(c_t')=\beta u'(c_{t+1}')f'(k_{t+1}')$ が等号で成立し、$c_t'=c_{t+1}'=c', k_{t+1}'=k'$ なので $u'(c')=\beta u'(c')f'(k')$ となって $f'(k')=1/\beta$ となる。このような $k'(>0)$ は f' の強単調減少性より一意的に存在して、それを k^β とする。

ところで、$f'(0)\leqq 1/\beta$ とすると、f' の強単調減少性より、$f'(k)=1/\beta$ となる $k(>0)$ は存在しないので、この時には、$k'=k^\beta=0$ とするしかなく、すると、$\widetilde{k^*}=(k_t^*)_{t=0}^\infty$ の単調性よりそれは単調減少となるので、$k^0>0$ より $k_t^*\to 0(t\to\infty)$ となる。一方、$f'(0)>1/\beta$ とすると $k'=0$ とはならず、$k'>0$ となる。実際、$k'=0$ とすると、$\widetilde{k^*}=(k_t^*)_{t=0}^\infty$ の単調性より $k_t^*\to k'=0(t\to\infty)$ となるが、$c_t^*=f(k_t^*)-k_{t+1}^*(>0), t=0,1,2,\ldots$ より、$c_t^*\to 0(t\to\infty)$ となって、$u'(c_t^*)\to\infty(t\to\infty)$ となる。f' の連続性より $f'(k_t^*)\to f'(0)>1/\beta$ より $f'(k_t^*)>1/\beta$ が十分に大きい任意の t で成立する。すると、$k^0>0$ より $k_t^*, c_t^*>0, t=0,1,2,\ldots$ なので、オイラー方程式より $u'(c_t^*)=\beta u'(c_{t+1}^*)f'(k_{t+1}^*), t=0,1,2,\ldots$ より十分に大きい任意の t に対して、$u'(c_t^*)=\beta u'(c_{t+1}^*)f'(k_{t+1}^*)>u'(c_{t+1}^*)$ となって $c_t^*<c_{t+1}^*<\cdots$ となり、$c_t^*\to 0(t\to\infty)$ に矛盾する。これより、$k'=k^\beta>0$ となって′、$k_t^*\to k^\beta(>0)(t\to\infty)$ となる。これより、$f'(0)\leqq 1/\beta\Rightarrow(c_t^*,k_t^*)\searrow(0,0)(t\to\infty), f'(0)>1/\beta, k^0>k^\beta\Rightarrow k_t^*\searrow k^\beta(t\to\infty), f'(0)>1/\beta, k^0<k^\beta\Rightarrow k_t^*\nearrow k^\beta(t\to\infty)$ となる。この結果は 1 部門ラムゼーモデルにおける漸近ターンパイク定理といわれる。

ここで、今までで得られた結果を利用して、オイラー方程式と横断性条件を用いて、以下の最適資本ストック経路 $\widetilde{k^*}=(k_t^*)_{t=0}^\infty$ の特徴付けを行う。すなわち、

最適経路の特徴付け： $\widetilde{k^*}\in\Pi^k(k_0), k_0>0$, 最適 $\Longleftrightarrow$ 1. $u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)=\beta u'(f(k_{t+1}^*)-k_{t+2}^*)f'(k_{t+1}^*), t=0,1,2,\ldots,$　2. $\lim_{t\to\infty}\beta^t u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)k_{t+1}^*=0$

$(\Longrightarrow)\widetilde{k^*}=(k_t^*)_{t=0}^{\infty}$ は最適であるが、$k_0>0$ より $c_t^*, k_t^*>0, t=0,1,2,\ldots$ で、オイラー方程式が成立して、$u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)=\beta u'(f(k_{t+1}^*)-k_{t+2}^*)f'(k_{t+1}^*), t=0,1,2,\ldots$ となる。u や f の凹性や微分可能性より V は凹で微分可能なので、凹関数の微分による特徴付けと $V(0)=0$ より、$V'(k_{t+1}^*)(0-k_{t+1}^*)\geqq V(0)-V(k_{t+1}^*)=-V(k_{t+1}^*)$ となり、V の単調増加性より $V'\geqq 0$ なので $V(k_{t+1}^*)\geqq V'(k_{t+1}^*)k_{t+1}^*\geqq 0$ となり、$\beta^{t+1}V(k_{t+1}^*)\geqq\beta^{t+1}V'(k_{t+1}^*)k_{t+1}^*\geqq 0, t=0,1,2,\ldots$ となる。最適経路 $(k_t^*)_{t=0}^{\infty}$ については V の横断性条件が成立して、$\beta^{t+1}V(k_{t+1}^*)\to 0(t\to\infty)$ となるが、$0\leqq k_t^*\leqq M, t=0,1,2,\ldots$ なので、$\beta^{t+1}V(k_{t+1}^*)k_{t+1}^*\to 0(t\to\infty)$ となり、$\beta^{t+1}V'(k_{t+1}^*)k_{t+1}^*\to 0(t\to\infty)$ となる。包絡線定理の $V'(k_{t+1}^*)=u'(f(k_{t+1}^*)-k_{t+2}^*)f'(k_{t+1}^*), t=0,1,2,\ldots$ より、オイラー方程式は $\beta V'(k_{t+1}^*)=\beta u'(f(k_{t+1}^*)-k_{t+2}^*)f'(k_{t+1}^*)=u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*), t=0,1,2,\ldots$ となる。すると、$\beta^{t+1}V'(k_{t+1}^*)=\beta^t u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*), t=0,1,2,\ldots,$ となって、$\beta^{t+1}V'(k_{t+1}^*)k_{t+1}^*\to 0(t\to\infty)$ より $\beta^t u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)k_{t+1}^*\to 0(t\to\infty)$ となり、横断性条件も成立する。

$(\Longleftarrow)\widetilde{k}\in\Pi^k(k_0), k_0>0$ として、$\Delta^T=\displaystyle\sum_{t=0}^{T}\beta^t u(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)-\sum_{t=0}^{T}\beta^t u(f(k_t)-k_{t+1})=\sum_{t=0}^{T}\beta^t[u(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)-u(f(k_t)-k_{t+1})], T=0,1,2,\ldots,$ とする。$\widetilde{k},\widetilde{k^*}\in\Pi^k(k_0)$ に対しては $\displaystyle\sum_{t=0}^{T}\beta^t u(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)\to\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)(t\to\infty), \sum_{t=0}^{T}\beta^t u(f(k_t)-k_{t+1})\to\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(f(k_t)-k_{t+1})(t\to\infty)$ となるので、$\lim_{T\to\infty}\Delta^T=\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)-\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(f(k_t)-k_{t+1})$ となる。u や f の凹性や微分可能性より $u(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)-u(f(k_t)-k_{t+1})\geqq u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)[(f(k_t^*)-k_{t+1}^*-(f(k_t)-k_{t+1})]=u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)[(f(k_t^*)-f(k_t)-k_{t+1}^*+k_{t+1})]=u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)[(f(k_t^*)-f(k_t)+u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)(k_{t+1}-k_{t+1}^*)\geqq u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)[f'(k_t^*)(k_t^*-k_t)]+u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)(k_{t+1}-k_{t+1}^*)$ となり、$k_0=k_0^*$ とオイラー方程式を考慮すると $\Delta^T\geqq\displaystyle\sum_{t=0}^{T}\beta^t[u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)[f'(k_t^*)(k_t^*-k_t)]+u'(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)(k_{t+1}-k_{t+1}^*)]=u'(f(k_0)-k_1^*)(k_1-k_1^*)+\beta u'(f(k_1^*)-k_2^*)[f'(k_1^*)(k_1^*-k_1)]+\beta u'(f(k_1)-k_2^*)(k_2-k_2^*)+\beta^2u'(f(k_2^*)-k_3^*)[f'(k_2^*)(k_2^*-k_2)]+\cdots+\beta^T u'(f(k_T^*)-k_{T+1}^*)[f'(k_T^*)(k_T^*-k_T)]+\beta^T u'(f(k_T)-k_{T+1}^*)(k_{T+1}-k_{T+1}^*)=\beta^T u'(f(k_T)-k_{T+1}^*)(k_{T+1}-k_{T+1}^*)\geqq-\beta^T u'(f(k_T)-k_{T+1}^*)k_{T+1}^*$ となり、横断性方程式より $\beta^T u'(f(k_T)-k_{T+1}^*)k_{T+1}^*\to 0(T\to\infty)$ となるので、$T\to\infty$ とすると $\lim_{T\to\infty}\Delta^T=\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(f(k_t^*)-k_{t+1}^*)-\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(f(k_t)-k_{t+1})\geqq 0$ となり、$\widetilde{k^*}=(k_t^*)_{t=0}^{\infty}$ は最適である。

上の証明の $(\Longrightarrow)$ の必要性の部分がワイツマン（Weizman（1970））によるもので、$(\Longleftarrow)$ の部分の十分性がマンガサリアン（Mangasalian（1966））によるものである。上記の定理では、$u(0)=0$ という効用関数の下方有界性を前提にして、特に、$V(0)=0,$ を利用しているが、実用的な $u(c)=\log c$ のケースでは、効用関数の下方有界性を成立せず、$V(0)=-\infty,$ となるので、上記の結果をそのまま適用することはできない。ただし、効用関数の下方有界性のケースでは、そこで成立する漸近ターンパイク定理を用いていないのであるが、効用関数の下方非有界性のケースでも、漸近ターンパイク定理が成立するので、そのことを利用すれば、依然としてワイツマンの結果が成立する。[26]

[26] これについては別稿で検討する予定である。

10　ラムゼーモデルにおける厚生経済学の基本定理

ここでは、以上で考察してきた１部門無限期間ラムゼーモデルを無限次元財空間モデルの一例として捉えて、無限次元財空間モデルにおける厚生経済学の基本定理の１例という視点より、ラムゼーモデルにおける厚生経済学の基本定理を議論する。

$(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*},p^*,q^*)$ が競争均衡（$Competitive\quad Equilibrium$）$\Longleftrightarrow (1):\widetilde{c^*}\in l^+_\infty,\widetilde{k^*}\in l^+_\infty,p^*\in l^+_1\backslash\{0\},q^*>0,(2):\widetilde{c^*}=\arg\max\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t),s.t.\widetilde{c}\in l^+_\infty,\ \sum_{t=0}^{\infty}p^*_t c_t\leqq q^*k_0+\pi^*,(3):\widetilde{k^*}=\arg\max\sum_{t=0}^{\infty}p^*_t(f(k_t)-k_{t+1})-q^*k_0,s.t.\widetilde{k}\in l^+_\infty,0\leqq k_{t+1}\leqq f(k_t),t=0,1,2,\ldots,(4):0\leqq c^*_t+k^*_{t+1}\leqq f(k_t),t=0,1,2,\ldots,c^*_t+k^*_{t+1}<f(k_t)\rightarrow p^*_t=0,$

なおここで、(3) における最大利潤が $\pi^*=\max_{\widetilde{k}\in l^+_\infty}\sum_{t=0}^{\infty}p^*_t(f(k_t)-k_{t+1})-q^*k_0,s.t.0\leqq k_{t+1}\leqq f(k_t),t=0,1,2,\ldots,$ である。[27]　なお、競争均衡経路は定義より実行可能であるが、$A.4$ の仮定の下では k_0 からのどの実行可能な経路 $(\widetilde{c},\widetilde{k})\in\Pi(k_0),k_0>0$ も $0\leqq k^*_t\leqq M=\max\{\overline{k},k_0\},t=0,1,2,\ldots$ となるので、$(\widetilde{c},\widetilde{k})\in l^+_\infty\times l^+_\infty$ としている。

まずは、競争均衡を $(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*},p^*,q^*)$ とすると、$(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})$ がラムゼー問題（RM）の解であることを示す。その時、消費者が一人なので、ラムゼー問題（RM）の解はパレート最適であり、故に、競争均衡がパレート最適という厚生経済学の第１基本定理が成立する。$(\widetilde{c},\widetilde{k})\in\Pi(k_0)$ とする。実行可能性条件より、$0\leqq c_t\leqq f(k_t)-k_{t+1},t=0,1,2,\ldots$ である。また、利潤最大化条件より、$\sum_{t=0}^{\infty}p^*_t(f(k_t)-k_{t+1})(-q^*k_0)\leqq\sum_{t=0}^{\infty}p^*_t(f(k^*_t)-k^*_{t+1})(-q^*k_0)$ である。すると、$(0\leqq)\sum_{t=0}^{\infty}p^*_t c_t\leqq\sum_{t=0}^{\infty}p^*_t[f(k_t)-k_{t+1}]\leqq\sum_{t=0}^{\infty}p^*_t(f(k^*_t)-k^*_{t+1})=\pi^*+q^*k_0(<+\infty)$ となるので、$\widetilde{c}$ は予算制約を満たす事になる。すると、$\widetilde{c^*}$ が予算制約下の効用最大化点なので、$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t)\leqq\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c^*_t)$ となって、$(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})$ がラムゼー問題（RM）の解である。ここでは競争均衡の定義しか用いておらず、$A.1$~$A.4$ のいずれの条件も用いていないことに注意する。特に、$A.3(u'(0)=+\infty)$ は用いていない。

次に、ラムゼー問題（RM）の解を $(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})$ とすると、$A.1$~$A.4$ の下では、$\exists(p^*,q^*)\in(l^+_1\backslash\{0\}\times R_{++}),(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*},p^*,q^*)$ が競争均衡になることを示す。この時、消費者が一人なので、ラムゼー問題（RM）の解はパレート最適であり、パレート最適配分が競争均衡になるという厚生経済学の第２基本定理が成立する。ここでは、$A.1$~$A.4$ の条件を用いる。二つのケースのを分けて扱う。

（ケース１）：$f'(0)>1/\beta(>1)$

この時には、前節で見たターンパイク定理により、$k^*_t\rightarrow k^s(>0)(t\rightarrow\infty),c^*_t\rightarrow c^s=f(k^s)-k^s(>0)(t\rightarrow\infty)$ となる。今、$p^*_t=\beta^t u'(c^*_t),t=0,1,2,\ldots,q^*=1$ とする。$\varepsilon>0$ を $c^s-\varepsilon=B>0$ とすれば、$c^*_t\rightarrow c^s(t\rightarrow\infty)$ より $c^*_t>B,t,$ 十分に大きい、となり、$u''(\cdot)<0$ より $u'(c^*_t)<u'(B),t,$ 十分に大きい、となり、$(0\leqq)\sum_{t=0}^{\infty}p^*_t=\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u'(c^*_t)\leqq\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u'(B)=$

[27] ここで、l_∞ は有界な数列からなる集合であり、l^+_∞ は有界な非負の数列から集合である。また、l_1 は総和可能な数列からなる集合で、l^+_1 は総和可能な非負の数列から集合である。

$u'(B)/(1-\beta) < +\infty$ となって、$p^* \in (l_1^+ \backslash \{0\})$ である。ここで、$\pi^* = \sum_{t=0}^{\infty} p_t^*(f(k_t^*) - k_{t+1}^*) - k_0$ とすると、$(0 \leqq) k_t^* \leqq M = \max\{k_0, \overline{k}\}, t = 0, 1, 2, \ldots,$ と $p^* \in (l_1^+ \backslash \{0\}$ より、$\pi^* = \sum_{t=0}^{\infty} p_t^*(f(k_t^*) - k_{t+1}^*) - k_0 \leqq \sum_{t=0}^{\infty} p_t^*(f(M) - k_{t+1}^*) - k_0 \leqq \sum_{t=0}^{\infty} p_t^* f(M) - k_0 = f(A) \sum_{t=0}^{\infty} p_t^* - k_0 < +\infty$ であり、$\pi^* < +\infty$ である。

$\widetilde{c} = (c_t)_{t=1}^{\infty} \in l_\infty^+$ が予算制約を満たして、$\sum_{t=0}^{\infty} p_t^* c_t \leqq \pi^* + k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} p_t^*(f(k_t^*) - k_{t+1}^*) = \sum_{t=0}^{\infty} p_t^* c_t^* (< +\infty)$ となっている。u の凹性より、$u(c_t) - \ \ u(c_t^*) \leqq u'(c_t^*)(c_t - c_t^*)$ なので $u(c_t^*) - u(c_t) \geqq u'(c_t^*)(c_t^* - c_t)$ である。　$(c_t)_{t=1}^{\infty} \in l_\infty^+$ より $\exists b > 0,\ \ 0 \leqq c_t \leqq b, t = 0, 1, 2, \ldots$ となるので、$(0 \leqq) \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \leqq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(b) = u(b)/(1-\beta) < +\infty$ である。同様に、$0 \leqq c_t^* \leqq A, t = 0, 1, 2, \ldots$ となるので、$(0 \leqq) \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^*) \leqq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(A) = u(A)/(1-\beta) < +\infty$ である。すると、$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t^*) - \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t (u(c_t^*) - u(c_t)) \geqq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u'(c_t^*)(c_t^* - c_t) = \sum_{t=0}^{\infty} p_t^*(c_t^* - c_t) = \sum_{t=0}^{\infty} p_t^* c_t^* - \sum_{t=0}^{\infty} p_t^* c_t \geqq 0$ となり、$\widetilde{c^*} = (c_t^*)_{t=1}^{\infty}$ は予算制約下の効用最大化点である。

$\widetilde{k} = (k_t)_{t=0}^{\infty}$ を k_0 からの実行可能経路で $0 \leqq k_{t+1} \leqq f(k_t), t = 0, 1, 2, \ldots$ とすると、$(0 \leqq) k_t \leqq M = \max\{k_0, \overline{k}\}, t = 0, 1, 2, \ldots$ より、$\widetilde{k} \in l_\infty^+$ であり、$\sum_{t=0}^{T} p_t^*(f(k_t) - k_{t+1}) \to \sum_{t=0}^{\infty} p_t^*(f(k_t) - k_{t+1}) (T \to \infty)$ である。また、$\sum_{t=0}^{T} p_t^*(f(k_t^*) - k_{t+1}^*) \to \sum_{t=0}^{\infty} p_t^*(f(k_t^*) - k_{t+1}^*) (T \to \infty)$ である。$\Delta_T = \sum_{t=0}^{T} p_t^*(f(k_t^*) - k_{t+1}^*) - \sum_{t=0}^{T} p_t^*(f(k_t) - k_{t+1}), T = 0, 1, 2, \ldots$ とすると、$\Delta_T \to \sum_{t=0}^{\infty} p_t^*(f(k_t^*) - k_{t+1}^*) - \sum_{t=0}^{\infty} p_t^*(f(k_t) - k_{t+1}) (T \to \infty)$ となるので、$\lim_{T\to\infty} \Delta_T \geqq 0$ を示せば、$\widetilde{k^*} = (k_t^+)_{t=0}^{\infty}$ が潤最大化点となる。f の凹性より、$f(k_t) - f(k_t^*) \leqq f'(k_t^*)(k_t - k_t^*)$ なので $f(k_t^*) - f(k_t) \geqq f'(k_t^*)(k_t^* - k_t)$ であり、$\Delta_T = \sum_{t=0}^{T} p_t^*(f(k_t^*) - f(k_t)) - \sum_{t=0}^{T} p_t^*(k_{t+1}^* - k_{t+1}) \geqq \sum_{t=0}^{T} p_t^*(f'(k_t^*)(k_t^* - k_t)) - \sum_{t=0}^{T} p_t^*(k_{t+1}^* - k_{t+1}) = p_0^*(f'(k_0^*)(k_0^* - k_0)) - p_0^*(k_1^* - k_1) + p_1^*(f'(k_1^*)(k_1^* - k_1) - p_1^*(k_2^* - k_2) + \cdots + p_{T-1}^*(f'(k_{T-1}^*)(k_{T-1}^* - k_{T-1}) - p_{T-1}^*(k_T^* - k_T) + p_T^*(f'(k_T^*)(k_T^* - k_T) - p_T^*(k_{T+1}^* - k_{T+1})$
$= (p_1^*(f'(k_1^*) - p_0^*)(k_1^* - k_1) + \cdots + (p_T^*(f'(k_T^*) - p_{T-1}^*)(k_T^* - k_T) - p_T^*(k_{T+1}^* - k_{T+1})$ である。$(c_t^*, k_t^*) > 0, t = 0, 1, 2, \ldots$ より、オイラー方程式は $u'(c_t^*) = \beta u'(c_{t+1}^*) f'(k_{t+1}^*)$ なので $\beta^t u'(c_t^*) = \beta^{t+1} u'(c_{t+1}^*) f'(k_{t+1}^*)$ であり、$p_t^* = p_{t+1}^* f'(k_{t+1}^*)$ となって $p_{t+1}^* f'(k_{t+1}^*) - p_t^* = 0, t = 0, 1, 2, \ldots, T$ となって、結局 $\Delta_T = -p_T^*(k_{T+1}^* - k_{T+1}) \geqq -p_T^* k_{T+1}^*$ となる。この時、$k_{T+1}^* \to k^S (T \to \infty), p^* \in l_1^+$ より $p_T^* \to 0 (T \to \infty)$ なので、$\lim_{T\to\infty} \Delta_T \geqq \lim_{T\to\infty}(-p_T^* k_{T+1}^*) = 0$ となる。これより、$\widetilde{k^*} = (k_t^+)_{t=0}^{\infty}$ が潤最大化点である。もちろん、$(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*})$ がラムゼー問題 (

RM）の解なので、実行可能であり、$0 \leqq k^*_{t+1} \leqq f(k^*_t), t=0,1,2,\ldots$ である。これより、この（ケース１）において $(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*}, p^*, 1)$ は競争均衡になる。

（ケース２）：$(1<)f'(0) \leqq 1/\beta$

この時には、既に示したターンパイク定理により、$k^*_t(>0) \to 0(t\to\infty), c^*_t(>0) \to 0(t \to \infty)$ となる。$A.5$ の $1<f'(0)$ と $A.4$ の $f''(\cdot)<0$ より、$\exists \widehat{k}>0, f''(\widehat{k})>1$ となる。$k^*_t \to 0(>0)(t\to\infty)$ より、$k^*_t < \widehat{k}, t,$ 十分に大きい、となる。$k^*_t(>0)$ と $c^*_t(>0), t=0,1,2,\ldots$ より、オイラー方程式は $u'(c^*_t)=\beta u'(c^*_{t+1})f'(k^*_{t+1})$ となっていて $\beta^t u'(c^*_t) = \beta^{t+1}u'(c^*_{t+1})f'(k^*_{t+1})$ であり、$k^*_{t+1} < \widehat{k}, t,$ 十分に大、と $f''(\cdot)<0$ より、$f'(k^*_{t+1}) > f'(\widehat{k}), t,$ 十分に大、なので、$\beta^t u'(c^*_t) \geqq \beta^{t+1}u'(c^*_{t+1})f'(\widehat{k}), t,$ 十分に大、であり、$\beta^{t+1}u'(c^*_{t+1}) \leqq \beta^t u'(c^*_t)/f'(\widehat{k}) = \beta^t u'(c^*_t)\gamma, \gamma = 1/f'(\widehat{k})(\in (0,1)), t,$ 十分に大、である。そこで十分に大きい T に対して、$\beta^{T+1}u'(c^*_{T+1}) \leqq \beta^T u'(c^*_T)\gamma$ となっていたとすると、$\beta^{T+\tau}u'(c^*_{T+\tau}) \leqq \beta^{T+\tau-1}u'(c^*_{T+\tau-1})\gamma, \forall \tau \geqq 1$ となっていて、$\beta^{T+\tau}u'(c^*_{T+\tau}) \leqq \beta^{T+\tau-1}u'(c^*_{T+\tau-1})\gamma \leqq \beta^{T+\tau-2}u'(c^*_{T+\tau-2})\gamma^2 \leqq \cdots \leqq \beta^T u'(c^*_T)\gamma^\tau = p^*_T\gamma^\tau, \forall\tau \geqq 1$ となる。ここで、$p^*_t = \beta^t u'(c^*_t), t=0,1,2,\ldots$ とすると、$\sum_{t=0}^{\infty} p^*_t = \sum_{t=0}^{T} p^*_t + \sum_{\tau=1}^{\infty} p^*_{T+\tau} \leqq \sum_{t=0}^{T} p^*_t + \sum_{\tau=1}^{\infty} p^*_T\gamma^\tau = \sum_{t=0}^{T} p^*_t + p^*_T/(1-\gamma) < +\infty$ となって、$p^* = (p^*_t)^\infty_{t=1} \in l^1_+\backslash\{0\}$ である。

$q^*=1$ とする。$0 \leqq k^*_{t+1} \leqq M = \max\{k_0, \overline{k}\}, 0 \leqq c^*_t \leqq A, t=0,1,2,\ldots, p^* = (p^*_t)^\infty_{t=1} \in l^1_+\backslash\{0\}$ より、$\pi^* = \sum_{t=0}^{\infty} p^*_t(f(k^*_t) - k^*_{t+1}) - k_0$ とすると、$\pi^* = \sum_{t=0}^{\infty} p^*_t(f(k^*_t)-k^*_{t+1}) - k_0 \leqq \sum_{t=0}^{\infty} p^*_t(f(M)-k^*_{t+1}) - k_0 \leqq \sum_{t=0}^{\infty} p^*_t f(M) - k_0 = f(A)\sum_{t=0}^{\infty} p^*_t - k_0 < +\infty$ であり、$\pi^* < +\infty$ である。

$\widetilde{c} = (c_t)^\infty_{t=1} \in l^+_\infty$ が予算制約を満たして、$\sum_{t=0}^{\infty} p^*_t c_t \leqq \pi^* + k_0 = \sum_{t=0}^{\infty} p^*_t(f(k^*_t) - k^*_{t+1}) = \sum_{t=0}^{\infty} p^*_t c^*_t(<+\infty)$ とする。$(c_t)^\infty_{t=1} \in l^+_\infty$ より $\exists b>0, \ 0 \leqq c_t \leqq b, t=0,1,2,\ldots$ となるので、$(0 \leqq)\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t) \leqq \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(b) = u(b)/(1-\beta) < +\infty$ である。同様に、$0 \leqq c^*_t \leqq A, t=0,1,2,\ldots$ となるので、$(0 \leqq)\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c^*_t) \leqq \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(A) = u(A)/(1-\beta) < +\infty$ である。u の凹性より、$u(c^*_t)-u(c_t) \geqq u'(c^*_t)(c^*_t - c_t)$ なので、$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c^*_t) - \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t) = \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t(u(c^*_t)-u(c_t)) \geqq \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u'(c^*_t)(c^*_t-c_t) = \sum_{t=0}^{\infty}p^*_t(c^*_t-c_t) = \sum_{t=0}^{\infty}p^*_t c^*_t - \sum_{t=0}^{\infty}p^*_t c_t \geqq 0$ となり、$\widetilde{c^*} = (c^*_t)^\infty_{t=1}$ は予算制約下の効用最大化点である。

$\widetilde{k} = (k_t)^\infty_{t=0}$ を k_0 からの実行可能経路で $0 \leqq k_{t+1} \leqq f(k_t), t=0,1,2,\ldots$ とすると、$(0 \leqq) k_t \leqq M, t=0,1,2,\ldots$ より、$\widetilde{k} \in l^+_\infty$ であり、また、$0 \leqq f(k_t) \leqq f(M), t=0,1,2,\ldots$ より、$(f(k_t))^\infty_{t=0} \in l^+_\infty$ であり、$p^* = (p^*_t)^\infty_{t=1} \in l^1_+\backslash\{0\}$ より、$\sum_{t=0}^{\infty}p^*_t(f(k_t)-k_{t+1}) < +\infty$ である。すると、$\sum_{t=0}^{T}p^*_t(f(k_t)-k_{t+1}) \to \sum_{t=0}^{\infty}p^*_t(f(k_t)-k_{t+1})(T\to\infty)$ である。また、$\sum_{t=0}^{\infty}p^*_t(f(k^*_t) -$

$k^*_{t+1})(=\pi^*+k_0)<+\infty$ なので、$\sum_{t=0}^{T}p^*_t(f(k^*_t)-k^*_{t+1})\to\sum_{t=0}^{\infty}p^*_t(f(k^*_t)-k^*_{t+1})(T\to\infty)$ である。$\Delta_T=\sum_{t=0}^{T}p^*_t(f(k^*_t)-k^*_{t+1})-\sum_{t=0}^{T}p^*_t(f(k_t)-k_{t+1}),T=0,1,2,\dots$ とすると、$\Delta_T\to\sum_{t=0}^{\infty}p^*_t(f(k^*_t)-k^*_{t+1})-\sum_{t=0}^{\infty}p^*_t(f(k_t)-k_{t+1})(T\to\infty)$ となるので、$\lim_{T\to\infty}\Delta_T\geqq 0$ を示せば、$\widetilde{k^*}=(k^+_t)^{\infty}_{t=0}$ が潤最大化点となる。f の凹性より、$f(k^*_t)-f(k_t)\geqq f'(k^*_t)(k^*_t-k_t)$ であり、$\Delta_T=\sum_{t=0}^{T}p^*_t(f(k^*_t)-f(k_t))-\sum_{t=0}^{T}p^*_t(k^*_{t+1}-k_{t+1})\geqq\sum_{t=0}^{T}p^*_t(f'(k^*_t)(k^*_t-k_t))-\sum_{t=0}^{T}p^*_t(k^*_{t+1}-k_{t+1})=p^*_0(f'(k^*_0)(k^*_0-k_0))-p^*_0(k^*_1-k_1)+p^*_1(f'(k^*_1)(k^*_1-k_1)-p^*_1(k^*_2-k_2)+\dots+p^*_{T-1}(f'(k^*_{T-1})(k^*_{T-1}-k_{T-1})-p^*_{T-1}(k^*_T-k_T)+p^*_T(f'(k^*_T)(k^*_T-k_T)-p^*_T(k^*_{T+1}-k_{T+1})$
$=(p^*_1(f'(k^*_1)-p^*_0)(k^*_1-k_1)+\dots+(p^*_T(f'(k^*_T)-p^*_{T-1})(k^*_T-k_T)-p^*_T(k^*_{T+1}-k_{T+1})$ である。$(c^*_t,k^*_t)>0,t=0,1,2,\dots$ より、オイラー方程式は $u'(c^*_t)=\beta u'(c^*_{t+1})f'(k^*_{t+1})$ なので $\beta^t u'(c^*_t)=\beta^{t+1}u'(c^*_{t+1})f'(k^*_{t+1})$ であり、$p^*_t=p^*_{t+1}f'(k^*_{t+1})$ となって $p^*_{t+1}f'(k^*_{t+1})-p^*_t=0,t=0,1,2,\dots,T$ であり、$\Delta_T=-p^*_T(k^*_{T+1}-k_{T+1})\geqq-p^*_Tk^*_{T+1}$ となる。この時、$k^*_{T+1}\to 0(T\to\infty),p^*\in l^+_1$ より $p^*_T\to 0(T\to\infty)$ なので、$\lim_{T\to\infty}\Delta_T\geqq\lim_{T\to\infty}(-p^*_Tk^*_{T+1})=0$ となる。これより、$\widetilde{k^*}=(k^+_t)^{\infty}_{t=0}$ が潤最大化点である。$(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})$ がラムゼー問題 (RM) の解なので、実行可能であり、$0\leqq k^*_{t+1}\leqq f(k^*_t),t=0,1,2,\dots$ である。これより、この (ケース 2) においても $(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*},p^*,1)$ は競争均衡になる。

以上によりいずれのケースにおいても $(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})$ がラムゼー問題 (RM) の解ならば、$\exists p^*=(p^*_t)^{\infty}_{t=1}\in l^1_+\backslash\{0\},(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*},p^*,1)$ が競争均衡になり、厚生経済学の第 2 基本定理が成立する。以上の議論を纏めると以下が得られる。

ラムゼーモデルにおける厚生経済学の基本定理： 1. 競争均衡を $(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*},p^*,q^*)$ とすると、$(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})$ はラムゼー問題 (RM) の解である。2. $A.1,\dots,A.5$ の下では、$(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})$ がラムゼー問題 (RM) の解であれば、$\exists p^*=(p^*_t)^{\infty}_{t=1}\in l^1_+\backslash\{0\},(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*},p^*,1)$ が競争均衡になる。

11 終わりに

本稿では $A.3.(u'(0)=+\infty)$ を前提にして、ラムゼーモデル (RM) の最適経路 $(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})$ の内点性、$(c^*_t,k^*_t)>0,t=0,1,2,\dots,$ を用いて、ラムゼーモデル (RM) の最適経路の様々な性質を導いて来たのであるが、同様の目的のための条件として、$\lim_{c\to 0}u(c)=u(0)=-\infty$ があり、この場合には効用関数は下に非有界になる。このケースの代表例は $u(c)=\log c$ であり、マクロ経済学や最適成長論において頻繁に用いられている。本稿で示した結果がこの効用関数は下に非有界に拡張する議論も必要である。[28]

ところで、本稿では 1 財モデルを前提にしたが、多数財モデルで同様の結果を示そうとすると、特に最適経路が最適定常状態に収束していくという漸近ターンパイク定理の証明は本稿で想定したように、将来効用を割り引く状況では、格段に複雑になる。将来を割り引かないケースであれば、たとえ多数財モデルにおける漸近ターンパイク定理の証明は容易である。Le Van-Dana(2003, Ch.8) では、McKenzie(1986) の多数財モデルにおける漸近ターンパイク定理の証明を、1 財モデルにおいて簡明な形で行っているが、その証明を多数財モデルで採

[28] この事については、別途考察する予定である。

用すると、多数財モデルにおける漸近ターンパイク定理の証明を依然として簡明な形で行える。[29]

また、本稿のラムゼーモデル (RM) は離散型無限期間の最適問題とみなすことができるが、このような問題は割引定常動的計画法の例の一つと考えることもできるので、このような割引定常動的計画法を考えて、本稿で示した最適経路の存在やオイラー方程式や横断性条件による最適経路の特徴付けを考察する事も必要である。[30] 更に、離散型無限期間の最適問題を扱う際に必要となり、頻繁に利用される離散型無限期間のラグランジュ乗数法の成立を示すことも必要である。[31]

付録：厚生経済学の基本定理 $u\prime(0) = 1 < +\infty$ のケース

ところで、既に示したラムゼーモデルにおける厚生経済学の (第 2) 基本定理は、$(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*})$ の内部 (正) 性のための $A.3 : u'(0) = +\infty$ という条件に基づいて議論を進めてきたのであるが、効用関数が $u(c) = \log(1 + c)$ となっていて、$u'(0) = 1 < +\infty$ となっていると、上記の厚生経済学の第 2 基本定理はそのままでは適用できない。そこで、この $u'(0) < +\infty$ のケースを取り上げる。まず、$A.3$ を次の $A.3'$ に変更する。

$A.3'$. $u'(0) < +\infty$

今、$A.3$ を満たす効用関数列 $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ を $\exists\theta \in (0, 1), u_n(c) = u(c)+c^{\theta}/(\theta n), n = 1, 2, \ldots$ として与えると $A.2$ を満たし、、各 $c > 0$ に対して、$c^{\theta}/(\theta n) \to 0(n \to \infty)$ より $u_n(c) \to u(c)(n \to \infty)$ であり、$[c^{\theta}/(\theta n)]' = 1/(c^{1-\theta}n) \to 0(n \to \infty)$ より $u'_n(c) \to u'(c)(n \to \infty)$ である。さらに、各 $n = 1, 2, \ldots,$ に対して、$c \to 0 \Longrightarrow [c^{\theta}/(\theta n)]' = 1/(c^{1-\theta}n) \to \infty$ より $c \to 0 \Longrightarrow u'_n(c) = u'(c)+1/(c^{1-\theta}n) \to \infty, n = 1, 2, \ldots,$ である。これより、各 u_n は $A.3$ を満たすことになり、各 u_n に対して $A.3$ の下での厚生経済学の第 2 基本定理が適用可能となる。そして、元の (u, f) の (RM) の最適経路 $(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*})$ に対して、(u_n, f) の (RM) の最適経路を $(\widetilde{c^*_n}, \widetilde{k^*_n}), n = 1, 2, \ldots,$ とすると、$(\widetilde{c^*_n}, \widetilde{k^*_n}) \to (\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*})(n \to \infty)$ であり、各 $n = 1, 2, \ldots,$ に対して、$A.3$ のケースの厚生経済学の基本定理より $(\widetilde{c^*_n}, \widetilde{k^*_n})$ に対応する競争均衡 $(\widetilde{c^*_n}, \widetilde{k^*_n}, p^*_n, q^*_n)$ があり、更に、この競争均衡列 $(\widetilde{c^*_n}, \widetilde{k^*_n}, p^*_n, q^*_n)_{n=1}^{\infty}$ に極限 $(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*}, p^*, q^*)$ が存在して、この $(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*}, p^*, q^*)$ が元の (u, f) の (RM) の最適経路 $(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*})$ に対応する競争均衡であることを示す。[32] これが $A.3'$ の下でのラムゼーモデルにおける厚生経済学の第 2 基本定理の証明の基本的な議論の方向であるが、実際にはこのように進めるのではなくて、少し修正した形で進められる。

(u_n, f) の (RM) の最適経路を $(\widetilde{c^*_n}, \widetilde{k^*_n}), n = 1, 2, \ldots,$ とすると、各 $n = 1, 2, \ldots,$ に対して、$A.3$ のケースの厚生経済学の基本定理より $(\widetilde{c^*_n}, \widetilde{k^*_n})$ に対応する競争均衡 $(\widetilde{c^*_n}, \widetilde{k^*_n}, p^*_n, q^*_n)$ とすると、この競争均衡列 $(\widetilde{c^*_n}, \widetilde{k^*_n}, p^*_n, q^*_n)_{n=1}^{\infty}$ から収束部分列を取ることができて、その極限を $(\widetilde{c^*_0}, \widetilde{k^*_0}, p^*_0, q^*_0)$ とすると、$(\widetilde{c^*_0}, \widetilde{k^*_0})$ は元の (u, f) の (RM) の最適経路で、しかもこの $(\widetilde{c^*_0}, \widetilde{k^*_0}, p^*_0, q^*_0)$

[29] Le Van-Dana(2003, Ch.8) では、ここでの 1 財モデルの証明がそのまま多数財モデルでも可能と述べているが、その証明は与えていない。McKenzie(1986) の証明では、まず、効用関数の凹性や連続性を利用して近傍ターンパイク定理を証明し、そのあとで、効用関数の 2 回微分可能性を仮定して漸近ターンパイク定理を証明する。それに対して Le Van-Dana(2003, Ch.8) では、最初から効用関数の 2 回微分可能性を仮定して近傍ターンパイク定理を証明して次に漸近ターンパイク定理を証明している。1 財モデルではあるが、これによって漸近ターンパイク定理の証明はかなりすっきりしたものになっている。機会があれば、Le Van-Dana(2003, Ch.8) に沿った多数財モデルでの漸近ターンパイク定理の証明を与えたいと考えている。

[30] 横断性条件の必要性については、上東 (2004) において詳しく検討されている。

[31] 離散型無限期間のラグランジュ乗数法については、Le Van,C and H.C. Saglam(2004) でも扱われており、機会があれば、これらについても考察したいと考えている。

[32] 正確には、この $(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*}, p^*, q^*)$ は競争均衡列 $(\widetilde{c^*_n}, \widetilde{k^*_n}, p^*_n, q^*_n)_{n=1}^{\infty}$ の収束部分列の極限である。

は元の (u,f) の (RM) の競争均衡である。すると、元の (u,f) の (RM) の最適経路を $(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*})$ とすると、$A.2$ や $A.4$ の強凹性に基づく最適経路の一意性 ($A.3.$ の不使用) から、$(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*}) = (\widetilde{c_0^*},\widetilde{k_0^*})$ であり、故に、$(\widetilde{c^*},\widetilde{k^*},p_0^*,q_0^*) = (\widetilde{c_0^*},\widetilde{k_0^*},p_0^*,q_0^*)$ が元の (u,f) の (RM) の競争均衡になって、$A.3'$ の下での厚生経済学の第 2 基本定理が成立する。これより、$n = 1,2,\ldots,$ に対する (u_n,f) の (RM) の最適経路列 $(\widetilde{c_n^*},\widetilde{k_n^*})_{n=1}^{\infty}$ に対応する競争均衡列 $(\widetilde{c_n^*},\widetilde{k_n^*},p_n^*,q_n^*)_{n=1}^{\infty}$ から収束部分列を取ることができて、その極限 $(\widetilde{c_0^*},\widetilde{k_0^*},p_0^*,q_0^*)$ に関して、$(\widetilde{c_0^*},\widetilde{k_0^*})$ は元の (u,f) の (RM) の最適経路で、しかもこの $(\widetilde{c_0^*},\widetilde{k_0^*},p_0^*,q_0^*)$ は元の (u,f) の (RM) の競争均衡である事を示せばよい。ただし、これを示すために、ここでは $A.5$ を以下の $A.5'$ に変更する。

$A.5'$. $f'(0) > 1/\beta$

以下では、(u_n,f) の (RM) の最適経路列 $(\widetilde{c_n^*},\widetilde{k_n^*})_{n=1}^{\infty}$ に対応する競争均衡列 $(\widetilde{c_n^*},\widetilde{k_n^*},p_n^*,q_n^*)_{n=1}^{\infty}$ から収束部分列を取れて、その極限 $(\widetilde{c_0^*},\widetilde{k_0^*},p_0^*,q_0^*)$ に関して、$(\widetilde{c_0^*},\widetilde{k_0^*})$ が元の (u,f) の (RM) の最適経路で、しかも $(\widetilde{c_0^*},\widetilde{k_0^*},p_0^*,q_0^*)$ が元の (u,f) の (RM) の競争均衡である事を示す。

まず、各 $n = 1,2,\ldots$ の (u_n,f) に対して $A.1,\cdots,A.5$ が成立するので、その (RM) には最適経路が存在して、それを $(\widetilde{c_n^*},\widetilde{k_n^*})$ とすると、u_n についてはA.3 が成立するので、$A.3$ の時の厚生経済学の第 2 基本定理より、$(\widetilde{c_n^*},\widetilde{k_n^*})$ に対応する競争均衡 $(\widetilde{c_n^*},\widetilde{k_n^*},p_n^*,q_n^*), p_n^* = (p_{n,t}^*)_{t=1}^{\infty} \in l_+^1\backslash\{0\}, q_n^* > 0$ が存在する。最初に、以下の補題を示す。

補題：$\exists L > 0, \forall n = 1,2,\ldots, \sup_{t=0}^{\infty} u_n'(c_{n,t}^*) \leqq L$。

3 つのケースに分けて考える。最初ののケース (1) $0 < k_0 < k^s$: $0 < k_0 < k^s < \overline{k} = f(\overline{k})$ と f の単調性より、$k_0 < f(k_0) < f^2(k_0) < \cdots < f^t(k_0) < \cdots < f(\overline{k}) = \overline{k}$ で $f^t(k_0) \to f(\overline{k}) = \overline{k}(t \to \infty)$ となるので、$\exists T > 0, f^{T+1}(k_0) > k^s$ となる。このような T を 1 つ固定する。また、$f'(0) > 1/\beta(> 1)$ より、各 $n = 1,2,\ldots$ に対して $(c_{n,t}^*,k_{n,t}^*)$ は単調的であるが、$0 < k_0 < k^s$ より $0 < k_0 < k_{n,t}^* < k^s, t = 1,2,\ldots,(c_{n,t}^*,k_{n,t}^*) \uparrow (c^s,k^s)(t \to \infty)$ となる。この時、(c^s,k^s) は $f'(k^s) = 1/\beta$ で与えられているので、n から独立である。また、$A.3$ より $(c_{n,t}^*,k_{n,t}^*) > 0, t = 1,2,\ldots$ なので、オイラー方程式は $u_n'(c_{n,t}^*) = \beta u_n'(c_{n,t+1}^*)f'(k_{n,t+1}^*), t = 1,2,\ldots$ となるが、$k_{n,t+1}^* < k^s$ より $f'(k_{n,t+1}^*) > f'(k^s) = 1/\beta$ なので $\beta f'(k_{n,t+1}^*) > 1$ であり、$u_n'(c_{n,t}^*) > u_n'(c_{n,t+1}^*)(> 0), t = 0,1,2,\ldots,$ なので、$(u_n'(c_{n,t}^*))_{t=1}^{\infty}$ は減少列であり、$u_n'(c_{n,0}^*) > u_n'(c_{n,t}^*), t = 1,2,\ldots,$ となって、$\sup_{t=0,1,2,\ldots} u_n'(c_{n,t}^*) = u_n'(c_{n,0}^*), n = 1,2,\ldots$ である。そこで、$\sup_{n=1,2,\ldots} u_n'(c_{n,0}^*) < +\infty$ を示せばよい。今、$\sup_{n=1,2,\ldots} u_n'(c_{n,0}^*) = +\infty$ とすると、部分列 $(u_{n_q}'(c_{n_q,0}^*))_{q=1}^{\infty}$ があって $u_{n_q}'(c_{n_q,0}^*) \uparrow +\infty(q \to \infty)$ となる。オイラー方程式より $u_{n_q}'(c_{n_q,0}^*) = \beta u_{n_q}'(c_{n_q,1}^*)f'(k_{n_q,1}^*)$ で、$k_0 < k_{n_q,1}^*$ より $f'(k_{n_q,1}^*) < f'(k_0)$ なので、$u_{n_q}'(c_{n_q,1}^*) = u_{n_q}'(c_{n_q,0}^*)/(\beta f'(k_{n_q,1}^*)) > u_{n_q}'(c_{n_q,0}^*)/(\beta f'(k_0))$ である。$u_{n_q}'(c_{n_q,0}^*) \uparrow +\infty(q \to \infty)$ より右辺 $\uparrow +\infty(q \to \infty)$ なので、左辺 $\uparrow +\infty(q \to \infty)$ となって、$u_{n_q}'(c_{n_q,1}^*) \uparrow +\infty(q \to \infty)$ となる。帰納的に考えれば、結局、$u_{n_q}'(c_{n_q,t}^*) \uparrow +\infty(q \to \infty), t = 0,1,2,\ldots,T$ となる。すると、$u_{n_q}'' < 0$ より $u_{n_q}'(\cdot)$ は単調増加的で $u_{n_q}'(0) = +\infty$ なので、各 $t = 0,1,2,\ldots,T$ に対して $c_{n_q,t}^* \downarrow 0(q \to \infty)$ である。すると、$u_{n_q}'(c_{n_q,0}^*) > 0$ と実行可能性より $f(k_0) = c_{n_q,0}^* + k_{n_q,1}^*$ なので、$c_{n_q,0}^* \downarrow 0(q \to \infty)$ より $\lim_{q\to\infty} k_{n_q,1}^* = f(k_0)$ であり、同様に、$f(k_{n_q,1}^*) = c_{n_q,1}^* + k_{n_q,2}^*$ なので、$c_{n_q,1}^* \downarrow 0(q \to \infty)$ と f の連続性より $\lim_{q\to\infty} k_{n_q,2}^* = \lim_{q\to\infty} f(k_{n_q,1}^*) = f(\lim_{q\to\infty} k_{n_q,1}^*) = f(f(k_0)) = f^2(k_0)$ である。帰納的に考えると、$\lim_{q\to\infty} k_{n_q,t}^* = \lim_{q\to\infty} f(k_{n_q,t}^*) = f(\lim_{q\to\infty} k_{n_q,t-1}^*) = f^t(k_0), t = 1,2,\ldots,T,T+1$ となり、特に $\lim_{q\to\infty} k_{n_q,T+1}^* = f^{T+1}(k_0)$ である。すると、十分に大きい q に対して、$f^{T+1}(k_0) > k^s$ より $k_{n_q,T+1}^* > k^s$ となるが、$0 < k_0 < k_{n_q,T+1}^* < k^s$ な

ので矛盾が起こる。これより、このケースで $\exists L_1 > 0, \forall n = 1, 2, \ldots, \sup_{t=0}^{\infty} u'_n(c^*_{n,t}) \leqq L_1$ となる。

次のケース (2) $0 < k_0 = k^s$: この時には、各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して $(c^*_{n,t}, k^*_{n,t}) = (c^s, k^s)(> (0,0)), t = 1, 2, \ldots,$ で、各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して $u'_n(c^*_{n,t}) = u'_n(c^s), t = 1, 2, \ldots,$ なので、$\sup_{t=0}^{\infty} u'_n(c^*_{n,t}) = u'_n(c^s), n = 1, 2, \ldots$ である。u_n の作り方より $u'_n(c^s) \to u'(c^s)(n \to \infty)$、$c^s > 0$ より $u'(c^s) < +\infty$ なので、$\exists L_2 > 0, \sup_{n=1}^{\infty} u'_n(c^s) = \sup_{n=1}^{\infty} \sup_{t=0}^{\infty} u'_n(c^*_{n,t}) \leqq L_2$ となる。

最後のケース (3) $k_0 > k^s$: この時には、$f'(0) > 1/\beta(> 1)$ より、各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して $(c^*_{n,t}, k^*_{n,t})$ は単調的であるが、$0 < k^s < k_0$ より $0 < c^s < c^*_{n,t} < c_0, t = 1, 2, \ldots, (c^*_{n,t}, k^*_{n,t}) \downarrow (c^s, k^s)(t \to \infty)$ となる。特に、各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して $c^s < c^*_{n,t}, t = 1, 2, \ldots$ より各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して $u'_n(c^s) > u'_n(c^*_{n,t}), t = 0, 1, 2, \ldots$ となり、$\sup_{t=0}^{\infty} u'_n(c^*_{n,t}) \leqq u'_n(c^s), n = 1, 2, \ldots$ となる。また、u_n の作り方より $u'_n(c^s) \to u'(c^s)(n \to \infty)$ で、$c^s > 0$ より $u'(c^s) < +\infty$ なので、ケース (2) と同様に、$\sup_{n=1}^{\infty} u'_n(c^s) = \sup_{n=1}^{\infty} \sup_{t=0}^{\infty} u'_n(c^*_{n,t}) \leqq L_2$ となる。以上により、$L = \max(L_1, L_2)$ とすれば、$\sup_{n=1}^{\infty} \sup_{t=0}^{\infty} u'_n(c^*_{n,t}) \leqq L$ となって、補題が成立する。

次に、(u_n, f) の (RM) の競争均衡列 $(\widetilde{c^*_n}, \widetilde{k^*_n}, p^*_n, q^*_n)_{n=1}^{\infty}$ から収束部分列を取り出して、その極限 $(\widetilde{c^*_0}, \widetilde{k^*_0}, p^*_0, q^*_0)$ が (u, f) の (RM) の競争均衡であることを示す。まず、$(\widetilde{c^*_n}, \widetilde{k^*_n}), n = 1, 2, \ldots,$ の実行可能性より $0 \leqq c^*_{n,t}, k^*_{n,t} \leqq A, t = 0, 1, 2, \ldots,$ なので、$(\widetilde{c^*_n}, \widetilde{k^*_n}) = (c^*_{n,t}, k^*_{n,t})_{t=0}^{\infty} \in \times_{t=0}^{\infty}[0, A]^2, n = 1, 2, \ldots,$ であるが、$\times_{t=0}^{\infty}[0, A]^2$ の座標別収束位相に関する点列コンパクト性より、ある収束部分列 $(\widetilde{c^*_{n_q}}, \widetilde{k^*_{n_q}})_{q=1}^{\infty}$ が存在して、$(c^*_{n,t}, k^*_{n,t}) \to (c^*_{0,t}, k^*_{0,t})(q \to \infty), t = 0, 1, 2, \ldots, (c^*_{0,t}, k^*_{0,t})_{t=0}^{\infty} = (\widetilde{c^*_0}, \widetilde{k^*_0}) \in \times_{t=0}^{\infty}[0, A]^2$ である。実際には、資源制約より $0 \leqq c^*_{n,t} + k^*_{n,t+1} \leqq f(k^*_{n,t}), t = 0, 1, 2, \ldots$ なので、この各座標別収束より $0 \leqq c^*_{0,t} + k^*_{0,t+1} \leqq f(k^*_{0,t}), t = 0, 1, 2, \ldots$ となって、$(c^*_{0,t}, k^*_{0,t})_{t=0}^{\infty} = (\widetilde{c^*_0}, \widetilde{k^*_0})$ は (u, f) の (RM) の実現可能経路である。そして、各 $n = 1, 2, \ldots$ に対して、$p^*_{n,t} = \beta^t u'_n(c^*_{n,t}), t = 0, 1, 2, \ldots,$ として与えられているが、$0 \leqq c^*_{n,t} \leqq A, t = 0, 1, 2, \ldots,$ より $u'_n(c^*_{n,t}) \geqq u'_n(c^s), t = 0, 1, 2, \ldots,$ で $u'_n(c^s) \to u'(c^s)(> 0)(n \to \infty)$, なので、$\exists L' > 0, L' \leqq u'_n(c^*_{n,t}), \forall t = 0, 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots$ となるが、補題より $u'_n(c^*_{n,t}) \leqq L, \forall t = 0, 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots$ なので、結局、$L' \leqq u'_{n_q}(c^*_{n_q,t}) \leqq L, \forall t = 0, 1, 2, \ldots, q = 1, 2, \ldots$ となる。すると、$\beta^t L' \leqq p^*_{n_q,t} = \beta^t u'_{n_q}(c^*_{n_q,t}) \leqq \beta^t L, \forall t = 0, 1, 2, \ldots, q = 1, 2, \ldots$ となって、$p^*_{n_q} = (p^*_{n_q,t})_{t=0}^{\infty} \in \times_{t=0}^{\infty}[\beta^t L', \beta^t L]$ となり、再び $\times_{t=0}^{\infty}[\beta^t L', \beta^t L]$ の座標別収束位相に関する点列コンパクト性より収束部分列がとれるが、それを $p^*_{n_q} = (p^*_{n_q,t})_{t=0}^{\infty}$ として、$p^*_{n_q,t} \to p^*_{0,t}(q \to \infty), t = 0, 1, 2, \ldots, p^*_0 = (p^*_{0,t})_{t=0}^{\infty} \in \times_{t=0}^{\infty}[\beta^t L', \beta^t L]$ とする。この時、$p^*_{n_q,t} \geqq \beta^t L', t = 0, 1, 2, \ldots, q = 1, 2, \ldots$ より $p^*_{0,t} \geqq \beta^t L' > 0, t = 0, 1, 2, \ldots,$ とあり、また、$(0 <)\sum_{t=0}^{\infty} p^*_{0,t} \leqq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t L = L/(1 - \beta) < +\infty$ なので、$p^*_0 = (p^*_{0,t})_{t=0}^{\infty} \in l^1_+ \backslash \{0\}$ である。

今 $(\widetilde{c^*_0}, \widetilde{k^*_0}, p^*_0, 1)$ を (u, f) の (RM) において考える。まず、$u'_{n_q}(c^*_{n_q,t}) > 0$ と実行可能性より $f(k^*_{n_q,t}) = c^*_{n_q,t} + k^*_{n_q,t+1}, t = 0, 1, 2, \ldots, q = 1, 2, \ldots$ なので、$q \to \infty$ とすれば $f(k^*_{0,t}) = c^*_{0,t} + k^*_{0,t+1}, t = 0, 1, 2, \ldots$ となり、$(A \geqq) c^*_{0,t} = f(k^*_{0,t}) - k^*_{0,t+1} (\geqq 0), t = 0, 1, 2, \ldots$ である。すると、$\widetilde{c^*_0} \in l^{\infty}_+$ と $p^*_0 \in l^1_+ \backslash \{0\}$ より $(0 \leqq) p^*_0 \cdot \widetilde{c^*_0} = \sum_{t=0}^{\infty} p^*_{0,t} c^*_{0,t} = \sum_{t=0}^{\infty} p^*_{0,t}(f(k^*_{0,t}) - k^*_{0,t+1}) < +\infty$ である。$\sum_{t=0}^{\infty} p^*_{0,t}(f(k^*_{0,t}) - k^*_{0,t+1}) = \pi_0 + k_0$ とおく。

$p^*_0 \cdot \widetilde{c} \leqq p^*_0 \cdot \widetilde{c^*_0} = \pi_0 + k_0$ を満たす $\widetilde{c} \in l^{\infty}_+$ を取り上げる。T と q を所与とする。u_{nq} の凹性より、$\sum_{t=0}^{T} \beta^t u_{nq}(c^*_{n_q,t}) - \sum_{t=0}^{T} \beta^t u_{n_q}(c_t) \geqq \sum_{t=0}^{T} \beta^t u'_{n_q}(c^*_{n_q,t})(c^*_{n_q,t} - c_t) = \sum_{t=0}^{T} p^*_{n_q,t}(c^*_{n_q,t} - c_t)$ であり、$q \to \infty$ とすると、$c^*_{n_q,t} \to c^*_{0,t}, t = 0, 1, 2, \ldots$ と $u_{n_q}(\cdot)$ の作り方より、$u_{n_q}(c^*_{n_q,t}) \to u(c^*_{0,t}), u_{n_q}(c_t) \to$

$u(c_t), u'_{n_q}(c^*_{n_q,t}) \to u'(c^*_{0,t}), t=0,1,2,\ldots$なので、$\beta^t u'_{n_q}(c^*_{n_q,t}) = p^*_{n_q,t} \to p^*_{0,t}, t=0,1,2,\ldots$であり、$\sum_{t=0}^{T}\beta^t u_{nq}(c^*_{n_q,t}) - \sum_{t=0}^{T}\beta^t u_{n_q}(c_t) \to \sum_{t=0}^{T}\beta^t u(c^*_{0,t}) - \sum_{t=0}^{T}\beta^t u(c_t), \sum_{t=0}^{T}p^*_{n_q,t}(c^*_{n_q,t} - c_t) \to \sum_{t=0}^{T}p^*_{0,t}(c^*_{0,t} - c_t)$となり、$\sum_{t=0}^{T}\beta^t u(c^*_{0,t}) - \sum_{t=0}^{T}\beta^t u(c_t) \geqq \sum_{t=0}^{T}p^*_{0,t}(c^*_{0,t} - c_t)$となる。そこで、$T \to \infty$とすると、$\sum_{t=0}^{T}\beta^t u(c^*_{0,t}) - \sum_{t=0}^{T}\beta^t u(c_t) \to \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c^*_{0,t}) - \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t), \sum_{t=0}^{T}p^*_{0,t}(c^*_{0,t} - c_t) \to \sum_{t=0}^{\infty}p^*_{0,t}(c^*_{0,t} - c_t)$となり、$\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c^*_{0,t}) - \sum_{t=0}^{\infty}\beta^t u(c_t) \geqq \sum_{t=0}^{\infty}p^*_{0,t}(c^*_{0,t} - c_t) = \sum_{t=0}^{\infty}p^*_{0,t}c^*_{0,t} - \sum_{t=0}^{\infty}p^*_{0,t}c_t = p^*_0 \cdot \widetilde{c^*_0} - p^*_0 \cdot \widetilde{c} \geqq 0$となって、$\widetilde{c^*_0}$は$p^*_0 \cdot \widetilde{c} \leqq p^*_0 \cdot \widetilde{c^*_0} = \pi_0 + k_0$の下で効用最大化を実現していて需要条件が成立している。

$(\widetilde{k}) = (k_t)^{\infty}_{t=0} \in l^{\infty}_{+}$が$0 \leqq k_{t+1} \leqq f(k_{t+1}), t=0,1,2,\ldots$を満たす実行可能資本経路とする。もちろんここで$k_0$は所与である。$T$と$q$を所与として、$\Delta_{n_q,T} = \sum_{t=0}^{T}p^*_{n_q,t}(f(k^*_{n_q,t}) - k^*_{n_q,t+1}) - \sum_{t=0}^{T}p^*_{n_q,t}(f(k_t) - k_{t+1}) = \sum_{t=0}^{T}p^*_{n_q,t}(f(k^*_{n_q,t}) - f(k_t)) - \sum_{t=0}^{T}p^*_{n_q,t}(k^*_{n_q,t+1} - k_{t+1}), T=0,1,2,\ldots, q=1,2,\ldots$とすると、$f$の凹性より$\sum_{t=0}^{T}p^*_{n_q,t}f(k^*_{n_q,t}) - f(k_t)) \geqq \sum_{t=0}^{T}p^*_{n_q,t}f'(k^*_{n_q,t})(k^*_{n_q,t} - k_t)$となるので、$\Delta_{n_q,T} \geqq \sum_{t=0}^{T}p^*_{n_q,t}f'(k^*_{n_q,t})(k^*_{n_q,t} - k_t) - \sum_{t=0}^{T}p^*_{n_q,t}(k^*_{n_q,t+1} - k_{t+1}) = p^*_{n_q,0}f'(k^*_{n_q0t})(k^*_{n_q,0} - k_0) + \sum_{t=1}^{T}(p^*_{n_q,t}f'(k^*_{n_q,t}) - p^*_{n_q,t-1})(k^*_{n_q,t} - k_t) - p^*_{n_q,T}(k^*_{n_q,T+1} - k_{T+1})$となるが、オイラー方程式より$(p^*_{n_q,t}f'(k^*_{n_q,t}) - p^*_{n_q,t-1}) = \beta^t u'_{n_q}(c^*_{n_q,t})f'(k^*_{n_q,t}) - \beta^{t-1}u'_{n_q}(c^*_{n_q,t-1}) = 0$であり、$k^*_{n_q,0} = k_0$なので、$\Delta_{n_q,T} \geqq -p^*_{n_q,T}(k^*_{n_q,T+1} - k_{T+1}) \geqq -p^*_{n_q,T}k^*_{n_q,T+1}$となる。ここで、$q \to \infty$とすると、$p^*_{n_q,T}k^*_{n_q,T+1} \to p^*_{0,T}k^*_{0,T+1}$であり、$(0 < \beta^T L' \leqq)p^*_{0,T} \leqq \beta^T L, (0 \leqq)k^*_{0,T+1} \leqq A$なので、$\lim_{q\to\infty}\Delta_{n_q,T} = \Delta_{0,T} \geqq -\lim_{q\to\infty}(p^*_{n_q,T}k^*_{n_q,T+1}) = -p^*_{0,T}k^*_{0,T+1} \geqq -\beta^T LA, T=0,1,2,\ldots$であり、更に、$T \to \infty$とすると、$\lim_{T\to\infty}\Delta_{0,T} \geqq -\lim_{T\to\infty}\beta^T LA = 0$となる。ところで、$\Delta_{n_q,T} = (\sum_{t=0}^{T}p^*_{n_q,t}(f(k^*_{n_q,t}) - k^*_{n_q,t+1}) - \sum_{t=0}^{T}p^*_{n_q,t}(f(k_t) - k_{t+1}))$と$(p^*_{n_q,t}, k^*_{n_q,t}) \to (p^*_{0,t}, k^*_{0,t})(q \to \infty)$より$\Delta_{0,T} = \lim_{q\to\infty}\Delta_{n_q,T} = \lim_{q\to\infty}(\sum_{t=0}^{T}p^*_{n_q,t}(f(k^*_{n_q,t}) - k^*_{n_q,t+1}) - \sum_{t=0}^{T}p^*_{n_q,t}(f(k_t) - k_{t+1})) = (\sum_{t=0}^{T}p^*_{0,t}(f(k^*_{0,t}) - k^*_{0,t+1}) - \sum_{t=0}^{T}p^*_{0,t}(f(k_t) - k_{t+1}))$であり、更に、$T \to \infty$とすると、$\sum_{t=0}^{T}p^*_{0,t}(f(k^*_{0,t}) - k^*_{0,t+1}) \to \sum_{t=0}^{\infty}p^*_{0,t}(f(k^*_{0,t}) - k^*_{0,t+1}), \sum_{t=0}^{T}p^*_{0,t}(f(k_t) - k_{t+1})) \to \sum_{t=0}^{\infty}p^*_{0,t}(f(k_t) - k_{t+1}))$となるので、$\lim_{T\to\infty}\Delta_{0,T} = \sum_{t=0}^{\infty}p^*_{0,t}(f(k^*_{0,t}) - k^*_{0,t+1}) - \sum_{t=0}^{\infty}p^*_{0,t}(f(k_t) - k_{t+1})) \geqq 0$となって、$(\widetilde{k^*_0}) = (k^*_{0,t})^{\infty}_{t=0}$は利潤最大化を実現している。

既に、$f(k^*_{0,t}) = c^*_{0,t} + k^*_{0,t+1}, t=0,1,2,\ldots$であるので、結局、$(\widetilde{c^*_0}, \widetilde{k^*_0}, p^*_0, 1)$は$(u,f)$の$(RM)$の競争均衡である。すると、$A.3.$から独立に成立する第1基本定理より、$(\widetilde{c^*_0}, \widetilde{k^*_0})$は$(u,f)$の$(RM)$の最適経路になるが、初期資本ストック$k_0$を所与とする限り、$(u,f)$の$(RM)$の$k_0$からの最適経路は一意的なので、$(u,f)$の$(RM)$の$k_0$からの最適経路を$(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*})$とすると、$(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*}) = (\widetilde{c^*_0}, \widetilde{k^*_0})$となり、$(\widetilde{c^*_0}, \widetilde{k^*_0}, p^*_0, 1)$は$(u,f)$の$(RM)$の$k_0$の時の競争均衡なので、$(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*}, p^*_0, 1)(= (\widetilde{c^*_0}, \widetilde{k^*_0}, p^*_0, 1))$も$(u,f)$の$(RM)$の$k_0$の時の競争均衡であり、$A.3.$を$A.3'.$へ変更しても$A.5.$を$A.5'.$へ変更すれば、依然としてラムゼーモデルにおける厚生経済学の第2基本定理は成立する。以上を纏めて、

ラムゼーモデルにおける厚生経済学の第2基本定理： $A.1, A.2, A.3', A.4, A.5'$ の下では、$(\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*})$ がラムゼー問題（RM）の解であれば、$\exists p^* = (p_t^*)_{t=1}^{\infty} \in l_+^1 \backslash \{0\}, (\widetilde{c^*}, \widetilde{k^*}, p^*, 1)$ が競争均衡になる。

参考文献

[1] Acemoglu,D(2009):*Introduction to Modern Economic Growth*, Princeton University Press(Princeton, NJ)

[2] Becker, R and J.H.Boyd(1997):*Capital Theory, Equilibrium Analysis, and Recursive Utility*, Blackwell(Malden, MA)

[3] Berkovitz(2002):*Convexity and Optimization in* R^n, Wiley Interscience(New York, NY)

[4] Bewley,T(2007):*General Equilibrium, Overlapping Generations Models, and Optimal Growth Theory*, Harvard University Press(Cambridge, MA)

[5] Le Van,C. and R.Dana(2003):*Dynamic Programming in Economics*, Kluwer Academic(Dordrecht, Netherlands)

[6] ——————— and H.C. Saglam(2004):"Optimal growth models and the Lagrange multiplier" *Journal of Mathematical Economics*, 40, pp.393-410

[7] Harris, M.(1987):*Dynamic Economic Analysis*, Oxford University Press(New York, NY)

[8] 上東貴志 (2004):「横断性条件の必要性と十分性」、西村和雄・福田慎一編『非線形均衡動学：不決定性と複雑性』（東京大学出版）第4章　89-118頁

[9] McKenzie,L(1986):"Optimal economic growth, turnpike theorems, and economic dynamics" in *Handbooks of Mathematical Economics Vol.III*, ed. by K. Arrow and M.D. Intrigator, pp.1281-1358, North-Holland(Amsterdam,Holland)

[10] ——————— (2002):*Classical General Equilibrium Theory*, MIT Press(Cambridge, MA)

[11] 西村和雄・矢野誠 (2005): 『マクロ経済動学』　岩波書店

[12] Ramsey, F(1928):"A Mathematical theory of saving" *Economics Journal*, 38, pp.543-559

[13] Rockafeller(1970):*Convex Analysis*, Princeton University Press(Princeton, NJ)

[14] Stokey N.L. and R.Lucsa(1989):*Recursive Methodsin Economic Dynamics*, Harvard University Press(Cambridge, MA)

[15] Sundram, R.(1996):*A First Course in Optimization Theor*y, Cambridge University Press(New York, NY)

[16] Weitzman, M.L.(1973):"Duality theory for infinite horizon convex models" in *Mathematical Science*, 19, pp.783-789